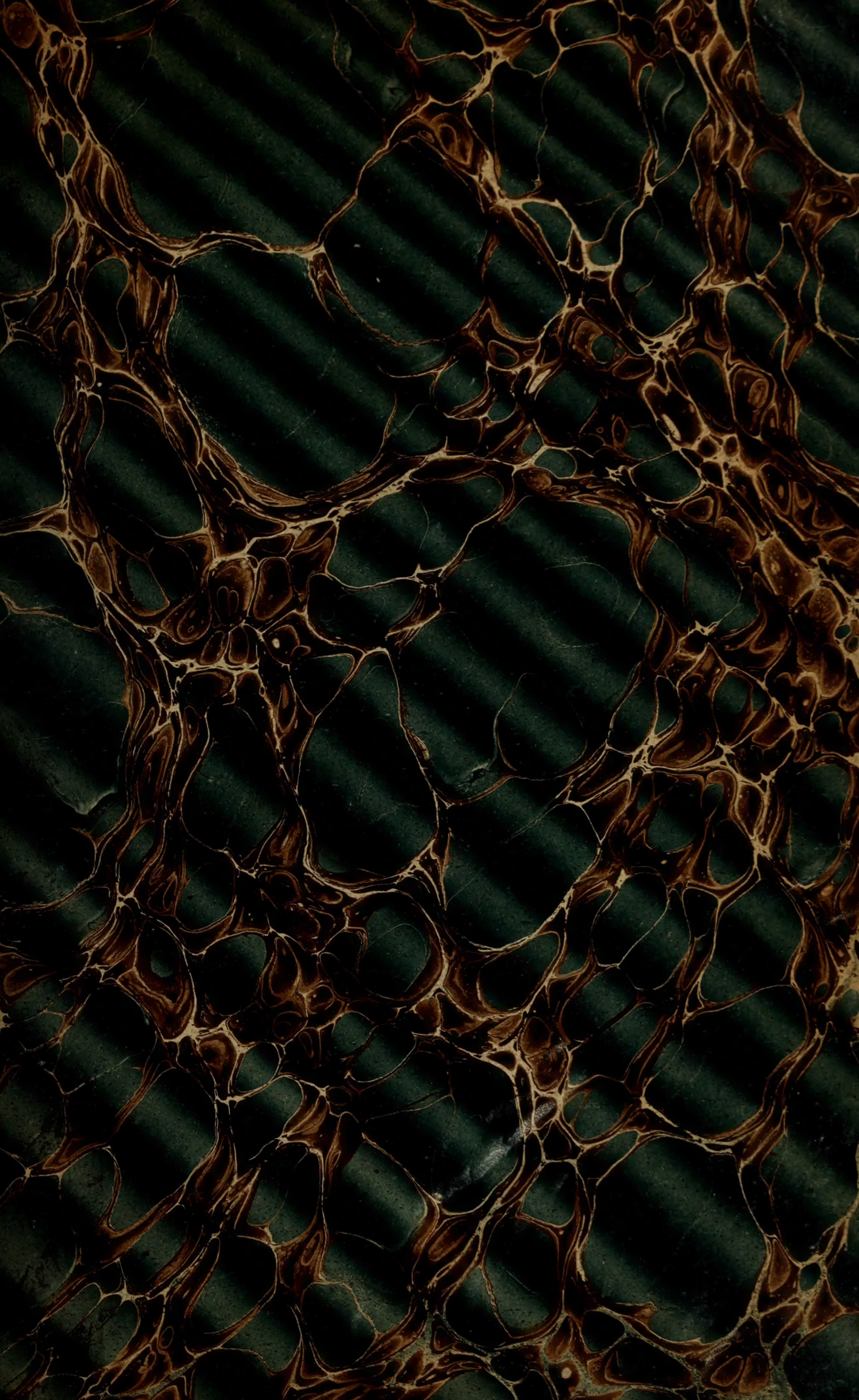






BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

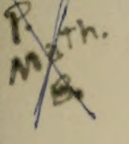
ASTRONOMIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel,* Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

4638 PARIS — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.



BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,

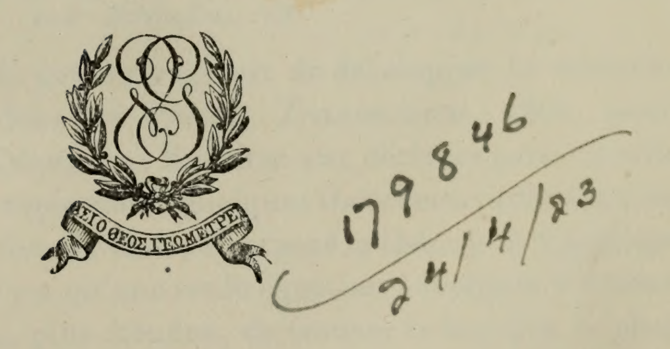
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME II. — ANNÉE 1878.

(TOME XIII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1878

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CINQ THÈSES, PUBLIÉES ET SOUTENUES A L'UNIVERSITÉ IMPÉRIALE DE HELSINGFORS, par les Candidats pour la chaire vacante de Mathématiques.

I. FALK (M.). — *Bearbetning af några teorier angående differentialeqvationer.* 57 p. in-8°. Helsingfors, 1876.

L'objet principal de cet Ouvrage est de développer la méthode proposée par Boole dans les *Philos. Transactions,* 1862, pour intégrer un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Après avoir établi quelques théorèmes préliminaires sur les déterminants fonctionnels, et exposé la théorie de Lagrange relative au cas où il n'y a qu'une seule équation à intégrer, l'auteur se propose la question, plus étendue, de trouver la fonction la plus générale qui satisfasse en même temps à plusieurs équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, le nombre des équations étant toutefois plus petit que celui des variables. En désignant par $\delta(z) = 0$, $\delta_1(z) = 0$ deux quelconques de ces équations, et formant une nouvelle équation $(\delta\delta_1 - \delta_1\delta)(z) = 0$, on peut démontrer que celle-ci est non-seulement linéaire et du pre-

mier ordre, mais qu'elle est aussi vérifiée par toute fonction z qui satisfait aux équations données. Si l'équation ainsi formée n'est pas identique, on peut l'ajouter au système donné, et éliminer en même temps une des dérivées partielles de z. On obtient ainsi un nouveau système de même forme, ayant une équation de plus et une dérivée de moins dans chaque équation, auquel on peut appliquer le même procédé, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on tombe sur un système d'équations qui ne donnent, en y appliquant le procédé en question, que des identités. Arrivé à ce point, on cherche à intégrer, par la méthode de Lagrange, l'une des équations du dernier système. Si l'on y parvient et qu'on prenne les fonctions dont se compose l'intégrale générale pour nouvelles variables indépendantes, on peut transformer ce même système en un autre dans lequel le nombre des équations et celui des variables sont diminués l'un et l'autre d'une unité. Par une seconde intégration, suivie d'un nouveau changement de variables, on diminue encore d'une unité tant le nombre des équations que celui des variables, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le système soit réduit à une seule équation, qu'on doit enfin intégrer par la méthode de Lagrange. L'intégrale ainsi obtenue sera en même temps la solution générale du système primitif.

A cause de la correspondance qui existe entre les équations aux dérivées partielles et les équations différentielles ordinaires, la méthode de Boole précédemment exposée peut servir aussi pour intégrer un système d'équations de cette dernière espèce. C'est ce que l'auteur fait voir dans la dernière partie de son Ouvrage, et qu'il éclaircit par quelques exemples.

H. MELLBERG (E.-J.). — *Teorin för determinant-kalkylen.* 121 p. in-8°. Helsingfors, 1876.

L'auteur commence par une introduction historique fort étendue (50 pages), renfermant des extraits nombreux des travaux de Leibnitz, Cramer, Bézout, Vandermonde, Lagrange, Laplace, Gauss et Cauchy, pour mettre en évidence la part qui revient à chacun de ces grands géomètres dans la fondation du calcul dont il s'agit. Le reste du travail contient une exposition très-élémentaire de la théorie des déterminants et de ses applications principales. On y trouve les règles pour multiplier et différentier les

déterminants; des notions sur les déterminants mineurs et sur quelques déterminants particuliers symétriques, etc. Les applications concernent la résolution des équations linéaires, l'évaluation de l'aire d'un triangle et du volume d'un tétraèdre, la cubature des solides réguliers, les propriétés des déterminants fonctionnels et hessiens, le changement des variables dans une intégrale multiple. Cette énumération rapide montre assez que le travail de M. Mellberg ne renferme guère rien de nouveau; parfois il laisse aussi à désirer pour la rigueur des démonstrations, ce qui diminue l'utilité qu'il pourrait avoir sans cela pour l'enseignement élémentaire.

III. Bonsdorff (E.). — *Härledning och geometrisk tydning af vigtigaste combinanterna i det ternära kubiska formsystemet.* 66 p. in-8°. Helsingfors, 1876.

La théorie des formes cubiques ternaires a, dans ces derniers temps, fait des progrès considérables par les recherches de plusieurs géomètres, surtout en Allemagne. Dans un travail remarquable, inséré dans les *Mathematische Annalen*, 1869, Aronhold avait démontré que tous les invariants [ce terme étant pris dans le sens le plus général de manière à comprendre aussi les covariants, les contravariants et les formes intermédiaires (*Zwischenformen*)] constituent un système fini de formes distinctes, au nombre de trente-quatre, dont tous les autres se composent algébriquement. Plus tard, MM. Clebsch et Gordan publièrent ensemble (dans les *Math. Ann.*, 1873) un travail systématique sur les formes cubiques ternaires, où ils étudiaient aussi les combinants de ces formes. Dernièrement, M. Gundelfinger s'est occupé de l'interprétation géométrique des combinants appartenant au système cubique ternaire (*Math. Ann.*, 1875). Profitant de ces travaux, M. Bonsdorff s'est proposé d'étudier plus spécialement les combinants et leurs significations géométriques.

Le travail de M. Bonsdorff est divisé en trois Parties. Dans la première, il examine quelques-unes (en tout quinze) des formes dérivées les plus simples du système cubique, parmi lesquelles deux surtout, introduites par Hesse et par Cayley, jouent un rôle principal. La seconde contient un résumé succinct de la théorie des combinants, c'est-à-dire des invariants simultanés d'un système de formes ayant la propriété de ne subir aucun changement essentiel lorsqu'aux formes données on substitue des combinaisons linéaires

de ces formes. Il s'agit en particulier des combinants relatifs au cas où le système donné se réduit à deux formes cubiques ternaires, l'une primitive et l'autre sa hessienne, cette espèce de combinants ayant une importance particulière dans la théorie des courbes du troisième ordre. L'auteur indique deux méthodes pour la formation de ces combinants et examine quelques-uns d'entre eux dans leur rapport avec les invariants précédemment étudiés.

La troisième Partie a pour objet l'interprétation géométrique des formes dont il a été question dans les deux premières et, en particulier, des combinants. La forme cubique ternaire, égalée à zéro, représentant, dans le système de coordonnées homogènes, l'équation générale d'une courbe du troisième ordre ou de la troisième classe, suivant qu'il s'agit de coordonnées ponctuelles ou tangentielles; tout invariant, covariant, etc., dérivé d'une telle forme, renferme l'expression de quelque propriété inhérente à une pareille courbe. Dans ces applications géométriques, l'auteur a constamment pris pour point de départ l'équation complète du troisième ordre, au lieu de la forme simplifiée, dite *canonique,* à laquelle cette équation peut se réduire par un changement de coordonnées convenable et dont on fait usage ordinairement. On sait qu'une courbe du troisième ordre a, en général, neuf points d'inflexion. En combinant, au moyen de coefficients indéterminés, la forme primitive avec sa hessienne, on obtient l'équation commune de toutes les courbes du troisième ordre ayant les mêmes neuf points pour points d'inflexion et qui constituent ensemble ce qu'on appelle un *faisceau syzygétique.* C'est à ce faisceau que se rapportent les combinants étudiés par M. Bonsdorff. Quant aux interprétations qu'il en a essayées, elles semblent confirmer la remarque faite par M. Gundelfinger à l'occasion de son travail du même genre déjà cité, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas, en général, difficiles à trouver; mais que les propositions géométriques auxquelles elles conduisent sont, pour la plupart, trop compliquées pour avoir un intérêt réel.

IV. Mittag-Leffler (G.). — *En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska funktionerna.* 96 p. in-8°. Helsingfors, 1876.

Dans une introduction historique de quinze pages, l'auteur rend compte des recherches qui préparaient la découverte des fonctions

elliptiques et du développement des idées qui y conduisaient. L'exposition du sujet même est divisée en quatre articles. Dans le premier, l'auteur cherche à simplifier, par une transformation algébrique, l'expression différentielle $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, dans laquelle $R(x)$ est un polynôme du quatrième degré en x. Après avoir montré ce qu'on peut obtenir par une substitution linéaire, l'auteur suppose une relation du second degré entre x et une nouvelle variable s; par une méthode indiquée par M. Weierstrass, il en détermine les coefficients de manière que l'expression différentielle se réduise à la forme $-\frac{ds}{\sqrt{S}}$, où $S = 4s^3 - g_2 s - g_3$, et qu'en outre s devienne $= \infty$ pour une valeur initiale arbitraire $x = x_0$.

Dès lors, le problème que l'auteur a en vue, et qui consiste à trouver la solution générale de l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = du$, se trouve grandement simplifié; il se réduit, en effet, à trouver une fonction (continue, monodrome et monogène), $s = p(u)$, qui satisfasse à l'équation différentielle $-\frac{ds}{\sqrt{S}} = du$, et qui devienne infinie pour une valeur donnée de u, soit $u = 0$.

Par une discussion ingénieuse, dont il est rendu compte dans l'article 2, M. Weierstrass a démontré qu'il n'existe qu'une seule fonction remplissant les conditions dont il s'agit, et que le problème est ainsi complétement déterminé. Cela étant, il s'agit d'établir en réalité cette fonction $p(u)$. Supposons d'abord que les trois racines de l'équation $S = 0$ soient réelles et inégales, et désignons-les, suivant l'ordre décroissant de grandeur, par e_1, e_2, e_3. Une première branche de la fonction cherchée s'obtient au moyen de l'intégrale définie

$$x = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

en faisant parcourir à s la série des valeurs réelles depuis ∞ jusqu'à e_1 et en calculant les valeurs correspondantes de l'argument u, qui croît alors d'une manière continue de zéro à une certaine valeur positive ω. Ayant remplacé s par $-s$ dans l'intégrale précédente, on arrive de la même manière à former la fonction pour les valeurs

purement imaginaires de l'argument u comprises entre zéro et une certaine limite ω_1, correspondant à la valeur $s = -e_3$. Il est démontré d'ailleurs que la fonction reste la même lorsque l'argument change de signe. La fonction *elliptique* $p(u)$ étant ainsi établie pour les valeurs réelles de u comprises entre $-\omega$ et $+\omega$ et pour les valeurs purement imaginaires comprises entre $-\omega_1$ et $+\omega_1$, on peut étendre successivement le champ de la fonction, au moyen du théorème d'addition eulérien, de manière à embrasser d'abord toutes les valeurs réelles, puis toutes les valeurs purement imaginaires et enfin toutes les valeurs complexes de l'argument. A l'aide du même théorème, on peut démontrer encore que ladite fonction possède deux périodes, 2ω et $2\omega_1$, et qu'elle ne peut prendre de valeurs égales qu'en des points séparés les uns des autres par des périodes entières.

L'existence de la fonction étant ainsi établie, ainsi que la possibilité de la calculer pour toutes les valeurs de l'argument, il reste à former une expression analytique qui puisse la représenter généralement. A cet effet, l'auteur emploie, dans l'article 3, un procédé dû à Abel et simplifié par lui. Par des applications réitérées du théorème d'addition, il parvient à une relation algébrique entre $p(u)$ et $p\left(\frac{u}{n}\right)$, qui donne, en faisant $n = \infty$ et passant à la limite, $p(u)$ exprimée sous la forme d'une série indéfinie dont la convergence est rigoureusement démontrée.

La méthode employée dans les trois premiers articles, pour établir la fonction $p(u)$ et trouver son développement en série, est sans doute très-intéressante au point de vue théorique, parce qu'elle éclaircit nettement la pensée suivie par Abel dans ses recherches classiques. Mais, à cause des suppositions qu'on avait faites, dès le commencement, sur la nature des racines de l'équation $S = 0$, le résultat n'a qu'une validité restreinte; il n'est donc pas permis de dire qu'on ait ainsi acquis une « possession » vraie et légitime de la fonction elliptique. Pour combler cette lacune, l'auteur reprend la question, dans le quatrième article, à un autre point de vue. En se fondant sur le théorème, établi par Cauchy et Weierstrass, sur la possibilité d'intégrer un système d'équations différentielles par des séries qui restent convergentes, dans certaines limites des variables, il obtient, sans faire aucune supposition sur les coefficients

du trinôme S, la fonction $\frac{1}{p(u)}$ développée en série dont la convergence est assurée au moins dans le voisinage de la valeur initiale de u. Au lieu de poursuivre la discussion de la fonction $p(u)$, l'auteur en déduit, par deux intégrations successives, une autre fonction σ, étudiée, comme la précédente, par M. Weierstrass, et qui se présente ainsi immédiatement sous la forme d'une série de puissances. Quant à celle-ci, on sait d'abord seulement qu'elle est convergente entre certaines limites de la variable; mais par un procédé très-élégant, dû à M. Weierstrass et fondé sur l'emploi du théorème d'addition, on en déduit la convergence absolue de la série pour toute valeur finie de l'argument. Du reste, les fonctions $p(u)$ et $\sigma(u)$ de Weierstrass peuvent s'exprimer directement par les fonctions θ de Jacobi.

D'après ce qui est dit dans la préface, la thèse que nous venons d'analyser ne forme qu'une partie détachée d'un travail plus étendu, dans lequel l'auteur a l'intention de présenter les différentes méthodes par lesquelles on peut entrer en possession des fonctions elliptiques; mais elle constitue en même temps, comme exposition d'une de ces méthodes, celle d'Abel perfectionnée par Weierstrass, une recherche en quelque sorte complète. Par la clarté de l'exposition jointe à la rigueur logique et la subtilité des raisonnements, aussi bien que par le grand intérêt du sujet qui y est traité, elle mérite certainement d'être signalée à l'attention des géomètres.

V. Levänen (S.). — *Integration af några differentialeqvationer af andra ordningen.* 47 p. in-4°. Helsingfors, 1876.

Les équations différentielles, dont il s'agit dans cet opuscule, sont toutes comprises dans la forme générale

$$P\frac{d^2y}{dx^2}+Q\frac{dy}{dx}+R\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=S.$$

L'auteur considère d'abord le cas de $S=0$. En supposant, ce qui est toujours permis, $P=1$, l'équation s'intègre facilement toutes les fois que chacun des coefficients Q et R ne renferme qu'une seule des variables x et y, excepté si Q est fonction de y et R de x. Dans cette dernière hypothèse, l'intégration ne peut s'effectuer que dans des cas particuliers.

Passant ensuite à l'équation générale à quatre termes, l'auteur y applique différentes méthodes pour découvrir des cas dans lesquels elle soit intégrable. Tantôt il introduit, dans l'expression de la dérivée du premier ordre, deux inconnues, dont l'une peut être déterminée arbitrairement; tantôt il cherche à rendre le premier membre différentielle exacte au moyen d'un facteur. Il obtient ainsi, pour déterminer les nouvelles inconnues, une ou plusieurs équations aux dérivées partielles. Mais, comme celles-ci sont, en général, plus compliquées que l'équation donnée, ce n'est que dans des cas très-exceptionnels qu'il parvient à les intégrer effectivement. En supposant $R = 0$, on tombe sur l'équation linéaire du second ordre qui est traitée d'une manière analogue.

Malgré la peine qu'il s'est donnée, l'auteur n'a guère réussi à tirer de ses formules quelque résultat utile. En effet, presque toutes les équations qu'il est parvenu à intégrer, sont tellement simples, que leurs intégrales s'obtiennent soit immédiatement, soit par quelque transformation facile à découvrir.

L. LINDELÖF.

ALBEGGIANI (L.). — GEOMETRIA DELLO SPAZIO IN COORDINATE TETRAEDRICHE SECONDO I CONCETTI DELLE *Vorlesungen über Geometrie* DI A. CLEBSCH. Parte I^a. — Palerme, 1877; 1 vol. in-8°, 166 p.

M. Albeggiani se propose dans cet Ouvrage d'exposer et de coordonner les recherches récentes de Battaglini, Clebsch, Cremona, d'Ovidio, Klein, Plücker, Salmon, etc., sur la Géométrie dans l'espace. La première Partie du Traité qu'il entreprend de publier comprend deux Sections : la première contient cinq Chapitres, dont les quatre premiers traitent des quatre figures fondamentales de l'espace : le premier et le second traitent du point et du plan, le troisième et le quatrième de la droite considérée soit comme axe, soit comme rayon. Le Chapitre V se rapporte aux courbes planes et aux surfaces coniques.

Enfin le Chapitre VI qui, à lui seul, constitue la seconde Partie, est relatif à la théorie des complexes.

LORENZONI (G.) — GIOVANNI SANTINI, LA SUA VITA E LE SUE OPERE. — Padova, tipografia del Seminario, 1877; br. in-8°, 70 p.

Santini, né dans les environs de Capresse, le 30 janvier 1787, et mort à Padoue le 26 juin 1877, était depuis plusieurs années le doyen des astronomes. Entré comme élève à l'Observatoire de Milan, en 1805, il devint, en octobre 1806, astronome adjoint à l'Observatoire de Padoue; puis, en 1813, directeur de ce même établissement, dans lequel il n'a pas cessé de travailler activement jusqu'en 1872. C'est cette longue et fructueuse carrière que son élève dévoué, M. G. Lorenzoni, a cherché à retracer en quelques pages inspirées par le sentiment sincère de la grandeur de l'œuvre de son illustre maître. Santini, parmi de nombreux Mémoires dont M. Lorenzoni a dressé la bibliographie complète, nous laisse une serie de quatre catalogues des plus exacts, que l'on consultera toujours avec fruit, et qui donnent les positions du plus grand nombre des étoiles de 6e, 7e et parfois de 9e grandeur comprises entre 10 degrés de déclinaison nord et 15 degrés de déclinaison sud.

G. R.

DU BOIS-REYMOND (P.). — ZWEI SÄTZE ÜBER GRENZWERTHE VON FUNCTIONEN ZWEIER VERÄNDERLICHEN [1].

Une fonction de deux variables peut tendre vers des valeurs différentes, selon que ces deux variables tendent, simultanément ou successivement, d'après une loi ou une autre loi, vers certaines valeurs numériques. M. Du Bois-Reymond s'est déjà occupé de cette singularité, dont il a développé géométriquement la théorie (*Journal de Crelle*, t. 70, *Bemerkungen über die verschiedenen Werthe*, etc.). Il y revient maintenant et établit rigoureusement et analytiquement les deux théorèmes suivants :

1. Supposons que l'on ait

$$\lim_{x=0}[\lim_{y=0} f(x, y)] = 0;$$

[1] *Mathematische Annalen*, t. XI, p. 145-148.

il existera toujours une fonction $\varphi(x)$ telle que l'on ait aussi

$$\lim_{x=0}\{f[x, \varphi(x)]\} = 0,$$

et en outre

$$\lim_{x=0}\{f[x, \varphi_0(x)]\} = 0,$$

pourvu que, à partir d'une certaine valeur de x, l'inégalité

$$\varphi_0(x) < \varphi(x)$$

ait toujours lieu.

2. Si, réciproquement, pour une fonction $\varphi(x)$ et toutes les fonctions $\varphi_0(x) < \varphi(x)$, on a

$$\lim_{x=0}\{f[x, \varphi(x)]\} = 0,$$

on a aussi

$$\lim_{x=0}\{\lim_{y=0}[f(x, y)]\} = 0.$$

GILBERT (P.). — COURS DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE. *Partie élémentaire.* — Louvain-Paris, 1877. 1 vol. in-8°, 385 p.

« Mon intention », dit M. Gilbert dans sa Préface, « a été, non pas de présenter aux élèves une exposition neuve et originale des doctrines de la Mécanique, mais de condenser ce que j'ai trouvé de meilleur, de plus clair et de plus exact dans les nombreux ouvrages, didactiques ou autres, que j'ai consultés. » La nature du Livre est nettement indiquée par ces trop modestes paroles de son auteur : c'est un Traité élémentaire, très-peu au-dessous de ce qui convient pour la préparation aux examens de licence, à la portée des élèves ingénieurs, se recommandant par les qualités d'un bon livre d'enseignement : la clarté, la précision, le goût dans la mesure de ce qui doit être dit ou laissé de côté.

L'auteur, suivant en cela une opinion partagée par beaucoup de bons esprits, débute par la Cinématique et déduit de la composition des mouvements le théorème fondamental de la Statique sur la composition des forces ; la démonstration du principe des vitesses virtuelles s'appuie aussi sur la Cinématique ; les conditions qu'exige la légitime application de ce principe sont précisées avec plus de soin qu'on ne fait d'habitude ; toutefois la considération des forces

moléculaires, introduite dans la démonstration de ce principe, n'ajoute peut-être ni à la clarté ni à la rigueur.

Dans le troisième Livre se trouvent exposés les principes de la Dynamique. M. Gilbert débute avec raison par l'étude du mouvement d'un point matériel libre ou assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface fixe, et il s'élève progressivement aux théorèmes généraux concernant le mouvement d'un système constitué par un ensemble de points matériels, par un ou plusieurs corps solides, et rejette à la fin le principe de d'Alembert, rendu plus intelligible par ce qui précède, ainsi que les équations de Lagrange. Les trois derniers Chapitres de ce Livre sont consacrés aux percussions et aux mouvements relatifs. Enfin le quatrième Livre contient un exposé succinct des théories relatives à l'Hydraulique.

Un nombre considérable d'exercices, judicieusement choisis et classés, termine chaque Chapitre. La solution de ceux qui présentent quelques difficultés est rapidement exposée.

M. Gilbert a réservé pour un autre volume, destiné à former comme le complément de celui-ci, l'exposition de certaines théories plus élevées, sorte de transition entre la Mécanique et la Physique mathématique. Telles sont la théorie de l'attraction et celle du potentiel qui s'y rattache intimement, les théories dynamiques d'Hamilton et de Jacobi, la solution de diverses questions au moyen des fonctions elliptiques, les principes de la Mécanique moléculaire, de l'élasticité et des mouvements vibratoires, un certain nombre de problèmes se rapportant aux corps semifluides et à l'Hydrodynamique; peut-être enfin la Thermodynamique.

J. T.

LŒWY (M.). — Détermination des ascensions droites des étoiles de culmination lunaire et de longitude, éphémérides de ces étoiles pour 1878 (1). — Gauthier-Villars, 1877; 2 broch. in-4°, 94-38 pages.

Dans les principaux observatoires, on observe constamment, soit pour avoir l'heure, soit pour calculer les corrections instrumentales, une série d'étoiles dont la position se trouve ainsi, au bout de

(1) Extrait du tome Ier des *Annales du Bureau des Longitudes.*

quelques années, déterminée avec une rigueur presque mathématique, et qui prennent alors le nom d'*étoiles fondamentales*. C'est à ces étoiles que l'on rapporte ensuite les positions du Soleil, de la Lune et des planètes. Lorsqu'à la mer ou dans des stations astronomiques temporaires, dont parfois les instruments n'ont pas une grande stabilité, on observe des culminations lunaires afin d'en déduire plus tard les longitudes, on ne peut toujours s'astreindre à n'observer que des étoiles fondamentales, souvent trop éloignées, et l'on compare, en général, la Lune à des étoiles, dites *étoiles de la Lune,* situées à l'est et à l'ouest, sur des parallèles peu différents de notre satellite.

Pour que les longitudes résultant de ces observations présentent une exactitude suffisante, il faut que les étoiles de la Lune soient connues avec une grande précision; malheureusement il n'en est pas toujours ainsi, surtout lorsqu'on a été obligé d'emprunter leurs coordonnées à des catalogues anciens.

Un catalogue exact de cinq ou six cents étoiles, situées dans la zone céleste que paraît parcourir la Lune, était donc impérieusement réclamé par les astronomes et les marins.

C'est ce catalogue que vient de dresser, avec le plus grand soin, M. M. Lœwy, aujourd'hui délégué par le Bureau des Longitudes à la Direction de la *Connaissance des Temps*.

Le catalogue publié par M. Lœwy renferme 521 étoiles, qui comprennent les 210 étoiles fondamentales dont l'Observatoire de Paris donne chaque année la position corrigée dans l'Introduction de ses Mémoires, et 311 autres étoiles qui ont été déterminées, dans des conditions spéciales d'exactitude, au moyen d'observations recueillies à Paris (Montsouris), Marseille, Bregenz et Alger, pendant les opérations faites en 1873-1874, pour la détermination des différences de longitudes de ces villes. Les cercles méridiens en usage dans ces quatre observatoires temporaires offrent, en effet, une exactitude très-grande, et leur position dans une cabane de faible dimension, pourvue de grandes et nombreuses ouvertures et placée dans un terrain bien découvert, est une garantie précieuse contre l'existence de réfractions latérales pouvant conduire à des erreurs systématiques dans les ascensions droites. En outre, les observations ayant été faites avec une même exactitude dans des localités différentes, il est permis de penser que les erreurs de réfraction latérale,

si elles se sont produites, n'ont pas, dans tous les cas, eu le même signe, et peuvent alors être traitées comme des erreurs accidentelles, cas auquel elles disparaissent dans la moyenne.

Le nombre des résultats partiels obtenus par MM. Oppolzer, Perrier, Stephan et Lœwy dans ces opérations de longitude s'est élevé à 5000 environ, auxquels il faut ajouter les observations recueillies depuis à Montsouris par les officiers de Marine attachés à cet établissement. A l'aide de ces nombres, on a pu déterminer, avec une erreur probable qui n'atteint pas $\frac{1}{100}$ de seconde de temps, les ascensions droites de 160 étoiles comprises entre 16 et 4 heures, et, avec une exactitude encore très-grande, quoique un peu inférieure, celles de 151 autres étoiles. En joignant à ces astres les 210 étoiles fondamentales de l'Observatoire de Paris, on arrive au nombre total de 521 étoiles, dont les positions moyennes sont données dans le Mémoire que nous analysons ici.

Pour chacune de ces étoiles, M. Lœwy a, en outre, fait calculer, au moyen des formules données par M. Le Verrier dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*, les positions, de quatre années en quatre années, de 1879 à 1899; pour les 14 circumpolaires non comprises dans les 521 étoiles de longitude, les ascensions droites et les déclinaisons moyennes ont même été déterminées d'année en année, de 1875 à 1896.

Enfin, dans un Appendice de 37 pages, M. Lœwy donne, pour l'année 1878, les ascensions droites, de 10 jours en 10 jours, de celles des étoiles de son catalogue dont les éphémérides ne se trouvent pas déjà dans la *Connaissance des Temps*.

Le catalogue de M. Lœwy et les éphémérides qui le complètent seront bientôt sans doute dans les mains de tous les astronomes, qui seront heureux d'y trouver les positions précises et les éphémérides d'un grand nombre d'étoiles dont les coordonnées ne se rencontrent ni dans le *Nautical Almanac*, ni dans le *Jahrbuch*, ni dans la *Connaissance des Temps*. G. R.

LŒWY (M.). — Détermination de la latitude d'un lieu par l'observation d'une hauteur de l'étoile polaire. — Gauthier-Villars, 1877; broch. in-4° de 12 pages.

La formule

$$\sin h = \cos p \sin \varphi + \sin p \cos \varphi \cos S,$$

où h est la hauteur observée de l'étoile de distance polaire p et d'angle horaire S, donne, par des transformations faciles et connues, la latitude φ du point d'observation; mais la formule usuelle ne se réduit pas facilement en tables ayant pour argument le temps vrai T qui est, en général, donné par les chronomètres et la distance polaire apparente moyenne p' de α Petite Ourse.

Par des transformations algébriques que M. Lœwy expose rapidement dans son Mémoire, il arrive à mettre la latitude cherchée φ sous la forme

$$\varphi = h - p' \cos S - (p - p') \cos S + \frac{1}{2} \operatorname{tang} h \sin^2 S . p^2 \sin 1'',$$

et l'on a

$$S = T + A - \alpha,$$

A étant l'ascension droite vraie du Soleil, α l'ascension droite de la Polaire.

Deux tables auxiliaires, calculées par M. Lœwy, donnent pour chaque jour de l'année la valeur de $A - \alpha$ et la correction à ajouter à cette quantité pour l'heure de l'observation.

Trois autres tables ayant pour argument S donnent ensuite, par de simples parties proportionnelles, les trois corrections à faire à h pour obtenir φ.

Ajoutons que, pour les observations faites en mer, il suffit de tenir compte du premier terme $p' \cos S$, et que le calcul est alors d'une rapidité telle, que les marins auront tout avantage à employer cette nouvelle méthode. G. R.

LŒWY (M.). — TABLES GÉNÉRALES DE RÉDUCTION DES OBSERVATIONS MÉRIDIENNES. — Gauthier-Villars, 1877; 1 broch. in-4° de 36 p.

La réduction d'une suite nombreuse d'observations méridiennes par la formule classique de Bessel

$$A = t + C_p + m + (c - \varkappa) + n \tang \delta + (c - \varkappa)(\text{séc}\,\delta - 1)$$

exige un temps considérable, que M. Lœwy s'est proposé de réduire au minimum par la publication de tables auxiliaires.

Une première table à double entrée donne, pour les valeurs de δ comprises entre zéro et 50 degrés, et pour des valeurs de n allant de 0,01 à 1,00, la valeur, au millième de seconde, du produit $n \tang \delta$.

Une seconde table renferme, pour des valeurs de $(c - \varkappa)$ variant entre 0,00 et 1,00 et des valeurs de δ comprises entre zéro et 44 degrés, la valeur du produit $(c - \varkappa)(\text{séc}\,\delta - 1)$.

Des tables auxiliaires ont aussi été dressées par M. Lœwy pour aider au calcul de la déclinaison n de l'extrémité ouest de l'axe de rotation de la lunette; cette quantité est, en effet, donnée, avec une approximation supérieure à $\frac{1}{100}$ de seconde, par la formule

$$n = \frac{(C_p)'' - (C_p)'}{\tang \delta''} - (c - \varkappa) + \frac{c - \varkappa}{\tang \delta''} + n \frac{\tang \delta'}{\tang \delta''},$$

où $(C_p)''$ et $(C_p)'$ désignent les corrections de pendules obtenues directement et sans correction aucune par une polaire de déclinaison δ'' et une étoile équatoriale de déclinaison δ'.

Le premier et le troisième terme de cette dernière expression se réduisent immédiatement en tables ayant pour argument les différences $(C_p)'' - (C_p)'$ ou $(c - \varkappa)$ et $\tang \delta''$; ces tables sont données par M. Lœwy pour les circumpolaires dont on fait habituellement usage.

Enfin M. Lœwy a également préparé des tables pour le calcul du dernier terme correctif $n \frac{\tang \delta}{\tang \delta''}$, toujours très-petit; des tables spéciales à chaque valeur de δ'' comprise entre 81 et 90 degrés, et ayant pour arguments $\tang \delta$ et la valeur approximative de n, que l'on a toujours le droit d'employer, se trouvent, en effet, dans le Recueil que nous analysons.

Ce même Mémoire contient enfin des tables, pour les onze années comprises entre 1877 et 1887, des deux termes

$$(n + c - \varkappa)\tang\delta, \quad (c - \varkappa)(\text{séc}\,\delta - \tang\delta),$$

dans lesquels se décompose la formule de réduction au méridien des observations de circumpolaires.

En résumé, le Recueil de tables publié aujourd'hui par M. Lœwy aura le double résultat d'abréger dans une très-large mesure le travail, toujours considérable, de la réduction d'une longue série d'observations méridiennes, et d'éviter des erreurs numériques faciles à commettre dans des calculs qui ne renferment en eux-mêmes aucune vérification. G. R.

KRAUSE (M.). — Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen (¹).

A côté de tant d'autres équations, et notamment des équations modulaires, il y a lieu, dans la théorie des fonctions elliptiques, de prêter attention à celles qui relient le produit du module primitif et du module complémentaire au produit du module transformé et du module complémentaire à ce dernier. La théorie de ces équations, dans le cas d'un degré impair n de transformations, n'admettant pas de diviseur carré, a été établie par MM. Hermite, Joubert, Königsberger; toutefois on s'est borné à étudier les équations, sans s'occuper de leurs discriminants. C'est cette lacune que M. Krause s'est efforcé de combler. Il donne la forme des discriminants, expose une méthode pour la détermination des racines distinctes, et finalement, relativement au problème général du développement des racines, fixe le degré de multiplicité de chacune d'elles. Comme exemples, il étudie, à ce point de vue, les transformations jusqu'au trentième ordre.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XII, p. 1-22.

KRAUSE (M.). — Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie (1).

La théorie des équations modulaires des fonctions elliptiques, fondée par Jacobi, dans le cas où le degré de transformation est impair, a été l'objet d'une suite d'importants travaux : elle a, en quelque façon, trouvé sa conclusion dans un récent travail du P. Joubert (*Sur les équations qui se rencontrent*, etc. Paris; 1876). Toutefois quelques recherches restaient à faire dans le cas d'une transformation d'ordre pair : c'est l'objet du travail de M. Krause.

Il démontre d'abord l'existence d'une équation algébrique entre les quantités qu'on désigne, suivant des notations connues, par $u^2 = \varphi_1^2(t)$ et $v_1^2 = \psi^2\left(\frac{\delta t - 8\xi}{2^\alpha \delta_1}\right)$, $2^\alpha \delta\delta_1$ étant égal au degré m de la transformation, δ étant un diviseur impair quelconque de m, et ξ un quelconque des nombres $0, \pm 1, \pm 2, \ldots + \frac{m}{8}$, n'ayant point de diviseur commun avec δ et δ_1. M. Krause se borne au cas important ou α est égal ou supérieur à 3. En second lieu, il établit les propriétés essentielles de ces équations, montre qu'on peut en déduire, et comment on peut le faire, une suite d'autres équations modulaires. En troisième lieu, il en conclut la solution du problème général du développement des racines. Dans le quatrième paragraphe, ces équations sont données pour les nombres de transformation 8, 16, 24, 32, 40, ... Enfin, dans le cinquième paragraphe, l'auteur applique à la théorie des nombres les théorèmes qu'il a obtenus précédemment. Cette application consiste dans la démonstration d'une partie des formules sommatoires que M. Kronecker a données, dans le tome 57 du *Journal de Crelle*, pour les nombres de formes à déterminant négatif.

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. XII, p. 419-434.

VILLARCEAU (Y.) ET DE MAGNAC (A.). — NOUVELLE NAVIGATION ASTRONOMIQUE (¹).

On a beaucoup critiqué le titre de cet Ouvrage, mais il ne s'agit après tout que d'une querelle de mots. Les auteurs appellent *ancienne* la navigation dans laquelle on ne peut pas compter sur les indications des chronomètres que l'on possède, et navigation *nouvelle* celle où l'on peut se fier aux chronomètres : c'est une définition. Dans la navigation ancienne, on détermine la latitude et l'heure du bord par des observations de hauteurs, et l'heure du premier méridien par des observations de distances lunaires, et l'on sait que ces dernières observations comportent une précision bien moindre que les premières. Dans la navigation nouvelle, l'heure du premier méridien étant réputée connue, on n'a plus à observer que des hauteurs. Quant à la valeur pratique des nouvelles méthodes, nous sommes incompétent pour l'apprécier; nous laissons ce soin aux marins, en nous bornant à remarquer que l'un des auteurs, officier de marine des plus distingués, possède justement la compétence qui nous manque; nous voulons seulement appeler l'attention des lecteurs de ce *Bulletin* sur le côté mathématique du problème.

La remarque très-simple, qui est le point de départ des nouvelles méthodes, paraît avoir été faite pour la première fois, il y a quarante ans environ, par le capitaine américain Summer. L'heure du premier méridien étant connue, soit A un astre quelconque dont les coordonnées astronomiques sont fournies par les éphémérides; on en déduit immédiatement les coordonnées géographiques du lieu a qui a son zénith en A. Si l'astre A était observé précisément au zénith, le navigateur connaîtrait immédiatement sa position; ce serait un cas très-particulier. En général, l'astre A n'est pas observé au zénith, mais alors soit Z sa distance zénithale : on voit aisément que le navire se trouve sur un cercle du globe terrestre décrit du point a comme pôle avec la distance polaire Z. Ce cercle est ce qu'on appelle un *cercle de hauteur*. Un second cercle de hauteur est donné par l'observation d'un autre astre A′, et l'une

(¹) Paris, Gauthier-Villars, 1877.

des intersections de ces deux cercles est la position du navire. On comprend qu'il est toujours facile de lever toute ambiguïté, soit par la considération des azimuts, soit par une troisième observation.

Tel est le principe de la nouvelle navigation. Pour l'appliquer, M. Villarceau, auteur de la partie théorique de l'Ouvrage, distingue deux cas principaux, selon que l'on est censé n'avoir aucune idée approximative sur la position du navire, ou que l'on possède, au contraire, une première approximation obtenue par l'*estime*.

Dans le premier cas, qui est intéressant au point de vue théorique, mais qui, dans la pratique, ne peut se présenter que fort rarement, il s'agit de déterminer les points d'intersection de deux cercles tracés sur une sphère, connaissant les coordonnées de leurs pôles et leurs distances polaires. Le calcul analytique est facile, mais le calcul numérique est beaucoup trop long pour la pratique courante; c'est pourquoi M. Villarceau propose de construire par points, sur les cartes marines, les transformées des cercles de hauteur. On obtient ainsi des courbes, qu'on appelle *courbes de hauteur*, dont l'équation générale est fort simple ([1]), quand on emploie les fonctions hyperboliques. Ces courbes présentent trois formes différentes, selon que le pôle géographique se trouve à l'intérieur du cercle de hauteur, à l'extérieur de ce cercle, ou sur sa circonférence. L'auteur discute complétement le problème; il montre comment on peut remplacer les courbes de hauteur par leurs cercles osculateurs, dans le voisinage du point d'intersection cherché, et il détermine une limite de l'erreur commise par cette substitution.

Dans le cas qui est le plus ordinaire, on suppose que l'on connaît par l'*estime* une position approchée du navire. On peut alors substituer à chaque cercle de hauteur une droite qui lui est tangente, et qu'on appelle *droite de hauteur;* l'intersection de deux droites de hauteur détermine la position vraie. Mais habituellement on aura plus de deux observations, et par conséquent plus de deux droites

---

([1]) Voici cette équation, avec les notations de M. Hoüel,

$$\operatorname{Ch}\frac{y}{R}\cos z - \operatorname{Sh}\frac{y}{R}\sin D = \cos D\cos\frac{x-x_0}{R}.$$

L'axe des y est parallèle aux méridiens et l'axe des x à l'équateur; R est le rayon de la carte; D est la déclinaison de l'astre observé, et z sa distance zénithale.

de hauteur, qui n'iront pas, en général, passer par un même point, et il importe de savoir déterminer le résultat le plus probable. M. Villarceau donne pour cet objet une méthode ingénieuse, que l'on peut considérer comme une interprétation géométrique de la méthode des moindres carrés, et qui le conduit à divers théorèmes nouveaux et intéressants. La partie théorique de l'Ouvrage se termine d'ailleurs par des Notes étendues où toutes les questions d'approximation sont discutées avec le savoir profond et le soin minutieux que l'on est habitué de trouver dans les travaux de l'éminent astronome.

La partie pratique est due à M. le lieutenant de vaisseau Aved de Magnac. Elle contient d'abord un résumé de la Théorie, sous forme élémentaire. Ce travail était nécessaire pour populariser les nouvelles méthodes parmi les marins, à qui les exigences de leur profession permettent rarement de cultiver les Mathématiques élevées : M. de Magnac l'a exécuté avec autant de clarté que d'élégance. Mais, pour un mathématicien, le Chapitre le plus interressant est celui qui est consacré à l'étude des chronomètres. En suivant la voie ouverte par M. Lieussou, ingénieur hydrographe, et en s'inspirant des idées émises par M. Villarceau dans les *Annales de l'Observatoire* (t. VII), M. de Magnac établit que, dans l'état normal, les variations des chronomètres ne sont fonctions que de la température et du temps. C'est ce qui résulte de toutes les études exécutées, soit à bord des navires français par M. de Magnac lui-même et par d'autres officiers, soit à l'Observatoire de Kiel, de sorte que la marche d'un chronomètre, lorsqu'elle ne subit pas de brusques solutions de continuité, peut être représentée par la formule de Taylor, limitée aux termes du second ordre,

$$m = a + bt + c\theta + dt^2 + et\theta + f\theta^2, \tag{1}$$

où t et θ désignent le temps et la température comptés à partir d'origines prises arbitrairement dans les limites des observations, et où a, b, ..., f sont des constantes, que l'on détermine au moyen d'un grand nombre d'équations de la forme (1) entre les quantités observées m, t et θ. On peut d'ailleurs remplacer la résolution de ces équations par une construction graphique extrêmement simple, qui donne une précision très-suffisante pour les atterrissages.

Ch. S.

TOEPLITZ (E.). — UEBER EIN FLÄCHENNETZ ZWEITER ORDNUNG [1].

L'auteur s'est proposé de démontrer directement, par voie algébrique, un certain nombre de théorèmes énoncés par M. Frahm [2] (*Math. Ann.*, t. VII, p. 635-638) sur le réseau de surfaces (*Flächennetz*) du second ordre. Ces théorèmes rectifiaient une erreur commise par M. Salmon dans sa Géométrie de l'espace. M. Töplitz, en les établissant, montre leur connexion.

Dans l'introduction, il résout un problème touché par M. P. Serret dans sa *Géomérie de direction :* « Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que trois points donnés et trois plans correspondants soient pôles et plans polaires par rapport à une même surface du second ordre ? » Cette condition, ainsi que le faisceau de surfaces (*Flächenbüschel*) du second ordre qui y entrent, est donnée sous forme algébrique.

Le problème suivant est l'objet essentiel du Mémoire : « Sous quelle condition trois surfaces données du deuxième ordre peuvent-elles être regardées comme les surfaces polaires de trois points par rapport à une surface du troisième ordre ? Quelle est cette surface ? Où les pôles sont-ils situés ? » On trouve comme condition nécessaire pour l'existence de la surface du troisième ordre, condition à laquelle doivent satisfaire les trois surfaces du second ordre, un déterminant symétrique gauche d'ordre pair égalé à zéro. L'auteur détermine la racine carrée de ce déterminant, qui, comme on sait, est rationnelle. Cette condition étant supposée remplie, on obtient pour chacun des trois pôles une infinité simple de points situés sur une droite; ces points sur les trois droites se correspondent homographiquement : l'auteur détermine la position de ces droites par rapport aux trois surfaces du second ordre ; il est amené ensuite à considérer la courbe gauche du troisième ordre qui est l'arête de rebroussement de la développable du quatrième ordre enveloppée par un plan passant par trois pôles correspondants, courbe qui, en vertu de la condition mentionnée, est en relation covariante avec le réseau des trois surfaces du second ordre.

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. XI, p. 434-463.

(2) Ces propositions, que M. Frahm a publiées seulement en 1874, avaient déjà été données par M. Darboux en 1870. (Voir *Bulletin*, t. I, 1re série, p. 349-358.)

Pour démontrer que la condition trouvée est suffisante, on remarque qu'elle conduit à l'équation algébrique d'une surface du troisième ordre satisfaisant à la question; de cette surface on déduit une double infinité de surfaces ayant la même propriété. On obtient une autre solution du problème par la résolution d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, système qui s'intègre aisément par la méthode de MM. Mayer et Lie.

Quant aux combinants fondamentaux du réseau de surfaces du second ordre, l'auteur met nettement en évidence leur connexion avec le combinant qui constitue le premier membre de l'équation de condition. Celui-ci se présente comme une forme bilinéaire, facile à former, des coefficients des surfaces du second ordre et des coefficients du complexe de droites rencontrées par les surfaces du réseau en des points formant une involution. M. Rosanes a pris pour point de départ de deux Mémoires (*Math. Ann.*, t. VI, p. 268-312; *Journal de Crelle*, t. 76) un invariant de deux formes avec des variables contragrédientes qui est tout à fait analogue à celui dont s'occupe M. Töplitz.

Enfin cette condition est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces du réseau aient en commun un pentaèdre et par suite une infinité; en d'autres termes, pour que le premier membre de l'équation du réseau de surfaces du second ordre puisse être mis, d'une infinité de façons, sous la forme d'une somme de cinq carrés. Cette proposition se relie étroitement à un théorème intéressant de MM. Sylvester et Clebsch sur le pentaèdre d'une forme cubique quaternaire; mais M. Töplitz ne se sert point de ce théorème dont, au contraire, sa méthode fournit une démonstration nouvelle.

Tout ce travail est fait d'après les principes et les procédés de l'Algèbre moderne.

DU BOIS-REYMOND (P.). — UEBER DIE PARADOXEN DES INFINITÄRCALCULS.

M. Du Bois-Reymond s'est occupé du calcul des infinis relatifs dans un grand nombre de Mémoires insérés dans les *Annali di Matematica*, le *Journal de Crelle* et les *Mathematische An-*

nalen. Le travail dont il est ici question a un caractère en quelque sorte philosophique; voici le résultat essentiel de la première partie : Étant donné un nombre incommensurable A, on peut en approcher par une suite de nombres commensurables a_1, a_2, ..., a_p, ..., tels que la différence $A - a_p$ puisse être, en prenant p assez grand, rendue plus petite que toute quantité donnée, en sorte qu'il n'existe aucun nombre a qui approche plus de A qu'un terme suffisamment éloigné dans la série a_1, a_2, ..., a_p, ... Les choses ne se passent pas de la même façon pour une fonction $\Phi(x)$ qui grandit indéfiniment; on ne peut pas en approcher par une suite de fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_p(x)$, ..., qui jouent le même rôle vis-à-vis de $\Phi(x)$ que les nombres a_1, a_2, ... vis-à-vis de A; il existera toujours une fonction $\varphi(x)$ telle que, si loin qu'on s'avance dans la série $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., on n'y puisse trouver aucune fonction dont l'infini soit situé entre celui de $\Phi(x)$ et celui de $\varphi(x)$.

La seconde Partie du Mémoire est particulièrement consacrée à l'intégrale $\int_0^\alpha f(\alpha)\,d\alpha$, la fonction $f(\alpha)$ devenant infinie sans maxima ni minima pour $\alpha = 0$. L'auteur démontre qu'il est impossible de trouver aucune fonction qui marque la limite de cette intégrale.

FRISCHAUF (Dr J.), Professor an der Universität zu Graz. — ELEMENTE DER GEOMETRIE. 2. Auflage. — Leipzig, Teubner, 1877. 1 vol. in-8°, VIII-164 pages.

Le plan de cet Ouvrage diffère de celui qu'ont adopté jusqu'ici la plupart des auteurs. M. Frischauf a renoncé à la division habituelle des *Éléments de Géométrie* en Planimétrie, Stéréométrie et Trigonométrie. Dans le premier des cinq Livres qui composent son Traité, il prend pour point de départ la notion de la distance invariable de deux points, au moyen de laquelle, à l'exemple de Lobatchefsky, il définit d'abord la sphère, puis le cercle, intersection de deux sphères égales non concentriques. Il établit ensuite l'existence du plan, lieu des cercles intersections de deux sphères égales, de centres fixes et de rayon variable; puis la ligne droite, lieu des points du plan qui restent immobiles dans la rotation de la figure autour des

deux points qui partagent un même cercle en deux parties égales : de là il déduit les propriétés fondamentales du plan et de la ligne droite.

Il expose ensuite l'usage des signes + et — pour distinguer les directions opposées suivant lesquelles un point peut parcourir une droite, ou un rayon tourner dans un plan autour d'un point fixe.

Une parallèle est définie comme la position limite d'une droite tournant autour d'un point fixe, et rencontrant une droite fixe à une distance infiniment grande. L'axiome de la théorie des parallèles est admis comme conduisant à des résultats en accord avec l'expérience.

Le reste du Livre I comprend les matières suivantes : Définition de l'angle dièdre; parallélisme et perpendicularité des droites et des plans; droites concourantes; projections.

Le Livre II est consacré à l'étude des figures les plus simples, au point de vue de l'égalité par superposition, de la symétrie et de l'équivalence, en commençant par le triangle, le quadrilatère, le cercle, les polyèdres (pyramides, prismes), puis terminant par le cône, le cylindre et la sphère. Toutes les propositions vraiment essentielles, relatives à ces figures, sont démontrées dans une cinquantaine de pages.

Le Livre III traite de la similitude des figures : les figures semblables sont définies au moyen du centre de similitude. Puissance d'un point par rapport à un cercle ou à une sphère, centre de similitude des cercles et des sphères. Pôles et polaires. Contacts. Projection stéréographique.

La Trigonométrie, qui fait le sujet du quatrième Livre, est divisée en Goniométrie, Trigonométrie plane et Trigonométrie sphérique. Les fonctions trigonométriques sont définies par les coordonnées rectangulaires d'un cercle de rayon égal à l'unité.

Le cinquième et dernier Livre contient la Géométrie métrique, et donne successivement les mesures des aires et des volumes des polygones, des polyèdres, du cercle, du cylindre et du cône.

L'Ouvrage est terminé par un Appendice, où l'auteur établit d'une manière élémentaire les développements des fonctions trigonométriques en séries.

On voit, par cet aperçu rapide, que, dans son mince volume, M. Frischauf a su condenser autant de matières qu'en contiennent

souvent les Traités les plus volumineux, rédigés sous la forme antique que seuls les auteurs de livres sur la Géométrie élémentaire ont tenu à conserver depuis Euclide, quand toutes les autres sciences l'ont abandonnée, forme plus propre à soulager la mémoire qu'à éclairer l'intelligence, et dont nous félicitons M. Frischauf de s'être affranchi. Partout où il lui a été possible de le faire sans s'écarter de son cadre élémentaire, l'auteur a introduit les méthodes de la Géométrie nouvelle, à l'étude de laquelle son Livre offre une excellente préparation. J. H.

MÉLANGES.

LE VERRIER ET SON ŒUVRE;

Par M. GAILLOT.

Prononcer ou écrire le nom de Le Verrier, c'est évoquer immédiatement, dans l'esprit de l'auditeur ou du lecteur, le souvenir de la plus étonnante découverte dont l'histoire de la Science fasse mention, celle de la planète Neptune. Tout le monde connaît le fait, devenu légendaire; mais il est peu de personnes qui se rendent un compte exact des circonstances qui l'ont amené, des conditions dans lesquelles il s'est accompli; moins encore peut-être qui aient une idée juste du caractère scientifique de l'homme et de la puissance réelle de son génie.

Sans parler de ceux qui, peu familiarisés avec la connaissance des faits astronomiques, croient à la rencontre fortuite de la planète dans le champ d'une lunette, il en est beaucoup, même parmi les gens relativement instruits, qui en attribuent la découverte à une espèce d'intuition, à un éclair de génie venant subitement illuminer l'esprit de son auteur et lui dévoiler les secrets de l'espace. Ceux-là sans doute ont de l'illustre astronome une idée plus haute et plus proche de la vérité; mais, ne connaissant guère de sa carrière scientifique que le résultat brillant de ses premiers travaux, ils soupçonnent à peine l'existence des recherches difficiles et délicates par lesquelles il s'est à l'avance mis à la hauteur de son succès, si éclatant qu'il soit; ils ne connaissent guère plus l'œuvre

grandiose qui l'impose à l'admiration de la postérité, autant et plus peut-être que la découverte de Neptune.

Il existe en effet un monument scientifique à l'édification duquel Le Verrier a consacré toute sa vie, et qui, le plaçant sans conteste au premier rang des maîtres de l'Astronomie, portera, à travers les âges, le témoignage de son énergie scientifique, de la justesse et de la hauteur de ses conceptions, de sa connaissance profonde des questions astronomiques. Ce monument, produit de quarante années d'un travail acharné mis au service d'une intelligence hors ligne, et dont chaque partie prise isolément suffirait à établir la réputation d'un astronome, c'est la *Théorie analytique du mouvement de toutes les planètes principales du système solaire*.

Intimement mêlé à l'exécution de cet immense travail, chargé par l'auteur, mon illustre maître, d'en assurer le complet achèvement, j'ai été sollicité d'en écrire l'histoire. J'ai accepté, après quelque hésitation, le rôle difficile qui m'était imposé, convaincu que si je restais inférieur à ma mission, la gloire de Le Verrier était trop bien établie pour qu'elle pût en recevoir aucune atteinte.

Je n'ai point l'intention d'énumérer ici et d'étudier en détail les travaux de Le Verrier : je ne pourrais, pour être vrai, que copier la si remarquable monographie que M. Tisserand en a faite dans la *Revue scientifique*. J'essayerai seulement de donner une vue d'ensemble de l'œuvre principale, m'efforçant d'en mettre en lumière les parties les plus saillantes.

Laplace, dans sa *Mécanique céleste*, avait développé analytiquement les conséquences du principe de la gravitation universelle, découvert par Newton, et donné les moyens de déterminer le mouvement des astres en tenant compte de leurs actions mutuelles. Des Tables, fondées sur le même principe, avaient été construites, qui devaient prévoir et régler le mouvement des diverses planètes. Delambre, Carlini et Bessel avaient étudié le mouvement du Soleil; Lindenau celui de Mercure, de Vénus et de Mars; et enfin Bouvard, appliquant les formules de Laplace, avait calculé les Tables de Jupiter, de Saturne et d'Uranus.

La comparaison des observations avec les positions prévues par ces diverses Tables paraissait confirmer à la fois la justesse de la

conception de Newton et des conséquences que les géomètres, Laplace à leur tête, en avaient déduites. Uranus seul semblait se dérober à la loi générale, les irrégularités apparentes de sa marche étant trop considérables pour qu'il fût possible de les attribuer aux incertitudes des observations.

Le Verrier, dont les puissantes aptitudes mathématiques s'étaient développées par la lecture et la méditation de Laplace, et fortifiées par l'examen des points les plus délicats de l'Astronomie, se décide à aborder l'étude de la difficile question qui préoccupait alors les géomètres et les astronomes.

Il vérifie d'abord les calculs de Bouvard, les rectifie, et finalement confirme l'existence réelle des irrégularités signalées dans le mouvement d'Uranus.

Convaincu de l'exactitude absolue de la théorie newtonienne, il n'hésite pas à attribuer à l'action d'un corps inconnu ces perturbations inexpliquées, et par la seule force de l'Analyse mathématique il resserre tellement, dans l'immensité de l'espace, les limites du lieu où se cache la planète perturbatrice, qu'aussitôt signalée elle est découverte.

Presque en même temps, un savant anglais, M. Adams, partant des mêmes idées que Le Verrier, arrivait à un résultat semblable. Des discussions plus passionnées qu'impartiales se sont élevées autrefois au sujet de la priorité de la découverte et de l'indépendance relative des recherches; aujourd'hui la question est résolue : à chacun revient le mérite intégral de son travail. Nous pouvons ajouter que la mutuelle estime dont se sont toujours honorés les deux illustres savants prouve qu'eux du moins savaient se rendre justice.

Mais c'est à Le Verrier seul qu'est due la découverte de la planète : c'est d'après ses indications qu'elle a été cherchée et vue, pour la première fois, à Berlin, par M. Galle, le 23 septembre 1846. Il y a là un fait établi d'une manière absolue et sans aucune contestation possible.

La découverte de Neptune venait de fournir une preuve éclatante de l'exactitude du principe newtonien de la gravitation universelle. Pourtant il pouvait encore subsister, pour les esprits réellement mathématiques, certains doutes qu'il importait d'éclaircir.

Si la grandeur relative des écarts entre la théorie et l'observation d'Uranus avait appelé spécialement l'attention des astronomes et des géomètres, il existait en réalité, pour toutes les planètes, des discordances qui, pour être bien plus faibles, n'en paraissaient pas moins dépasser les limites des incertitudes admissibles dans les observations.

Dès 1830, Bessel, préoccupé de cette question, signalait l'urgence de la résoudre, énumérant, dans la préface des *Tabulæ Regiomontanæ,* les causes probables des discordances signalées.

« Elles doivent être attribuées, » dit-il, « ou à la manière de réduire les observations, ou aux Tables qui, par suite d'erreurs soit dans la valeur des éléments ou des masses troublantes, soit dans les formules qui servent au calcul des perturbations, ne sont peut-être pas suffisamment précises, ou bien *elles signifient qu'il existe des causes obscures, troublant le mouvement, et que la théorie n'a pu encore dévoiler.* »

La méditation de ce passage de Bessel paraît avoir exercé une influence décisive sur l'esprit de Le Verrier, et tracé la voie scientifique dans laquelle il allait définitivement s'engager.

Examiner scrupuleusement la réduction des observations [1]; déterminer aussi rigoureusement qu'il est nécessaire la valeur des masses perturbatrices et des éléments elliptiques des orbites planétaires; reprendre les formules de la *Mécanique céleste,* en pousser le développement aux dernières limites qu'il est matériellement possible d'atteindre; et, si cela ne suffit pas pour arriver à un accord satisfaisant entre la théorie et l'observation, rechercher *les causes obscures, troublant le mouvement, et que la théorie n'a pu encore dévoiler,* tel est le résumé du travail réel-

---

[1] La source principale à laquelle a pu puiser Le Verrier, pour la comparaison de ses Tables avec l'observation, c'est la publication, due à M. Airy, des observations du Soleil et des planètes faites à Greenwich depuis Bradley jusqu'en 1830 et depuis 1836 jusqu'à nos jours.

Peu de temps avant sa mort, il en exprimait toute sa gratitude à son illustre collègue, lui affirmant l'impossibilité où il se serait trouvé de terminer sa tâche, si, manquant de ce secours, il eût été forcé de refaire toutes les réductions.

Un autre savant anglais auquel Le Verrier aimait à témoigner sa reconnaissance, c'est M. Hind, qui a toujours montré le plus grand empressement à mettre ses travaux en lumière, en leur empruntant, dès leur apparition, les éléments nécessaires aux calculs du *Nautical Almanac,* dont ce savant est l'éminent directeur.

lement gigantesque que s'est imposé celui que l'illustre Astronome Royal d'Angleterre, M. Airy, a si justement appelé le *scientific giant* de notre époque.

Toutes les parties de cet immense travail ont été publiées dans les *Annales de l'Observatoire de Paris :* l'ordre de leur publication sera celui que nous suivrons dans leur examen; s'il n'est pas en tout point conforme à l'ordre chronologique de leur commencement d'exécution, il l'est, et c'est là l'essentiel, à celui de leur dernière révision.

Les premiers travaux sont purement théoriques. Le calcul de toutes les perturbations planétaires dépend d'une expression, unique dans la forme, variable seulement par la grandeur des éléments qu'elle comprend. Cette expression, que l'on appelle la *fonction perturbatrice,* ne peut se soumettre aux nécessités de l'Analyse qu'autant qu'elle a été développée en séries convergentes auxquelles soient applicables les procédés connus de l'intégration.

Après un admirable exposé de toutes les connaissances indispensables, ou simplement utiles à ceux qui veulent aborder l'étude de l'Astronomie mathématique, Le Verrier donne le développement analytique complet de la fonction perturbatrice, le poussant jusqu'aux termes du *septième* degré relativement aux excentricités et aux inclinaisons mutuelles des orbites, et jusqu'aux termes du *second ordre,* relativement aux masses.

Ce développement comprend deux espèces de termes, donnant, après l'intégration, les uns des expressions qui vont toujours grandissant avec le temps; les autres des expressions périodiques, reprenant les mêmes valeurs à des intervalles égaux; d'où la division des perturbations en *inégalités séculaires* ([1]) et en *inégalités périodiques.*

Dans un Mémoire extrêmement remarquable, Le Verrier étudie les *inégalités séculaires,* et, non content d'en donner l'expression pour toutes les planètes, il examine les limites qu'elles peuvent atteindre. Cette question des limites, qui n'est autre que celle de la

---

([1]) La forme sous laquelle se présentent les inégalités séculaires est due aux procédés employés dans le développement de la *fonction perturbatrice.* En réalité ce sont des inégalités périodiques qui dépendent d'angles variant avec une extrême lenteur.

stabilité de notre système planétaire, il la résout aussi complétement qu'il est nécessaire pour démontrer que, sous l'action des causes actuellement connues, les orbites des planètes principales ne pourront jamais se déformer d'une manière notable, en tout cas se rapprocher jamais assez pour qu'il en puisse résulter quelque bouleversement du monde solaire.

Ce travail, si important qu'il soit, n'est qu'une préparation de l'œuvre projetée : il en est de même de celui qui va suivre.

Le mouvement des planètes ne peut être déterminé pratiquement qu'en comparant leurs positions, rapidement variables, à celles d'un certain nombre de points de repère. La nature ne pouvant fournir à l'observateur aucun point dont la situation soit absolument invariable, on a choisi pour cet objet des étoiles dites *fixes,* quoique leur position change en réalité, mais d'une manière extrêmement lente.

Le Verrier détermine avec le plus grand soin les places successivement occupées dans le ciel par chacune de ces étoiles, tenant compte des changements apparents produits par le déplacement de la Terre et par les variations des éléments de son orbite, ainsi que du mouvement propre à chaque étoile, ce mouvement étant déduit d'observations faites à des époques suffisamment espacées.

Tous ses préparatifs sont faits; l'heure est venue. Plein d'une foi invincible dans l'infaillibilité des principes qu'il va appliquer, soutenu par le légitime orgueil d'un premier succès, justement confiant dans la puissance de son génie, il se jette audacieusement dans la lutte acharnée qu'il est résolu d'entreprendre contre chacun des mondes qui gravitent autour de notre Soleil. Il faudra que, l'un après l'autre, ils soumettent leurs mouvements aux lois qu'il va leur imposer, ou, s'ils résistent, qu'ils lui révèlent les causes cachées de leurs écarts.

Mais, avant tout, il lui importe de connaître parfaitement la place qu'occupe, dans l'espace, l'observateur auquel est dévolu le soin de vérifier son travail : la situation de cet observateur est en effet un des éléments nécessaires à la bonne réduction des observations ; c'est donc par la théorie du mouvement de la Terre que va débuter Le Verrier. Cette théorie, qui n'est autre que celle du mouvement apparent du Soleil, lui montre déjà, comparée à l'ob-

servation, que la masse attribuée à la Terre est trop faible, qu'il en est de même de la parallaxe solaire, c'est-à-dire de l'angle sous lequel le rayon terrestre est vu du centre du Soleil. Elle lui apprend encore que la masse adoptée pour la planète Mars doit être sensiblement diminuée.

La théorie du mouvement de Mercure vient ensuite : un premier travail, fait en 1843, est complétement revu et mis en harmonie avec les données nouvelles dont dispose Le Verrier. Cette fois il acquiert la certitude que l'accord entre la théorie et l'observation ne sera obtenu qu'en attribuant au mouvement du périhélie une accélération dont la cause ne peut, il le prouve, être attribuée à l'influence d'aucune des planètes connues. Alors il affirme hardiment la présence d'un ou de plusieurs corps de faible masse, circulant entre Mercure et le Soleil, et dont l'action produit l'accélération constatée.

Si cette affirmation, dont l'exactitude n'est plus guère mise en doute par personne, n'a pu encore être vérifiée, on peut admettre que cela tient à la difficulté d'observer de très-petits astres constamment noyés dans les rayons du Soleil. Et d'ailleurs, des observations de corpuscules passant sur le disque solaire ont souvent été faites depuis moins d'un siècle. Sans ajouter une foi absolue à l'exactitude de chacune d'elles, il est difficile d'admettre qu'il n'y en ait pas un certain nombre de réelles. A la fin de sa carrière, Le Verrier arrivait à rattacher cinq de ces observations, et même six, selon une remarque de M. Hind, à une orbite commune, satisfaisant aux conditions imposées par les lois du mouvement de Mercure.

La théorie du mouvement de Vénus ne présente aucune difficulté : la comparaison des positions calculées aux positions observées confirme les premiers résultats obtenus, relativement à l'existence probable de petits corps circulant entre Mercure et le Soleil, relativement aussi à l'augmentation nécessaire des valeurs attribuées à la masse terrestre et à la parallaxe solaire. Elle montre encore la nécessité de réduire considérablement la masse adoptée pour Mercure.

Enfin l'étude du mouvement théorique de Mars et la constatation des conditions auxquelles est subordonné l'accord entre le calcul et l'observation établissent définitivement l'exactitude des

résultats acquis précédemment, les uns se trouvant confirmés directement, les autres comme conséquence des premiers.

Les quatre planètes les plus voisines du Soleil forment un groupe naturel, dont les composantes sont dans une dépendance telle, au point de vue du mouvement, qu'on ne peut guère déduire de conséquence définitive de l'étude isolée du mouvement de l'une quelconque d'entre elles.

En effet, une variation, même relativement faible, dans les valeurs attribuées à la masse ou aux éléments de l'orbite de l'une de ces planètes, peut affecter sensiblement les résultats obtenus par l'examen séparé du mouvement des trois autres, et par suite modifier les conclusions auxquelles on s'était peut-être prématurément arrêté.

Mais l'étude ultérieure du mouvement des planètes plus éloignées du Soleil ne pourra plus motiver aucun changement dans ces conclusions; car les incertitudes qui pourraient, de ce chef, affecter le résultat des premières recherches, ne tiendraient qu'aux erreurs des valeurs attribuées aux masses de Jupiter et de Saturne. Or la masse de Jupiter a été déterminée avec précision par la considération du mouvement des satellites de cette planète, et celle de Saturne avec une exactitude suffisante par l'étude des perturbations de Jupiter; les erreurs encore possibles sur ces deux données sont certainement trop faibles pour avoir une influence sensible sur le calcul des perturbations des planètes intérieures.

Nous pouvons donc dès maintenant présenter avec assurance les résultats obtenus dans la première partie de l'œuvre de Le Verrier.

Des Tables d'une précision supérieure ont été construites, qui permettent de calculer à l'avance les positions du Soleil, de Mercure, de Vénus et de Mars.

Des conséquences importantes, et dont l'énumération suit, ont été déduites de la comparaison de la théorie aux observations.

1° Il est très-probable qu'un ou plusieurs petits corps circulent entre Mercure et le Soleil.

2° La masse primitivement attribuée à Mercure doit être considérablement diminuée, des deux cinquièmes environ de sa valeur; toutefois une grande indécision s'attache encore au résultat obtenu.

La masse attribuée autrefois à Vénus doit être également diminuée, mais d'une quantité beaucoup moindre, un quarantième environ de sa valeur.

Enfin, pour la Terre et Mars, la correction de la masse redevient plus considérable : à peu près un dixième en plus pour la Terre, un dixième en moins pour Mars ([1]).

3° La parallaxe solaire doit être augmentée : 8″,9 au lieu de 8″,6 ([2]), et par suite la distance de la Terre au Soleil diminuée dans les mêmes proportions.

Douze ans se sont écoulés entre la publication des Tables de Mars et l'apparition de la théorie des mouvements de Jupiter et de Saturne. Des causes qui ont amené cette interruption nous ne voulons retenir que celles qui ont un caractère exclusivement scientifique; nous nous contenterons d'ailleurs de les énumérer succinctement et dans le seul but de constater qu'il n'existe point de lacune dans la vie scientifique active de Le Verrier : la tombe seule a pu lui imposer le repos qu'il s'est impitoyablement refusé dans tout le cours de son existence.

Nous citerons donc, sans appréciation aucune, la vigoureuse et féconde impulsion donnée aux études météorologiques; la constitution du service de la prévision du temps, avec ses applications pratiques; une remarquable étude sur un essaim d'étoiles filantes; enfin la fondation de l'*Association Scientifique de France,* destinée, à son début surtout, à favoriser et à étendre le mouvement météorologique.

Ceux-là qui l'ont vu à l'œuvre peuvent seuls savoir quelle prodigieuse activité, quelle ténacité énergique il déploya pour assurer le succès de ces diverses créations. Et pourtant, malgré les soins incessants qu'il leur consacrait, malgré les soucis que lui causaient

---

([1]) La découverte des satellites de Mars et l'étude de leur mouvement ont confirmé l'exactitude suffisante de la valeur attribuée définitivement par Le Verrier à la masse de la planète.

([2]) La détermination de la parallaxe solaire, déduite de la mesure directe de la vitesse de la lumière, donne la même valeur. Cela résulte des expériences de M. Foucault et de celles, plus récentes, de M. Cornu appliquant les procédés de M. Fizeau.

Il en est de même de l'observation du dernier passage de Vénus sur le disque du Soleil.

les dissensions intestines qui troublaient l'Observatoire, les luttes, administratives et scientifiques, qu'il avait à soutenir, il n'oubliait point qu'il lui restait à terminer une partie importante, la plus importante peut-être, de la tâche qu'il s'était imposée.

Vaincu dans la lutte administrative, fatigué, malade, mais jamais abattu, il revient avec l'ardeur passionnée du début à son travail de prédilection.

En 1873, il présente à l'Académie des Sciences la théorie analytique complète des mouvements de Jupiter et de Saturne. Dès cette époque, il ne se fait aucune illusion sur les difficultés qu'il va rencontrer, lorsqu'il aura à comparer et à faire concorder la théorie avec les observations. Aussi prend-il les précautions les plus minutieuses, revoyant toutes les formules générales, poussant le développement des inégalités séculaires jusqu'aux termes du quatrième ordre relativement aux masses, celui des termes périodiques jusqu'au second ordre, ne négligeant que ceux dont le coefficient est inférieur à un centième de seconde d'arc.

Les Tables du mouvement de Jupiter, comparées à l'observation, présentent un accord aussi satisfaisant que possible, à la condition toutefois de diminuer d'un *cinq-centième* la valeur attribuée précédemment à la masse de Saturne.

Mais l'étude de cette dernière planète présente plus de difficulté. Dans la comparaison des positions calculées aux positions observées, il se manifeste des écarts assez considérables, qui jettent un doute dans l'esprit de Le Verrier. La théorie serait-elle moins parfaite qu'il ne l'a cru? Les termes du second ordre, qu'il a négligés en nombre considérable, à cause de la petitesse des coefficients, donneraient-ils à certaines époques une somme sensible? Pour lui, se poser de telles questions, c'est s'imposer l'obligation de les résoudre. La méthode d'interpolation va lui en fournir le moyen.

Admettant ses Tables primitives comme une approximation très-suffisante pour l'objet spécial qu'il a en vue, il prend, pour une révolution entière de Saturne, seize positions correspondant à seize intervalles égaux de la longitude moyenne; pour une révolution entière de Jupiter, trente-deux positions de cette planète déterminées de la même manière.

Combinant chaque position de Saturne avec les trente-deux de

Jupiter, il détermine, pour chaque combinaison, les lieux elliptiques des deux planètes qu'il corrige ensuite des perturbations dues à leur action mutuelle.

Cela fait, il calcule, pour l'orbite de Saturne, les *valeurs numériques totales* des dérivées des éléments dans les cinq cent douze combinaisons obtenues, ces valeurs étant fournies par des fonctions de forme finie; puis, par une double interpolation, il arrive à représenter ces dérivées d'une manière continue, pour toutes les positions possibles de Saturne sur son orbite, combinées avec toutes les positions possibles de Jupiter sur la sienne.

Les expressions qu'il obtient ainsi sont, indépendamment des coefficients numériques, des produits de lignes trigonométriques, ayant pour arguments des fonctions explicites du temps; il décompose aisément ces produits en sommes dont l'intégration ne présente aucune difficulté.

Cette méthode, qui repose sur l'usage des formules d'interpolation données dans le tome Ier des *Annales de l'Observatoire,* est longue et pénible; mais elle présente l'avantage d'éviter l'emploi des séries, emploi qui a pour conséquence forcée la suppression d'une infinité de petits termes dont il est souvent difficile de déterminer exactement l'influence totale.

Les résultats obtenus ainsi diffèrent peu de ceux que l'Analyse avait fournis. Le Verrier est donc rassuré sur l'exactitude de son travail primitif. Toutefois un changement dans les termes séculaires de l'excentricité et du périhélie lui permet déjà de représenter plus exactement les observations de Bradley.

Mais les écarts restent encore considérables. A quelle cause doivent-ils être attribués ? Si le temps n'eût fait défaut à Le Verrier, nous ne doutons point qu'il n'eût élucidé cette question. Malheureusement, à cette époque, la maladie qui le minait depuis longtemps commençait à prendre le caractère le plus inquiétant. Il le sentait, et, voulant terminer la théorie des mouvements d'Uranus et de Neptune, il dut se résigner à laisser aux géomètres futurs le soin de résoudre cette difficulté.

Mentionnons ici que l'un des résultats obtenus par la méthode d'interpolation avait fait naître dans son esprit des doutes sur l'exactitude absolue du principe relatif à l'invariabilité des grands axes. M. Tisserand, dans un remarquable Mémoire, a démontré

clairement, ce qui n'avait pas encore été fait, que ce principe est vrai pour les termes du premier et du second ordre; mais un jeune géomètre, M. Spiru Haretu, vient de prouver qu'il n'en est plus de même pour les termes d'ordre supérieur.

La théorie du mouvement d'Uranus, la comparaison des positions calculées aux positions observées, la rectification des éléments elliptiques, la construction des Tables définitives, n'ont présenté de difficulté que la difficulté relative à un changement considérable de la valeur primitive attribuée à la masse de Neptune, qui a dû être diminuée d'un quart environ.

Revenu à l'extrême limite connue du monde solaire, au point où il a livré sa première bataille et remporté sa plus éclatante victoire, Le Verrier aborde la théorie de Neptune avec le vague espoir que cet astre pourra, sentinelle avancée, lui signaler le passage de quelque planète encore plus éloignée. Mais Neptune, sorti depuis trop peu de temps de l'engourdissement mille fois séculaire auquel il l'a naguère arraché, ne peut encore démêler et lui révéler le secret de toutes les impulsions auxquelles sa marche est soumise. La comparaison de la théorie aux observations ne laisse subsister, après la rectification des éléments, aucun écart assez bien établi et assez persistant pour servir de base à une recherche.

Le Verrier a accompli sa glorieuse mission, sa tâche est finie. Il meurt. Mais son génie anime toujours son œuvre : gardien vigilant et sévère de la régularité du mouvement des astres, il en signalera impitoyablement les moindres écarts aux astronomes futurs. Ceux-ci, avertis par lui, feront bien de méditer cette maxime qu'il répétait avec une conviction profonde et qu'il a si pleinement justifiée :

« *Tout écart révèle une cause inconnue et peut être la source d'une découverte.* »

ESSAI D'UNE THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES POLAIRES INCLINÉES;

PAR ED. DEWULF,
Commandant du Génie.

PREMIÈRE PARTIE.

I. Dans un travail inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques,* nous avons désigné sous le nom de *polaire inclinée* d'un point P, par rapport à une courbe C_n d'ordre n, une autre courbe d'ordre n passant par les points M de C_n, qui sont tels que la tangente en M à C_n fait un angle constant α avec le rayon PM, et nous avons démontré quelques propriétés de ces courbes par l'Analyse ([1]). Nous nous proposons aujourd'hui de reprendre cette étude par la Géométrie pure et de la compléter.

Dans ce but, nous allons donner une nouvelle définition des polaires inclinées, qui aura sur l'ancienne l'avantage d'expliquer la propriété essentielle de chacun des points de ces courbes; nous dirons que *la polaire inclinée d'un point* P, *par rapport à une courbe algébrique* C, *est le lieu géométrique d'un point* M, *tel que la droite polaire ordinaire de* M, *par rapport à* C, *fait un angle constant* α *avec le rayon* PM.

La droite polaire ordinaire d'un point de C étant la tangente en ce point à cette courbe, on voit aisément que cette définition comprend celle que nous avons donnée précédemment.

Il faut observer que la polaire inclinée d'un point par rapport à une courbe, dans le cas où $\alpha = 0$, ne se confond pas, en général, avec la polaire ordinaire de ce point. Ainsi, la polaire inclinée d'un point P, par rapport à une circonférence dont le centre est O, dans le cas où $\alpha = 0$, est la circonférence décrite sur PO comme diamètre, tandis que la polaire ordinaire du même point P est la corde de contact des tangentes à la circonférence issues de ce point.

Il semble résulter de là que le nom de *polaire inclinée* donné aux courbes dont l'étude fait l'objet de cet essai est impropre, parce qu'il indique une certaine parenté entre ces courbes et les

---

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1re série, t. XVIII, et 2e série, t. XI. Ce travail renferme quelques erreurs.

polaires ordinaires. Nous avons, en effet, adopté ce nom la première fois que nous nous sommes occupé de ces courbes, parce que la définition que nous en avions donnée alors n'était que la généralisation de celle des polaires ordinaires, due à Bobillier (¹); et nous avons cru pouvoir le conserver aujourd'hui, parce que la parenté, qui ne saute pas aux yeux d'abord, existe cependant, ainsi que cela ressortira de la suite de cette étude.

II. Soient l une droite quelconque et L un de ses points. Les droites qui font avec PL un angle α (compté toujours dans le même sens de rotation) déterminent, sur la droite i de l'infini, un point I. Les points de la première polaire ordinaire de I, par rapport à C_n, jouissent de cette propriété, que leurs droites polaires passent toutes en I, et font, par conséquent, avec LP l'angle constant α; cette courbe détermine $n-1$ points L′ sur la droite l, et, quand le point L parcourt la droite l, le point I parcourt la droite i, ses premières polaires ordinaires forment un faisceau et déterminent sur l une involution de points L′. Puisque les premières polaires des points de i forment un faisceau, un point L′ détermine une des courbes de ce faisceau, et, par suite, le pôle I de cette courbe et, par suite encore, l'unique droite passant par le point P qui fait un angle α avec la direction PI, et enfin un seul point L sur la droite l. Nous avons donc sur cette droite deux séries de points L et L′, telles qu'à un point L correspondent $n-1$ points L′, et qu'à un point L′ il ne correspond qu'un seul point L; il y a n coïncidences des points L et L′, c'est-à-dire n points L, tels que leur droite polaire, par rapport à C_n, fait un angle constant α avec PL. Donc :

La polaire inclinée d'un point P, *par rapport à une courbe* C_n, *est de l'ordre n.*

Il résulte de là que, *par tout point* P *du plan* C_n, *on peut mener* n^2 *droites qui coupent* C_n *sous un angle* α.

III. Si nous faisons passer la droite l par un point base O du faisceau des premières polaires des points de la droite de l'infini, et si nous répétons le raisonnement que nous venons de faire, nous voyons que, quels que soient l'angle α et le point P, ce point O se trouve sur la polaire inclinée. Donc :

(¹) *Annales de Gergonne*, t. XVIII, p. 253.

Quel que soit l'angle α, les polaires inclinées de tous les points du plan de C_n passent par les $(n-1)^2$ points polaires ordinaires de la droite de l'infini, par rapport à C_n (¹).

On voit de la même manière, en faisant passer la droite l par le pôle P, que :

La polaire inclinée d'un point passe par ce point, quel que soit l'angle α (²).

Les points à l'infini d'une polaire inclinée se déterminent comme ceux qui sont sur une droite quelconque. Soit I un point quelconque de la droite i de l'infini; la direction qui fait avec PI un angle α détermine un second point I', et la première polaire de I' coupe la droite i en $n-1$ points I''. Mais un point I'' détermine une courbe du faisceau des premières polaires des points de i, et, par suite, un seul point I' et un seul point I. Donc à un point I correspondent $n-1$ points I'', et à un point I'' il ne correspond qu'un seul point I. Si l'on remarque, en outre, que la position du point I et, par suite, celles des points I'' sont indépendantes de celle de P, mais que la position de I' et, par conséquent, celle de I'' varient avec α, on pourra énoncer le théorème suivant :

Les polaires inclinées de tous les points du plan d'une courbe C_n, par rapport à cette courbe, ont les mêmes points à l'infini quand α est constant; mais ce groupe de n points varie avec α.

On peut dire aussi, *quand α est constant, les polaires inclinées de tous les points du plan d'une courbe C_n, par rapport à C_n, ont leurs asymptotes parallèles ou sont homothétiques.*

Supposons maintenant que le pôle P passe à l'infini, et nommons-le I. Soient toujours l une droite quelconque et L un quelconque de ses points; traçons par le point L une droite qui fasse un angle α avec LI; elle détermine sur la droite i de l'infini un nouveau point I', et ce point ne varie pas avec L; tous les points de la première polaire ordinaire du point I' appartiennent donc à la polaire inclinée du point I. Mais, si l'on joint le point I à un point quelconque I_1 de la droite de l'infini, la droite polaire de I, qui a

(¹) A l'avenir, quand nous dirons *pôle* ou *polaire,* il s'agira toujours du pôle ordinaire ou de la polaire ordinaire.

(²) Ces deux corollaires résultent aussi de ce que les droites polaires des points O sont indéterminées, et de ce que la direction du rayon PM est indéterminée quand M se confond avec P.

une direction déterminée, pourra être considérée comme faisant avec I_1 un angle α, puisque cette dernière direction est indéterminée. Donc :

La polaire inclinée d'un point de l'infini se compose de la polaire ordinaire d'un autre point de l'infini, qui varie avec α, *et de la droite de l'infini.*

On voit facilement que, *quand* $\alpha = 0$, *la polaire inclinée d'un point de l'infini se compose de la polaire ordinaire de ce point et de la droite de l'infini.*

On peut réunir en un seul énoncé les divers théorèmes précédents :

Les polaires inclinées, par rapport à une courbe C_n, *de tous les points du plan de cette courbe situés à distance finie passent par* $n^2 - n + 1$ *points fixes, quand l'angle* α *est constant. Ces points sont les* $(n-1)^2$ *points polaires de la droite de l'infini et* n *points de la droite de l'infini. Quand* α *varie, les* $(n-1)^2$ *points polaires de la droite de l'infini seuls restent fixes. Les polaires inclinées des points de l'infini se composent de la droite de l'infini et des polaires ordinaires d'autres points de l'infini, quand* α *a une valeur quelconque; mais, quand* $\alpha = 0$, *elles se composent de la droite de l'infini et des polaires ordinaires des mêmes points.*

IV. Soient un point fixe P, une courbe C_n et la polaire inclinée C_n^α de P par rapport à C_n. Les polaires inclinées C_n^α forment un faisceau, quand l'angle α prend toutes les valeurs possibles. Pour le démontrer, il suffit de faire voir qu'il ne passe qu'une seule de ces courbes par un point quelconque donné M. Joignons les points P et M, traçons une droite PI, qui fasse avec PM l'angle α. Les diverses valeurs de α donneront successivement tous les points I de la droite de l'infini. Or les premières polaires de tous ces points formant un faisceau, une seule de ces courbes passe par M, et, par suite, il n'y a qu'une seule valeur de α qui donne une polaire inclinée passant par M. Donc :

Les polaires inclinées d'un point P, *par rapport à une courbe fixe* C_n, *pour toutes les valeurs possibles de* α, *forment un faisceau.*

V. Soient une droite p et une courbe C_n. Quand le pôle P par-

court la droite p, ses polaires inclinées forment un faisceau; nous supposons, bien entendu, α constant. En effet, la direction qui forme un angle α avec p détermine un point I de i; la première polaire de I coupe p en $n-1$ points O, qui appartiennent évidemment tous à toutes les polaires inclinées en question. Ainsi, si nous prenons un point P de p, sa polaire inclinée par rapport à C_n passe par les $(n-1)^2$ points polaires de la droite de l'infini, par n points fixes à l'infini et par $n-1$ points fixes sur p, c'est-à-dire en tout par $n^2-2n+1+n+n-1=n^2$ points fixes. Donc :

Les polaires inclinées de tous les points d'une droite p, par rapport à une courbe C_n, forment un faisceau dont les points bases sont les $(n-1)^2$ points polaires de la droite de l'infini, n points à l'infini et $n-1$ points sur la droite p.

Si la droite p passe à l'infini, chacune des courbes du faisceau se décompose en une courbe d'ordre $n-1$, qui est une polaire ordinaire d'un point à l'infini et en la droite de l'infini, et *le faisceau des polaires inclinées se compose de la droite de l'infini et du faisceau des premières polaires ordinaires des points de la droite de l'infini.*

VI. Soient un point fixe O et une courbe C_n. Prenons un point quelconque P sur le plan de C_n, et tirons PO; la direction qui fait avec PO un angle α détermine un point I de la droite de l'infini; quand PO tourne autour de O, le point I parcourt la droite i, et parmi toutes les premières polaires des points I, il n'y en a qu'une seule qui passe par le point O. Le pôle I de cette courbe détermine une direction OI, dont chaque point est tel que sa polaire inclinée, par rapport à C_n, passe par le point O; or les polaires inclinées de tous les points d'une même droite forment un faisceau (V). Donc :

Les polaires inclinées des points d'un plan, par rapport à C_n, qui passent par un point fixe O, forment un faisceau.

La droite, qui porte les pôles des courbes de ce faisceau, s'obtient en traçant par le point O une droite qui fait un angle α avec la direction déterminée par le point de la droite de l'infini, dont la première polaire passe par le point O.

Si le point O est à l'infini, cette droite passe à l'infini, et le faisceau se compose des premières polaires ordinaires des points de l'infini.

VII. Puisque les polaires inclinées des points du plan qui passent par un point fixe forment un faisceau, deux points du plan déterminent entièrement une de ces courbes. Donc :

Les polaires inclinées de tous les points du plan d'une courbe C_n, *par rapport à cette courbe, forment un réseau.*

Et comme le pôle P suffit, à lui seul, pour déterminer une courbe du réseau, il s'ensuit que :

Le pôle équivaut à deux points pour la détermination d'une polaire inclinée.

VIII. Il est facile maintenant de résoudre le problème suivant : « Étant donnés deux points O_1 et O_2 du plan de C_n, déterminer le pôle de la polaire inclinée qui passe par ces deux points. »

Nous avons vu (VI) comment on peut tracer la droite, lieu des pôles des polaires inclinées qui passent par un point ; il suffit d'effectuer cette construction pour les deux points O_1 et O_2, et le point d'intersection des deux droites ainsi trouvées donne le point cherché.

On démontre aussi, sans difficulté, que les polaires inclinées de trois points non en ligne droite déterminent tout le réseau de ces courbes.

IX. Il est utile de compléter le théorème VI, en fixant nettement la position des points bases du faisceau des polaires inclinées qui passent par un point O_1. Nous avons vu que le lieu des pôles des courbes de ce faisceau est une certaine droite d passant par O_1 ; les polaires inclinées de tous les points de cette droite passent par $n-1$ points fixes O de d (le point O_1 est au nombre de ces points O), et un quelconque des points $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$ détermine le faisceau. Donc :

Les points bases du faisceau des polaires inclinées qui passent par un point O_1 *sont les* n^2-n+1 *points fixes du réseau, le point* O_1 *et* $n-2$ *points situés sur une droite déterminée passant par* O_1.

Remarquons que, parmi ces n^2 points bases, il y en a n^2-n+1 qui ne changent pas avec la droite, et $n-1$ qui varient avec elle. On peut désigner ces $n-1$ points sous le nom de *points polaires inclinés de la droite*. Ainsi les points polaires inclinés d'une droite

sont les $n-1$ points fixes de cette droite, qui viennent s'ajouter aux n^2-n+1 points fixes du réseau, pour former les n^2 points bases du faisceau qui correspond à la droite.

Tout point de la droite de l'infini peut être considéré comme un point polaire incliné de cette droite.

X. Une courbe quelconque du faisceau des polaires inclinées des points d'une droite d coupe cette droite en n points; parmi ces n points, $n-1$ sont fixes : ce sont les points polaires inclinés de la droite, et un seul est variable avec la courbe. Ce $n^{\text{ième}}$ point est évidemment le pôle de la courbe, puisque ce pôle doit se trouver en même temps sur la droite et sur la courbe. Si ce point parcourt la droite, il vient se confondre successivement avec les $n-1$ points fixes $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$. Donc :

La courbe du faisceau déterminée par chacun des points $O_1, \ldots, O_{n-1}$ (ou plutôt par les points infiniment voisins de ces points) *est tangente à d en ce point.*

XI. La manière dont nous avons déterminé les points bases d'un faisceau montre que tous ceux de ces points qui ne sont pas à l'infini se trouvent sur une courbe d'ordre $n-1$. Cette courbe est la première polaire ordinaire d'un point à l'infini.

XII. Étant donnée une courbe C_n, par rapport à laquelle on prend la polaire inclinée d'un point P, supposons que P parcoure une autre courbe quelconque C_m, et soient P_1 et P_2 deux positions infiniment voisines de P. La droite P_1P_2 est tangente à C_m, et elle détermine un faisceau de polaires inclinées, par rapport à C_n. Les deux polaires inclinées infiniment voisines qui correspondent aux pôles P_1 et P_2 se coupent aux $n-1$ points fixes de la tangente P_1P_2, et ces points sont précisément les points polaires inclinés de cette tangente par rapport à C_n. Donc :

Quand le pôle parcourt une courbe quelconque C_m, *l'enveloppe de ses polaires inclinées, par rapport à* C_n, *se confond avec la courbe décrite par les* $n-1$ *points polaires inclinés des tangentes à* C_m *par rapport à la même courbe* C_n.

XIII. Nous allons déterminer le degré de cette courbe. Soit t une tangente quelconque à la courbe C_m, que nous supposons de

la classe m. La direction qui fait un angle α avec t détermine un point I sur la droite de l'infini; la première polaire de I coupe la tangente t et une droite quelconque l, chacune suivant un groupe de $n-1$ points. Si un de ces $n-1$ points L de l se confondait avec un des $n-1$ points T de t, ce point serait un point d'intersection du lieu géométrique cherché avec la droite l. Cette coïncidence ne peut avoir lieu que si deux de ces points L et T se réunissent au point T' d'intersection de t et de l. Puisque la courbe C_m est de la classe m, il y a m tangentes à cette courbe parallèles à t, et, par suite, m points T'. A un point L correspondent donc m points T'. D'un point T' on peut mener m tangentes à C_m; chacune de ces tangentes détermine un point I, et, par suite, un groupe de $n-1$ points L. A un point T' correspondent donc $m(n-1)$ points L, et le nombre des coïncidences des points L et T' est $m(n-1)+m=mn$. C'est le degré cherché. Donc :

Le lieu géométrique des points polaires obliques de toutes les tangentes à une courbe de la classe m, par rapport à une courbe de l'ordre n, est de l'ordre mn.

Et aussi :

L'enveloppe des polaires inclinées des points d'une courbe de la classe m, par rapport à une courbe de l'ordre n, est une courbe C_{mn} *de l'ordre mn.*

Si la droite de l'infini est s fois tangente à la courbe de la classe m, la courbe C_{mn} se décompose en s fois la droite de l'infini et une courbe C_{mn-s} de l'ordre $mn-s$.

Si $m=1$, nous avons le théorème suivant, qu'il est facile d'établir directement :

Le lieu géométrique des pôles inclinés des rayons d'un faisceau de droites est la polaire inclinée du centre de ce faisceau [1].

---

[1] Il est intéressant de comparer ce théorème et quelques-uns de ceux qui précèdent à ceux qui ont été démontrés analytiquement par Bobillier, sur les polaires ordinaires, dans les *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 106 et suiv.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MAYER (A.). — GESCHICHTE DES PRINCIPS DER KLEINSTEN ACTION (*Akademische Antrittsvorlesung*).

Nous résumons ci-après les intéressants détails donnés par M. Mayer dans son discours sur l'*Histoire du principe de la moindre action*.

Dans sa *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du* XVIIIe *siècle*, P. Henrich von Fuss, arrière petit-fils d'Euler, donne deux lettres de Daniel Bernoulli à Euler, où l'on peut voir l'origine des recherches qui ont donné naissance à ce principe. Malheureusement, les réponses d'Euler sont perdues. A la fin du XVIIe siècle, Jean Bernoulli avait posé le célèbre problème de la brachistochrone. A partir de ce moment tous les géomètres de cette époque proposèrent ou résolurent des problèmes analogues, où il s'agissait toujours de déterminer une courbe de manière à rendre une intégrale donnée, relative à cette courbe, plus grande ou plus petite que pour les courbes voisines. Daniel Bernoulli avait observé que certaines questions difficiles de Statique pouvaient être ramenées à ce genre de problèmes et qu'on pouvait ainsi les résoudre par une méthode toute différente de celle qui a son point de départ dans les principes ordinaires de la Mécanique. Ce qui arrivait pour l'équilibre ne devait-il pas avoir lieu aussi pour le mouvement? La *Methodus isoperimetrica* ne pouvait-elle pas aussi conduire à déterminer les *Orbitæ circa centra virium?* Dans cet ordre d'idées, il était naturel que Daniel Bernoulli s'adressât à celui qui avait fait faire les plus grands progrès à la théorie des problèmes isopérimétriques, à Euler. Sans doute ce dernier ne trouva pas la réponse facile; deux ans après (12 décembre 1742), Daniel Bernoulli revient à la charge; mais le 23 avril 1743, il félicite Euler de sa découverte, qui doit être rapportée au mois précédent.

Cette découverte, Euler la publia l'année suivante, en automne, dans la seconde addition à son célèbre Ouvrage sur les problèmes isopérimétriques, addition qui porte le titre *De Motu projectorum*.

C'est, dans le cas le plus simple, le principe de la moindre action, sous sa forme exacte et précise.

On sait, depuis Jacobi, que ce principe, dans sa généralité, peut être énoncé sous deux formes équivalentes : l'intégrale

$$\int \sqrt{2(U+h)}\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2},$$

où U est la fonction des forces, prise entre la position initiale et la position finale du système, est plus petite pour les chemins réellement parcourus par les différents points du système que pour tout autre ensemble de trajectoires : cela revient à dire que, pour les trajectoires réellement décrites, l'intégrale

$$\int \Sigma m_i v_i ds_i,$$

prise entre les mêmes limites et d'où l'on a éliminé le temps au moyen de l'équation des forces vives

$$\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = U + h,$$

est minimum. Nous n'insistons pas sur ce que l'intégrale ne présente pas nécessairement un véritable minimum. C'est bien sous la première forme qu'Euler, dans le cas d'un seul point mobile, applique ce principe aux exemples qu'il traite, la condition que l'intégrale soit minimum le conduisant à l'équation différentielle du mouvement; mais c'est sous la seconde forme qu'il énonce le principe : c'est l'intégrale

$$\int mv ds,$$

qui doit être minimum, lorsque, au moyen de l'équation de la force vive, on l'a ramenée à ne plus dépendre que des quantités qui elles-mêmes ne dépendent que de la trajectoire du point mobile. Euler insiste nettement sur la restriction à son théorème général qu'implique cet emploi nécessaire du principe de la force vive : ce théorème, par exemple, ne s'applique pas au cas d'un mobile qui se meut dans un milieu résistant.

Mais d'où vient ce nom de *principe de la moindre action?*

Le 13 avril de cette même année 1744, à l'automne de laquelle remonte la découverte d'Euler, Maupertuis avait adressé à l'Académie de Paris un Mémoire, relatif aux lois de la réflexion et de la

réfraction de la lumière, dans lequel il opposait à cette assertion de Fermat, que la propagation de la lumière s'effectuait dans le moindre temps possible en vertu de ces lois, une autre assertion arbitraire qui les faisait concorder avec la théorie de l'émission : c'était, d'après Maupertuis, la somme des chemins parcourus, respectivement multipliés (et non divisés) par les vitesses de propagation qui devait être minimum. Deux ans après, en 1746, la position qu'il occupait comme président de l'Académie de Berlin était venue accroître son autorité, et Maupertuis étendit son hypothèse à tous les mouvements possibles; elle devint un principe général de l'équilibre et du mouvement : *Lorsque dans la nature*, disait-il, *il se produit un changement quelconque, la quantité d'action employée pour ce changement est la plus petite possible; lorsqu'un système est en équilibre, ses différents points occupent des positions telles que, si on leur communique un petit mouvement, la quantité d'action qui en résulte est la moindre possible.* L'action, c'est le produit de la masse par la vitesse et le chemin parcouru, d'où le nom de *principe de la moindre quantité d'action*. Quant aux preuves que Maupertuis apporte, elles se déduisent des lois du choc de deux corps parfaitement durs et parfaitement élastiques, de la théorie du levier, des lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière. Cela lui suffit. On voit combien vague et obscur est ce principe à moitié métaphysique, comparé au théorème d'Euler, théorème purement mathématique, impliquant des conditions bien définies, susceptible d'une forme précise. Dans les Mémoires de l'Académie de Paris pour 1749 et 1752, le chevalier d'Arcy, auquel on doit le principe de la conservation des aires, montre combien Maupertuis procède arbitrairement dans l'évaluation de ce qu'il nomme la *quantité d'action* nécessaire pour le changement, quantité qui ne se retrouve pas la même dans les différents cas, dans la théorie du choc, ou dans celle de la réflexion de la lumière; dans ce dernier cas en particulier, d'Arcy montre élégamment que la fonction de Maupertuis peut devenir maximum ou minimum, selon le degré de concavité du miroir, degré qui changerait ainsi en prodigalité cette économie dont on fait honneur à la nature. Le principe de l'équilibre, ou plutôt l'application que Maupertuis en fait au levier, est soumise à une critique aussi sévère. Et, en effet, cette application montre que Maupertuis ne se doutait pas du sens précis

de ce principe, que l'on peut, ainsi que l'a montré Euler, ramener, au moyen de l'équation des forces vives, à un théorème que Maupertuis lui-même avait découvert sur un cas particulier, et qu'il avait communiqué en 1740 à l'Académie de Paris, comme la loi de l'équilibre, à savoir que, pour la position d'équilibre, la fonction des forces est maximum ou minimum. Il n'y a qu'une ressemblance de forme entre le théorème d'Euler et le principe de Maupertuis, ressemblance qui s'évanouit entièrement quand on réfléchit que l'intégrale d'Euler se rapporte au produit de la masse par la vitesse et l'élément de trajectoire, et n'est identique à l'*action* de Maupertuis que dans le cas du mouvement uniforme; que ce n'est que plus tard que l'intégrale elle-même est devenue la mesure de l'action; qu'Euler regarde le principe des forces vives comme une condition nécessaire; que Maupertuis regarde ce dernier principe comme moins général que le sien; qu'Euler déduit de son théorème les équations différentielles du mouvement, tandis que Maupertuis ne tire de son principe que des équations finies.

Quand donc, dans la Préface de son Mémoire, le président de l'Académie de Berlin indique la découverte d'Euler comme une belle application de son principe, comment s'expliquer le silence de ce dernier, et, qui plus est, l'adhésion qu'il donne aux paroles de Maupertuis, dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1751? Il faut pour cela se reporter à une critique de l'œuvre de Maupertuis qui avait paru en mars 1751, dans les *Acta eruditorum* de Leipzig, et qui fut l'origine d'une violente discussion.

L'auteur de cette critique était Samuel König; la vie de ce dernier avait été fort agitée : élève de Jean Bernoulli en même temps que Maupertuis, il avait été banni de Berne, sa patrie, pour des raisons politiques; il avait donné des leçons de Mathématiques à la marquise du Châtelet, la célèbre amie de Voltaire, s'était brouillé avec elle et avait fini par trouver en France, comme professeur, une position stable. La chaude recommandation de Daniel Bernoulli l'avait fait nommer membre étranger de l'Académie de Berlin.

Les critiques qu'il adressa à Maupertuis étaient, pour une bonne part, justes et bien fondées; mais, en outre, il s'avisa de joindre à sa dissertation une Lettre de Leibniz à Hermann, dans laquelle Leibniz remarquait que, dans les modifications du mouvement, l'action était généralement maximum ou minimum, et que, entre autres im-

portantes conséquences, on pouvait déduire de là la trajectoire d'un corps attiré par un ou plusieurs centres.

Ainsi on déniait à Maupertuis et à Euler la priorité de leurs découvertes; mais comment Leibniz aurait-il laissé, sans la publier, une proposition aussi importante? L'idée d'un faux se présentait naturellement à l'esprit : au reste, la Lettre de Leibniz est supposée, cela n'est pas douteux; mais la preuve n'était pas facile, car König disait ne posséder que la copie, et celui dont il la tenait avait été, plusieurs années auparavant, décapité à Berne. L'impossibilité de la preuve matérielle n'empêcha point Maupertuis de faire déclarer par l'Académie de Berlin (13 avril 1752) que la Lettre était fausse, que son contenu était nul et non avenu. Voltaire prit le parti de König, le roi celui de Maupertuis; sans doute Frédéric s'amusait des satires de Voltaire, mais il ne voulait pas qu'on couvrît de railleries le président de son Académie; il fit brûler publiquement la *Diatribe du docteur Akakia,* et Voltaire rompit avec lui. Ainsi le cercle de la dispute s'étendait de plus en plus.

Dans ces conditions, une position intermédiaire entre les deux partis était impossible, et il n'est pas étonnant qu'Euler ait fait cause commune avec Maupertuis. Sans doute, d'ailleurs, il y était aussi poussé par sa prédilection bien connue pour les spéculations métaphysiques, prédilection qui perce dans tout ce qu'il écrivit à propos du principe de la moindre action dans cette mémorable dispute, et que Daniel Bernoulli lui reprocha plus d'une fois.

Sans doute Euler reste plus précis que Maupertuis; c'est toujours de l'intégrale qu'il s'agit, et il n'est pas question des cas où l'équation des forces vives n'est pas supposée; mais il ne parle plus de la nécessité de se servir de cette équation pour transformer l'intégrale de manière qu'il n'y entre plus que les quantités qui dépendent de la trajectoire : le théorème d'Euler ressemble ainsi davantage au principe de Maupertuis, par l'omission d'une condition qui, toutefois, est nécessaire pour que ce principe ait quelque sens; car c'est en vertu de cette condition même que les forces agissantes entrent dans l'expression de l'action.

Il est intéressant de voir comment, au contraire, Daniel Bernoulli saisissait nettement le sens et la valeur de la découverte d'Euler (Lettre du 25 décembre 1743). Il ne s'agit pas pour lui de propriétés que l'on puisse déduire de principes *a priori,* mais qui se pré-

sentent à notre raison comme un résultat du calcul, avec un caractère en quelque sorte accidentel.

Arrivons maintenant à Lagrange, qui, dès l'âge de vingt-trois ans, trouvait les véritables fondements du calcul des variations et le débarrassait de toute considération géométrique : son attention dut de bonne heure être attirée par le théorème d'Euler, dont la valeur ne pouvait échapper à son génie, que ne troublait aucune tendance métaphysique. Dans les *Mélanges de l'Académie de Turin* (1760-1761), non-seulement il étendit ce qu'il nomme le *Principe de la moindre action* à tous les mouvements de points attirés vers des centres fixes, mais il en déduisit les importantes conséquences qu'il devait, plus tard, établir autrement dans la Mécanique analytique.

Mais telle est l'obscurité qui, depuis Maupertuis, se trouvait répandue sur la matière, que nous ne savons guère ce que Lagrange entendait par le principe général de la moindre action, que ce principe dont il a tiré de si admirables conséquences et qu'il a laissé ensuite de côté, comme s'il avait eu conscience de son obscurité, paraît être tout différent de celui d'Euler et de Jacobi. Tel qu'il l'énonce, le principe de Lagrange n'a point de sens; car cette condition nécessaire, que le temps doit être éliminé au moyen de l'équation des forces vives, n'est pas exprimée. Déjà, dans la 3ᵉ édition de la *Mécanique analytique,* M. Joseph Bertrand remarquait l'inexactitude de la démonstration donnée par Lagrange du principe de la moindre action, et, d'après cette démonstration, proposait de substituer à ce principe le suivant : « L'intégrale de la force vive prise entre deux époques déterminées est plus petite pour le mouvement réel du système que pour les autres mouvements que le système prendrait, après l'introduction de nouvelles liaisons, entre la même position initiale et la même position finale, l'équation des forces vives n'étant pas changée » (*Mécanique analytique,* 3ᵉ édit., t. I, p. 277). Mais, lors même que Lagrange regarderait ainsi l'équation des forces vives comme une équation de condition imposée à tous les mouvements auxquels il compare le mouvement vrai, son raisonnement n'en serait point complétement faux. Si l'on ne veut point imputer à Lagrange une faute aussi grossière, il faut, d'après M. Mayer, admettre que, loin de regarder l'équation des forces vives comme une telle condition, il s'en est servi pour ramener l'intégrale qui représente l'action à l'intégrale, prise par rapport au temps de

la force vive augmentée de la fonction des forces. Alors sa démonstration deviendrait exacte et claire, et le principe qu'il démontre ne serait autre que le principe énoncé pour la première fois par Hamilton en 1835.

GYLDÉN (Hugo). — Framställning af Astronomin i dess historiska utveckling och på dess nuvarande ståndpunkt. — Stockholm, 1874. — 1 vol. in-8°.

GYLDÉN (Hugo). — Die Grundlehren der Astronomie nach ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt. — Deutsche, vom Verfasser besorgte und erweiterte Ausgabe. — Leipzig, Engelmann, 1877.— 1 vol. in-8°, 408 p.

Les Traités élémentaires d'Astronomie en usage dans nos établissements d'instruction secondaire, les cosmographies, suivant un titre que l'usage français a fait prévaloir, présentent cette science comme créée d'un seul jet avec toute la perfection de nos connaissances actuelles. Dans les livres auxquels nous faisons allusion, on ne rencontre aucune trace ni des erreurs qui ont longtemps eu cours, ni des progrès successifs que les efforts des philosophes et des observateurs ont fait faire à l'Astronomie, pour arriver, par l'étude incessante des phénomènes célestes et des calculs laborieux, à la simplicité de notre conception moderne des divers mouvements des corps du système solaire. Dans nombre d'entre eux, on ne trouve même ni la date du système de Copernic, ni celle de la découverte des lois de Kepler. A ce dédain des faits historiques, il n'y a guère qu'une exception, celle qui se rapporte à l'anecdote de Newton et de la pomme.

Il semble cependant que nous ne devrions pas être aussi indifférents à toute notion d'histoire, et que la description du système du monde gagnerait quelque intérêt, deviendrait plus vivante, si elle était tentée en suivant pas à pas les progrès que la sagacité des physiciens et le génie des géomètres ont successivement fait faire aux instruments et aux méthodes de calcul. L'Astronomie est, en effet, on l'oublie trop souvent, une science expérimentale et une science de raisonnement; elle ne serait point parvenue à la haute perfection où elle est arrivée aujourd'hui, si nos observatoires ne renfermaient encore que des gnomons et des armilles.

C'est ainsi que, malgré toute leur sagacité, les astronomes grecs réduits à ne déterminer, et encore grossièrement, que la direction apparente des planètes, ont dû n'admettre que des mouvements circulaires, et croire, pendant longtemps, que la Terre était le centre du monde. On sait les résistances que rencontrèrent Copernic, Kepler et Galilée pour faire admettre que la Terre et les planètes tournaient autour du Soleil. Cependant, l'hypothèse des excentriques ou des épicycles n'aurait pas résisté une année à la mesure micrométrique la plus grossière du diamètre apparent de ces corps.

Exposer les phénomènes astronomiques les plus simples, ceux dont l'explication n'exige qu'un petit nombre de calculs élémentaires, en suivant l'ordre historique, tel est le but que s'est proposé M. H. Gyldén, astronome de l'Académie des Sciences de Stockholm, dans le volume que nous analysons aujourd'hui. Le succès de l'auteur a été complet, et peu d'Astronomies sont d'une lecture plus attachante et plus facile.

Les *Grundlehren der Astronomie* sont divisés en quatre Chapitres principaux : l'Astronomie avant la découverte de l'attraction universelle, la loi de Newton, les instruments des observations modernes, les études de la nouvelle Astronomie.

Le premier Chapitre débute par une intéressante description des instruments de l'Astronomie primitive, le gnomon, l'astrolabe, l'armille, à la suite de laquelle M. Gyldén s'applique à mettre en lumière la somme de connaissances que les Chinois, les Chaldéens et puis les Grecs ont pu tirer de procédés d'observation aussi élémentaires, et rendus plus imparfaits encore par la grossièreté des appareils (horloges à eau et à sable) employés à mesurer et surtout à subdiviser les heures de la nuit.

Leurs efforts ont d'abord eu pour but de déterminer les lois du mouvement diurne des étoiles : l'armille n'a pas tardé à leur faire reconnaître que ce mouvement s'effectuait comme si ces astres étaient fixés à une sphère tournant uniformément de l'est à l'ouest, autour d'un axe incliné à l'horizon. Le même instrument leur montra ensuite que le Soleil semblait parcourir, au milieu des fixes, un grand cercle incliné sur l'équateur, et le gnomon leur donna la mesure de cette inclinaison, la date et la position des équinoxes et des solstices, ainsi que la longueur de l'année, lon-

gueur que la considération des levers héliaques de Sirius aurait, d'ailleurs, suffi à déterminer par les observations les plus élémentaires. Par un prodige de sagacité, Hipparque parvint même à découvrir la précession des équinoxes.

Pour la Lune et les planètes, dont le mouvement apparent est plus complexe, les Chaldéens et les Grecs se bornèrent d'abord à fixer la période de leurs mouvements; et l'on doit reconnaître qu'ils avaient fait, sur ce sujet, des observations longues et soignées, observations dont l'exactitude est amplement démontrée par la découverte de la périodicité des éclipses, et la détermination de la durée de la révolution des nœuds de la Lune.

Plus tard, les Égyptiens et les Grecs ayant étudié de plus près les stations et les rétrogradations des planètes, ainsi que l'inégalité des mouvements angulaires apparents du Soleil, tous les efforts d'Hipparque, d'Aristote et de ses disciples se portèrent vers la solution d'un problème qui se posait ainsi : expliquer, par un système de mouvements circulaires uniformes, les inégalités des mouvements du Soleil, de la Lune et des planètes. C'est là le but du système des cercles excentriques et du système des épycicles, tel qu'il a été formulé par Ptolémée dans l'Almageste. M. Gyldén cherche quelle doit être, dans ces diverses hypothèses, la loi des variations des longitudes géocentriques, et il montre, par quelques calculs simples, qu'elle ne peut satisfaire à la réalité des choses.

La dernière partie de ce premier Chapitre est consacrée à l'étude de l'Astronomie des Arabes; l'auteur montre que ces derniers, Albategnius, Ebn-Younis, Aboul Wefâ, n'ont rien innové, et qu'ils se sont bornés, suivant pas à pas l'exemple de Ptolémée, à ajouter au système du monde un épicycle nouveau chaque fois que la perfection croissante des observations montrait une différence sensible entre les positions théoriques d'un astre et les positions réelles. Les Tables alphonsines, publiées en 1252, sont la dernière expression de ce système.

Pendant les trois cents ans qui suivent, l'Astronomie ne fait aucun progrès : Peurbach et Regiomontanus sont les seuls qui observent encore, sans se préoccuper exclusivement d'Astrologie.

On était, cependant, à la veille d'une révolution complète, que les Tables alphonsines elles-mêmes auraient pu indiquer. Elles donnaient, en effet, aux moyens mouvements du centre, des épicycles

de Mercure et de Vénus une grandeur précisément égale à celle du moyen mouvement du centre de l'épicycle solaire. En remarquant alors, dit M. Gyldén, que ces deux planètes ne s'éloignent jamais beaucoup du Soleil, on pouvait arriver à supposer, comme quelques anciens l'ont peut-être fait (¹), qu'elles tournaient autour du Soleil; de là à l'hypothèse que le Soleil était le centre du monde et que toutes les planètes tournaient autour de lui, il n'y avait qu'un pas. Que Copernic ait pu puiser cette idée dans les leçons qu'il entendit à Bologne, ou qu'il l'ait trouvée dans quelque auteur plus ancien, cela est de mince importance; ce qui lui appartient incontestablement, c'est d'avoir donné, en 1543, dans son *De revolutionibus orbium cœlestium,* la preuve mathématique que l'on pouvait rendre compte des apparences du mouvement des planètes, en supposant qu'elles tournaient toutes autour du Soleil, et que, de plus, la Terre tournait sur elle-même.

Comment Kepler, profitant des observations de Copernic, de Tycho Brahe et de celles qu'il avait faites lui-même, a pu arriver à formuler, en 1609, les lois qui portent son nom, c'est ce que M. Gyldén montre ensuite par une série de démonstrations élémentaires des plus ingénieuses, dont l'ensemble forme une étude complète du mouvement elliptique des planètes.

Le Chapitre II traite, nous l'avons déjà dit, de la loi de l'attraction universelle. Après avoir rapidement analysé les travaux mécaniques de Galilée sur le pendule, la chute des corps et le mouvement des projectiles, M. Gyldén consacre une quinzaine de pages au développement des notions de Mécanique sur la composition des forces et des vitesses, sur la force centrifuge ou centripète dans les mouvements curvilignes, qui lui sont indispensables pour l'interprétation des lois de Kepler et l'exposé de la loi de l'attraction dans le mouvement elliptique des planètes. Passant alors à la gravitation universelle, l'auteur démontre successivement que la force avec laquelle le Soleil attire les planètes est inversement proportionnelle au carré des distances, que la pesanteur est un cas particulier de cette attraction, et, enfin, que l'attraction

(¹) Cette question a été discutée avec un soin particulier par M. Schiaparelli, « *I precursori di Copernico nell' antichità.* » dans le nº III des *Publications de l'Observatoire de Milan* (1873).

newtonienne est la loi générale de l'action mutuelle des corps planétaires. La conséquence nécessaire de cet examen est l'explication des marées.

La loi de Newton a, d'ailleurs, d'autres conséquences non moins importantes pour la théorie des mouvements planétaires. Un volume entier serait nécessaire pour les établir toutes, et M. Gyldén s'est proposé d'écrire un ouvrage élémentaire; aussi n'examine-t-il qu'un seul de ces problèmes, celui qui est relatif à l'action mutuelle des trois corps planétaires. Sans entrer dans le détail du calcul des perturbations, l'auteur indique cependant la nature exacte du problème, les diverses méthodes qui peuvent conduire à sa solution, et il développe les calculs de manière à obtenir les premiers termes des formules complètes. Comme conséquence, il établit alors que les grands axes des orbites planétaires et les moyens mouvements des planètes ne sont sujets à aucune perturbation séculaire; qu'il y a dans les inclinaisons une variation d'une période très-longue, en quelque sorte séculaire; que les longitudes des périhélies et celles des nœuds sont assujetties à une variation séculaire.

Les calculs qui conduisent à ces conséquences importantes, au point de vue de la stabilité de notre système, ont été exposés par M. Gyldén avec le plus grand soin et une clarté qui ne laisse rien à désirer; ils pourraient être facilement développés devant des candidats à la licence mathématique, et l'ouvrage de l'astronome suédois est ainsi de nature à rendre les plus grands services à notre enseignement des Facultés.

Le troisième Chapitre des *Grundlehren der Astronomie* est consacré à l'étude des procédés modernes d'observations. Après avoir défini les divers systèmes de coordonnées, planes ou sphériques, qui peuvent être employés pour déterminer la position d'un astre, et montré leurs relations géométriques ou trigonométriques, M. Gyldén donne, en quelques lignes, les formules de parallaxe qui permettront de réduire au centre de la Terre les observations faites à sa surface.

Le second paragraphe de ce même Chapitre traite ensuite de la lunette méridienne, du cercle mural, de l'équatorial et des corrections que demandent les observations faites à ces divers instruments. Ni la description, ni la théorie de ces appareils ne sont assez com-

plètes pour être utiles à des astronomes de profession qui auraient à faire des observations réelles; mais elles renferment tout ce qui est indispensable à des étudiants : c'est, d'ailleurs, à cette catégorie de lecteurs que s'adresse le volume que nous avons sous les yeux.

Le Chapitre III se termine, enfin, par quelques pages relatives aux changements périodiques que la vitesse de la lumière, combinée avec le mouvement de la Terre, produit dans la position apparente des étoiles.

Le Chapitre IV, entièrement consacré aux recherches astronomiques modernes, résume, d'une manière rapide, l'état de nos connaissances sur les distances absolues des corps de notre système solaire, sur la distance de ce système aux étoiles, et, enfin, sur le mouvement des groupes stellaires, doubles ou multiples; quelques considérations sur le mouvement propre des étoiles, leur éclat et leur distribution dans l'espace le terminent.

Tel est le résumé, un peu bref peut-être, de l'Ouvrage de M. H. Gyldén; il suffira, je l'espère, à caractériser le plan de l'auteur, et à montrer combien est rationnelle la méthode qu'il a employée. Mais il est une chose qu'une analyse est dans l'impossibilité de faire apprécier : c'est le charme de l'exposition et la rigueur de l'enchaînement des démonstrations; à ce double point de vue, les *Grundlehren der Astronomie* méritent une place d'honneur dans la bibliothèque des professeurs d'Astronomie. G. R.

MÉLANGES.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ;

Par M. G. DARBOUX.

Toute équation différentielle du premier ordre établit une relation entre un point quelconque de l'une des courbes satisfaisant à cette équation et la tangente en ce point. Dans son Mémoire sur les connexes, Clebsch a, le premier, écrit cette relation en utilisant les coordonnées homogènes, employées déjà avec tant de succès en Géométrie analytique et en Algèbre supérieure. Si l'on désigne

par x, y, z les coordonnées homogènes ou trilinéaires d'un point, et par u, v, w celles d'une droite, toute équation de la forme

$$(1) \qquad \varphi(u, v, w \mid x, y, z) = 0,$$

qui sera homogène séparément par rapport aux deux systèmes de variables x, y, z et u, v, w, pourra être considérée comme une équation différentielle, si l'on ajoute à la relation précédente : 1° la condition que la droite (u, v, w) passe par le point (x, y, z), condition qui s'exprime par l'équation

$$(2) \qquad ux + vy + wz = 0;$$

2° la condition que la droite (u, v, w) soit la tangente à la courbe définie par l'équation au point (x, y, z). Cette deuxième condition s'exprime par la relation

$$(3) \qquad udx + vdy + wdz = 0.$$

On peut remarquer que, si l'on différentie l'équation (2) en tenant compte de l'équation (3), on aura

$$(4) \qquad xdu + ydv + zdw = 0,$$

et cette nouvelle équation, conséquence des deux précédentes, ne contiendra, comme elles, que les différentielles du premier ordre.

Au moyen des formules (2), (3), (4), on peut donner deux formes différentes à l'équation différentielle (1). Des relations (2) et (3) on tire

$$(5) \qquad \frac{u}{ydz - zdy} = \frac{v}{zdx - xdz} = \frac{w}{xdy - ydx},$$

et, en remplaçant dans l'équation (1) u, v, w par les quantités qui leur sont proportionnelles, on obtiendra la première forme

$$(6) \qquad \varphi(ydz - zdy, zdx - xdz, xdy - ydx \mid x, y, z) = 0,$$

que l'on peut donner à l'équation proposée, et où figurent seulement les coordonnées ponctuelles x, y, z et leurs différentielles. Il suffira d'y faire $z = 1$, $dz = 0$, pour retrouver la forme habituelle

$$F(dx, dy \mid x, y) = 0,$$

où F est homogène par rapport à dx, dy, et est d'ailleurs une fonction quelconque de x, y.

Mais on déduit encore des équations (2) et (4) les suivantes :

$$(7)\qquad \frac{x}{v\,dw - w\,dv} = \frac{y}{w\,du - u\,dw} = \frac{z}{u\,dv - v\,du},$$

qui permettent de faire disparaître x, y, z de l'équation (1) et d'écrire cette équation sous la forme

$$(8)\qquad \varphi(u, v, w \mid v\,dw - w\,dv,\ w\,du - u\,dw,\ u\,dv - v\,du) = 0,$$

qui contient seulement les coordonnées de la tangente et leurs différentielles.

Si, au lieu de traiter u, v, w comme des coordonnées tangentielles, on voulait les considérer comme définissant un point, cette seconde équation, au lieu de définir les mêmes courbes que l'équation (6), conviendrait aux polaires réciproques de ces courbes par rapport à la conique dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

La double forme de l'équation différentielle est donc la traduction analytique de ce fait important, signalé par M. Chasles dans l'*Aperçu historique* pour le cas plus général des équations aux dérivées partielles, que, si des courbes satisfont à une équation différentielle du premier ordre, il en est de même de leurs polaires réciproques.

Nous ne nous occuperons dans ce Mémoire que des équations différentielles qui sont du premier degré par rapport à u, v, w, et qu'on peut mettre par conséquent sous la forme

$$Lu + Mv + Nw = 0,$$

ou

$$(a)\qquad L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dz) = 0,$$

L, M, N désignant des fonctions homogènes de x, y, z, nécessairement du même ordre. Nous ne traiterons que des équations algébriques, et nous pourrons, par conséquent, admettre que L, M, N sont des polynômes homogènes d'un même degré, que nous désignerons par m.

La première remarque à faire relativement à cette équation, c'est que, sans changer la relation entre les six quantités x, y, z, dx, dy, dz, on peut donner à L, M, N une infinité de valeurs. En effet, si l'on remplace L, M, N par $L + Ax$, $M + Ay$, $N + Az$,

A désignant un polynôme quelconque d'ordre $m-1$, on verra sans peine que, dans l'équation (a), tous les termes qui contiennent A ont une somme nulle, et que, par conséquent, l'équation n'est pas changée.

Parmi toutes les formes différentes que, en vertu de la remarque précédente, on peut donner à l'équation proposée, on peut en distinguer une, que l'on pourrait appeler la *forme normale*, et qui est caractérisée par la propriété suivante :

Pour cette forme on a identiquement

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0.$$

Voyons d'abord comment on pourra l'obtenir. Si l'on pose

$$L_1 = L + Ax,$$
$$M_1 = M + Ay,$$
$$N_1 = N + Az,$$

A désignant toujours un polynôme d'ordre $m-1$, l'équation (a) pourra s'écrire

(9) $$L_1(y\,dz - z\,dy) + M_1(z\,dx - x\,dz) + N_1(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

et l'on trouvera

$$\frac{\partial L_1}{\partial x}+\frac{\partial M_1}{\partial y}+\frac{\partial N_1}{\partial z}=\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}+(m+2)A;$$

on pourra donc toujours déterminer A de telle manière que le premier membre de l'équation précédente soit nul. Il suffira de choisir pour A le polynôme défini par l'équation

(10) $$(m+2)A = -\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}.$$

On voit que la forme précédente existe toujours et est unique.

Nous emploierons peu cette forme normale de l'équation différentielle; au contraire, nous aurons souvent à considérer la fonction qui figure dans le second membre de l'équation précédente; aussi la désignerons-nous par une seule lettre, *toujours la même*, H, et nous poserons

(11) $$H = \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}.$$

Nous verrons que H est un invariant; la forme normale pour laquelle on a $H = 0$ se conservera donc à travers toutes les transformations.

Au nombre des formes différentes qu'on peut donner à l'équation différentielle, on peut encore signaler les suivantes : supposons que dans L, par exemple, on isole tous les termes qui contiennent x, en sorte que L s'écrive

$$L = l + l'x,$$

l étant une fonction homogène de y et de z seulement. En prenant pour A la valeur $-l'$, la nouvelle valeur L_1 de L, définie par les formules (8), ne contiendra plus que y, z. On pourra de même choisir A de telle manière que M ne contienne que x, z, ou que N ne contienne que x, y.

Le nombre des paramètres arbitraires qui figurent dans l'équation différentielle, et qui était en apparence de

$$3\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1,$$

sera ainsi réduit à

$$m^2 + 4m + 2.$$

En particulier, si l'un des polynômes L, M, N est divisible par la variable qui lui correspond, par exemple, si L est divisible par x, alors, en prenant pour A dans les équations (8) le quotient entier $\frac{-L}{x}$, la valeur nouvelle L_1 de L sera nulle, et l'équation deviendra

$$M_1(z\,dx - x\,dz) + N_1(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

et sous cette forme on aperçoit immédiatement la solution particulière

$$x = 0.$$

Cette remarque peut être rattachée à une autre de même nature, faite par M. Zeuthen, sur les équations différentielles algébriques écrites sous la forme ordinaire.

Considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{f_1(x,y)}, \tag{12}$$

où f, f_1 sont des polynômes du $m^{\text{ième}}$ ordre. Si l'on veut écrire cette équation avec les coordonnées homogènes, il faudra y remplacer x, y par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, ce qui donnera

$$\varphi(x, y, z)(z\,dx - x\,dz) + \varphi_1(x, y, z)(y\,dz - z\,dy) = 0,$$

φ, φ_1 étant des polynômes homogènes d'ordre m. On voit que l'équation admettra la solution particulière

$$z = 0,$$

c'est-à-dire la droite de l'infini. Toutefois, cette solution pourra disparaître ou plutôt être mise en facteur, si les polynômes φ, φ_1 sont tels que

$$y\varphi_1 - x\varphi$$

soit divisible par z; et si l'on supprime alors le facteur z, on obtiendra une nouvelle équation, qui n'admettra plus nécessairement la solution $z = 0$.

C'est ce qui arrive, notamment si l'équation a été écrite sous la forme adoptée par M. Fouret,

$$\text{(13)} \qquad L\frac{dy}{dx} - M + N\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0,$$

où L, M, N sont des polynômes d'un même degré. Si dans cette équation on remplace x, y par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, on retrouvera précisément l'équation (a) qui nous a servi de point de départ.

Toutes ces remarques préliminaires n'ont rien d'essentiellement nouveau; mais il nous a paru utile de les faire, afin de bien établir dans l'esprit du lecteur le lien qui existe entre les diverses formes de l'équation différentielle : la forme ordinaire, représentée par l'équation (12), celle de M. Fouret par l'équation (13), et celle de Clebsch par l'équation (a). Mais il est essentiel de remarquer que ces formes ne sont pas les seules que l'on rencontre dans les applications. Bien plus, elles ne se présentent pas d'une manière évidente quand on forme une équation différentielle par l'élimination d'une constante entre une équation et sa dérivée.

En effet, considérons l'équation d'un système de courbes

$$\text{(14)} \qquad f(x, y, z) = C,$$

où f est une fonction homogène de degré zéro, et C la constante arbitraire, l'élimination de cette constante se fait sans difficulté par la différentiation, et l'on obtient ainsi l'équation différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Supposons qu'il y ait un facteur commun à supprimer, des dénominateurs à faire disparaître pour ramener l'équation à la forme entière; si $\frac{1}{\lambda}$ désigne le multiplicateur qu'il faut employer pour effectuer toutes ces opérations et ramener l'équation à la forme entière

(15) $$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

on aura

(16) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda Q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda R.$$

La forme (15) ne ressemble pas à celles que nous avons obtenues; mais les polynômes P, Q, R ne sont pas quelconques, et sont, comme nous allons le reconnaître, assujettis à vérifier une relation.

En effet, $f(x, y, z)$ étant, par hypothèse, une fonction homogène de degré zéro, on aura identiquement

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

ou, en se servant des équations (16),

(17) $$Px + Qy + Rz = 0.$$

Ainsi l'on peut dire que l'élimination d'une constante arbitraire conduit à une équation différentielle de la forme (15), mais où P, Q, R sont des polynômes entiers liés par la relation (17).

La forme (a) que nous avons adoptée rentre bien dans le type précédent; car si l'on pose

(18) $$\begin{cases} P = Mz - Ny, \\ Q = Nx - Lz, \\ R = Ly - Mx, \end{cases}$$

elle prend la forme (15); et d'ailleurs les valeurs P, Q, R satisfont bien à l'identité (17).

Mais on peut établir la réciproque et prouver que *toute équation de la forme*

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

où P, Q, R *sont des polynômes liés par l'équation identique*

$$Px + Qy + Rz = 0,$$

peut être ramenée à la forme (a).

En effet, en vertu de l'identité précédente, P s'annule avec y, z, et, par conséquent, tous ses termes contiennent y ou z. On peut donc poser

$$P = C'y + Bz,$$

C′ et B étant des polynômes de degré inférieur d'une unité à celui de P, et de même

$$Q = C''z + B'x,$$
$$R = Cx + B''y,$$

et l'identité à vérifier deviendra

$$(C' + B')xy + (C + B)xz + (C'' + B'')yz = 0,$$

ce qui exige que $C' + B'$ soient divisibles par z, $C + B$ par y, et $C'' + B''$ par x. On aura donc

$$C' + B' = A''z,$$
$$C + B = A'y,$$
$$C'' + B'' = Ax,$$

avec la condition

$$A + A' + A'' = 0.$$

Comme on peut tirer de cette équation A″ en fonction de A, A′, on sera facilement conduit aux valeurs les plus générales de P, Q, R pouvant satisfaire à l'identité

$$Px + Qy + Rz = 0,$$

et l'on verra facilement que ces valeurs sont, aux notations près, celles qui sont fournies par les formules (18).

Notre travail sera divisé en deux Parties. Dans la première nous

exposerons quelques théorèmes relatifs au multiplicateur, aux solutions particulières algébriques et à l'usage qu'on peut en faire, aux points singuliers et au changement de variables. Dans la seconde, nous ferons une application particulière des propositions générales au cas où L, M, N sont des polynômes du second degré.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Du multiplicateur de l'équation différentielle.

Pour intégrer l'équation différentielle

$$(a) \qquad L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

on peut chercher un facteur μ qui rende l'expression

$$(19) \qquad \mu[L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx)]$$

la différentielle exacte d'une fonction homogène de degré zéro. Alors on aura l'intégrale générale en égalant cette fonction à une constante. Si m désigne, suivant nos conventions, le degré commun des polynômes L, M, N, le facteur μ devra être une fonction homogène de degré $-m-2$ et satisfaire par conséquent à l'équation

$$(20) \qquad x\frac{\partial\mu}{\partial x} + y\frac{\partial\mu}{\partial y} + z\frac{\partial\mu}{\partial z} + (m+2)\mu = 0.$$

En tenant compte de cette relation, les trois conditions d'intégrabilité de la différentielle (19) se réduisent à une seule, qui est

$$(21) \qquad L\frac{\partial\mu}{\partial x} + M\frac{\partial\mu}{\partial y} + N\frac{\partial\mu}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0.$$

Cette équation, très-symétrique, où le coefficient de μ est l'invariant que nous avons désigné par H, suffira à déterminer complétement le multiplicateur cherché.

On sait que l'intégration de cette équation aux dérivées partielles se ramène à celle du système d'équations différentielles ordi-

naires

(22) $$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N} = -\frac{d\mu}{\mu H}.$$

En remarquant que l'équation obtenue en égalant le dernier rapport à l'un des premiers servira à déterminer μ au moyen d'une quadrature, on peut se borner à considérer le système

(23) $$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N}.$$

Je vais montrer directement que *l'intégration de l'équation proposée et celle du système* (23) *sont deux problèmes équivalents.*

Supposons, en effet, que l'on substitue aux variables x, y les suivantes :

$$\alpha = \frac{x}{z}, \quad \beta = \frac{y}{z}.$$

Posons

$$L = L_1 z^m, \quad M = M_1 z^m, \quad N = N_1 z^m;$$

L_1, M_1, N_1 ne dépendront plus que de α, β. L'équation différentielle proposée deviendra

(24) $$-L_1 d\beta + M_1 d\alpha + N_1(\alpha d\beta - \beta d\alpha) = 0,$$

et le système (23)

$$\frac{\alpha dz + z d\alpha}{L_1} = \frac{\beta dz + z d\beta}{M_1} = \frac{dz}{N_1},$$

ce qu'on peut écrire

(25) $$\frac{d\alpha}{L_1 - N_1\alpha} = \frac{d\beta}{M_1 - N_1\beta} = \frac{dz}{zN_1}.$$

L'équation qu'on obtient en égalant les deux premiers rapports est précisément l'équation (24). Si donc on sait intégrer cette équation, c'est-à-dire la proposée, on aura β en fonction de α et, pour achever l'intégration du système (25), il restera à effectuer la quadrature

$$\log z = \int \frac{N_1 d\alpha}{L_1 - N_1\alpha},$$

qui fera connaître z.

Supposons, au contraire, que l'on sache intégrer le système (23)

ou son équivalent (25). Celle des deux intégrales qui contient seulement α, β, c'est-à-dire qui est *homogène et de degré zéro en* x, y, z, sera précisément l'intégrale de l'équation proposée. Du reste, si l'on a les deux intégrales de ce système, il sera très-facile d'en déduire l'intégrale homogène de degré zéro. Ces deux intégrales f, φ étant nécessairement homogènes, si n et n' sont leurs degrés, $f^{n'}\varphi^{-n}$ sera l'intégrale de degré zéro.

La remarque précédente a déjà été faite depuis longtemps pour le cas de l'équation de Jacobi où L, M, N sont des polynômes du premier degré. Dans ce cas, en introduisant la variable auxiliaire t, les équations du système (23) peuvent s'écrire

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{L}, \quad \frac{dy}{dt} = \mathrm{M}, \quad \frac{dz}{dt} = \mathrm{N},$$

et deviennent linéaires. Les intégrales de ces équations sont de la forme

$$\mathrm{X} = \mathrm{C}e^{\alpha t}, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{C}_1 e^{\beta t} \quad \mathrm{Z} = \mathrm{C}_2 e^{\gamma t},$$

X, Y, Z désignant trois fonctions linéaires homogènes de x, y, z et $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3$ trois constantes arbitraires. On en déduit que

$$\mathrm{X}^{\beta-\gamma} \quad \mathrm{Y}^{\gamma-\alpha} \quad \mathrm{Z}^{\alpha-\beta} = \text{const.}$$

est une intégrale du système (23) et, comme cette intégrale est homogène et de degré zéro, elle convient également à l'équation proposée.

Dans le cas où L, M, N sont de degré supérieur au premier, les équations

$$(26) \qquad \frac{dx}{dt} = \mathrm{L}, \quad \frac{dy}{dt} = \mathrm{M}, \quad \frac{dz}{dt} = \mathrm{N}$$

cessent d'être linéaires. Leur intégration constitue un problème qui n'a pas encore été abordé dans toute sa généralité, bien que l'on rencontre des systèmes de cette forme dans l'étude de différents problèmes. D'après notre analyse, la solution de ce problème est équivalente à l'intégration de l'équation proposée (a). Tous les résultats acquis dans l'étude de l'une de ces deux questions profiteront, par conséquent, à la solution de l'autre.

II.

Des solutions particulières algébriques.

Revenons à l'équation proposée (a) et cherchons la condition pour qu'elle admette une intégrale particulière définie par l'équation

$$(27) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

que nous pouvons supposer être indécomposable.

En différentiant l'équation précédente, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

et l'on a aussi, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$(28) \qquad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

On déduit des deux dernières équations les suivantes :

$$(29) \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{y\,dz - z\,dy} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{z\,dx - x\,dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{x\,dy - y\,dx},$$

et, par suite, si l'on remplace dans l'équation différentielle les binômes $y\,dz - z\,dy$, ... par les quantités proportionnelles $\frac{\partial f}{\partial x}$, ..., on aura

$$L \frac{\partial f}{\partial x} + M \frac{\partial f}{\partial y} + N \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Mais il importe de remarquer que cette équation n'est pas nécessairement une identité. En effet, si l'on considère l'équation (27) comme représentant une courbe, l'équation (28) n'aura lieu qu'en tous les points de cette courbe. Il suffira donc que l'équation précédente ait lieu seulement pour tous les points de la courbe, c'est-à-dire que le premier membre soit divisible par f et que l'on ait identiquement

$$L \frac{\partial f}{\partial x} + M \frac{\partial f}{\partial y} + N \frac{\partial f}{\partial z} = K f.$$

K désignant un polynôme qui sera nécessairement de l'ordre $m-1$, inférieur d'une unité à celui de L, M, N.

Pour abréger, je désignerai par la lettre Δ l'opération

$$\Delta = L\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y} + N\frac{\partial}{\partial z},$$

que nous aurons souvent à considérer. L'équation précédente pourra donc s'écrire

$$(30) \qquad \Delta f = Kf.$$

En exprimant que les deux membres sont égaux, terme pour terme, on aura les équations de condition qui expriment que f est une solution particulière.

Considérons, par exemple, l'équation de Jacobi pour laquelle L, M, N sont des polynômes du premier degré

$$L = Ax + B''y + C'z,$$
$$M = C''x + A'y + Bz,$$
$$N = B'x + Cy + A''z.$$

Si l'on veut trouver les droites satisfaisant à cette équation, on aura, en écrivant l'équation d'une droite sous la forme

$$ux + vy + wz = 0,$$

à exprimer que l'on a

$$Lu + Mv + Nw = S(ux + vy + wz),$$

S étant une constante. On obtiendra ainsi les trois équations

$$Au + C''v + B'w = Su,$$
$$B''u + A'v + Cw = Sv,$$
$$C'u + Bv + A''w = Sw,$$

qui, par l'élimination de u, v, w, conduiront à une équation du troisième degré pour S. Il y aura donc trois droites qui donneront des solutions particulières de l'équation de Jacobi.

Pour abréger, nous dirons souvent dans la suite qu'une courbe est une solution ou intégrale particulière de l'équation proposée, lorsque l'équation de cette courbe donne une solution particulière de l'équation.

Si, l'équation différentielle étant donnée, on veut exprimer que

$$f = 0$$

est une solution particulière, on ne peut supposer nul le polynôme K, sans restreindre la généralité; au contraire, si l'on veut trouver les équations différentielles qui admettent une solution donnée, il importe de remarquer que, p étant le degré de f, l'équation (30) pourra s'écrire

$$\left(\mathrm{L} - \mathrm{K}\frac{x}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \left(\mathrm{M} - \mathrm{K}\frac{y}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\mathrm{N} - \mathrm{K}\frac{z}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Or, si l'on pose

$$\mathrm{L}_1 = \mathrm{L} - \mathrm{K}\frac{x}{p},$$

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{M} - \mathrm{K}\frac{y}{p},$$

$$\mathrm{N}_1 = \mathrm{N} - \mathrm{K}\frac{z}{p},$$

et si l'on remarque que K est de l'ordre $m-1$, on voit que $\mathrm{L}_1, \mathrm{M}_1, \mathrm{N}_1$ sont des polynômes que l'on peut substituer à L, M, N sans changer l'équation différentielle. Si donc il s'agit d'exprimer qu'une équation différentielle, dont les coefficients sont inconnus, admet une première solution f, on pourra chercher à déterminer L, M, N, de telle manière que l'équation

$$(31) \qquad \mathrm{L}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{M}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{N}\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ait lieu identiquement. Mais, si l'on a ensuite à exprimer que la même équation admet une seconde solution, on ne pourra plus supposer nul le polynôme K relatif à cette nouvelle solution. Avant de continuer ces recherches, nous allons donner un théorème général sur la manière de satisfaire à des équations semblables à l'équation (31).

III.

Sur l'identité $\mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' + \mathrm{CC}' = 0$.

Considérons six polynômes homogènes en x, y, z, satisfaisant à l'identité

$$(32) \qquad \mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' + \mathrm{CC}' = 0.$$

Je dis que, si les trois équations

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

n'ont aucune solution commune, c'est-à-dire si les trois courbes représentées par ces équations n'ont aucun point commun, on aura

$$(33) \qquad \begin{cases} A' = NB - MC, \\ B' = LC - NA, \\ C' = MA - NB, \end{cases}$$

L, M, N étant des polynômes convenablement choisis.

Pour démontrer cette proposition dans toute sa généralité, je m'appuierai sur un théorème de M. Noether, dont M. Halphen a donné une démonstration nouvelle (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. V, p. 160) et qu'on peut énoncer comme il suit :

Étant donnés trois polynômes f, φ, ψ, fonctions de x, y, pour que l'on ait

$$f = A\varphi + B\psi,$$

A *et* B *étant des polynômes convenablement choisis, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

Soit $x = \alpha$, $y = \beta$ un quelconque des systèmes de solutions des équations

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0;$$

il faudra que, a et b désignant des séries ordonnées suivant les puissances de $x - \alpha$, $y - \beta$, on puisse déterminer les coefficients de ces séries de telle manière que l'on ait

$$f = a\varphi + b\psi.$$

Ces conditions seront d'ailleurs suffisantes pourvu qu'elles soient remplies pour tous les systèmes de solutions communes des équations

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0.$$

Ce théorème étant admis, il est facile d'en faire l'application. L'identité (32) nous donne

$$C' = -\frac{A'}{C}A - \frac{B'}{C}B.$$

Or faisons pour un instant $z = 1$. Pour chaque système de solutions $x = \alpha$, $y = \beta$, des équations $A = 0$, $B = 0$, C n'est pas nul, par hypothèse. Les quotients $-\frac{A'}{C}$ $-\frac{B'}{C}$ sont donc développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances de $x - \alpha$, $y - \beta$. Les conditions exigées par le théorème précédent sont donc évidemment remplies et par conséquent C' est de la forme

$$C' = M'A + NB,$$

où M', N sont des polynômes. On verra de même que A', B' sont des formes suivantes :

$$A' = M''B + N'C,$$
$$B' = MC \ + N''A.$$

Écrivons maintenant que l'identité (32) est satisfaite et nous aurons l'équation

$$(M + N)BC + (M' + N')AC + (M'' + N'')AB = 0,$$

à laquelle devront satisfaire les six polynômes M, N, ...

D'ailleurs, A, B, C sont premiers entre eux deux à deux, puisque les équations

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

n'ont, par hypothèse, aucune solution commune ; par conséquent, A, devant, d'après l'identité précédente, diviser $(M + N)BC$, divisera $M + N$, et l'on aura

$$M + N = KA,$$

et de même

$$M' + N' = K'B,$$
$$M'' + N'' = K''C,$$

K, K', K'' étant des polynômes qui devront satisfaire à l'identité

$$K + K' + K'' = 0.$$

Or trois polynômes satisfaisant à cette identité peuvent toujours être représentés par les formules symétriques

$$K \ = S' - S'',$$
$$K' = S'' - S,$$
$$K'' = S \ - S'.$$

Il suffirait, par exemple, de faire $S'' = 0$, $S = -K'$, $S' = K$, pour retrouver l'identité précédente. On aura donc

$$\begin{aligned} M + N &= A(S' - S''), \\ M' + N' &= B(S'' - S), \\ M'' + N'' &= C(S - S'), \end{aligned}$$

et, si l'on pose

$$\begin{aligned} M - AS' &= -N - AS'' = U, \\ M' - BS'' &= -N' - BS = V, \\ M'' - CS &= -N'' - CS' = W, \end{aligned}$$

les formules qui donnent A′, B′, C′ prendront la forme

$$\begin{aligned} A' &= BW - CV, \\ B' &= CU - AW, \\ C' &= AV - BU, \end{aligned}$$

qui est, aux notations près, celle qu'il s'agissait d'établir.

La proposition précédente peut être utile dans différentes recherches. Dans tous les cas, elle a une application évidente dans la question qui nous occupe. Supposons que l'on cherche la condition pour que l'équation différentielle que nous étudions (a) admette comme solution particulière une courbe représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

et n'ayant pas de point multiple; on devra avoir, avec des valeurs convenablement choisies de L, M, N,

$$L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Les trois équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

n'ayant pas de solutions communes, on aura, en vertu du lemme démontré précédemment,

$$(34)\qquad \left\{ \begin{aligned} L &= W\frac{\partial f}{\partial y} - V\frac{\partial f}{\partial z}, \\ M &= U\frac{\partial f}{\partial z} - W\frac{\partial f}{\partial x}, \\ N &= V\frac{\partial f}{\partial x} - U\frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

ou, si l'on demande les valeurs les plus générales de L, M, N convenant à l'équation,

$$(35)\quad \begin{cases} L = Ax + W\dfrac{\partial f}{\partial y} - V\dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ M = Ay + U\dfrac{\partial f}{\partial z} - W\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ N = Az + V\dfrac{\partial f}{\partial x} - U\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

Quant à l'équation, si on veut l'écrire sous une des formes que nous avons proposées,

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

on trouvera

$$(36)\quad \begin{cases} P = \alpha U f - \dfrac{\partial f}{\partial x}(Ux + Vy + Wz), \\ Q = \alpha V f - \dfrac{\partial f}{\partial y}(Ux + Vy + Wz), \\ R = \alpha W f - \dfrac{\partial f}{\partial z}(Ux + Vy + Wz), \end{cases}$$

α étant le degré de f, et par conséquent l'équation pourra s'écrire

$$(37)\quad \alpha f(U\,dx + V\,dy + W\,dz) - (Ux + Vy + Wz)\,df = 0,$$

la solution $f = 0$ étant ainsi mise en évidence.

J'ajouterai enfin que l'invariant H aura pour valeur, si l'on adopte les formules (35),

$$(38)\quad H = 4A + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

IV.

De l'emploi des solutions particulières algébriques pour la détermination de l'intégrale générale.

Après avoir indiqué comment on recherchera des solutions particulières *algébriques* de l'équation proposée, nous allons montrer comment on pourra déterminer l'intégrale générale toutes les fois qu'on aura un nombre suffisant de ces solutions.

Il est clair que si l'on a une fonction homogène de degré zéro, satisfaisant à l'équation

$$\Delta\varphi = 0,$$

on aura l'intégrale de l'équation proposée en égalant cette fonction à une constante. Cette proposition, conséquence des théorèmes de l'article I, peut aussi se démontrer directement. En effet, on a, par hypothèse,

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

$$L\frac{\partial\varphi}{\partial x} + M\frac{\partial\varphi}{\partial y} + N\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{Ny - Mz} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{Lz - Mx} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{Mx - Ny}.$$

Si donc on remplace, dans l'équation proposée

$$(Ny - Mz)\,dx + (Lz - Mx)\,dy + (Mx - Ny)\,dz = 0,$$

les dénominateurs des rapports précédents par les numérateurs qui leur sont proportionnels, l'équation deviendra

$$d\varphi = 0,$$

d'où l'on conclura

$$\varphi = C.$$

Ce point étant admis, supposons que l'on connaisse p solutions particulières algébriques de l'équation différentielle proposée $u_1, u_2, \ldots, u_p$; ces solutions donnent naissance à des équations identiques

$$(39) \qquad \Delta u_1 = K_1 u_1, \quad \Delta u_2 = K_2 u_2, \quad \ldots, \quad \Delta u_p = K_p u_p,$$

où $K_1, K_2, \ldots, K_p$ seront des polynômes du degré $m - 1$.

Parmi les propriétés du symbole Δ, on peut remarquer la suivante :

$$(40) \qquad \Delta\varphi(u, v, w, \ldots) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\Delta w + \ldots.$$

En faisant une application particulière de cette formule, on aura

$$\Delta(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}) = (\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p)\, u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant des exposants constants. Si donc on peut disposer de ces exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de telle manière que l'on ait

$$(41) \qquad \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p = 0,$$

et aussi, $h_1, h_2, \ldots, h_p$ désignant les degrés de $u_1, u_2, \ldots, u_p$,

$$(42) \qquad h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \ldots + h_p\alpha_p = 0,$$

$u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p}$ sera une fonction homogène de degré zéro, satisfaisant à l'équation

$$\Delta\varphi = 0.$$

L'intégrale générale sera donc

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} = C.$$

Or les polynômes K sont du degré $m - 1$, et ils contiennent, en général, $\frac{m(m+1)}{2}$ termes. L'équation (41) équivaut donc à $\frac{m(m+1)}{2}$ équations du premier degré entre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Dans le cas le plus défavorable, il y aura donc, en tenant compte de l'équation (42), à satisfaire à $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ équations, et, comme elles sont homogènes, on devra avoir au moins $\frac{m(m+1)}{2} + 2$ inconnues α_1. Comme des équations homogènes ne sont jamais impossibles, on aura donc le théorème suivant, qui n'est sujet à aucune exception :

Si l'on connaît $\frac{m(m+1)}{2} + 2 = q$ *solutions particulières algébriques de l'équation différentielle proposée* $u_1, u_2, \ldots, u_q$, *l'intégrale générale de cette équation pourra toujours s'obtenir, et sera de la forme*

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_q^{\alpha_q} = C.$$

Nous verrons, dans les applications, que la méthode réussit le plus souvent sans qu'on ait à connaître un aussi grand nombre de solutions particulières, et la théorie des points singuliers de l'équation nous expliquera pourquoi il en est ainsi.

Le théorème précédent, appliqué à l'équation de Jacobi, conduit de la manière la plus simple à l'intégrale de cette équation.

Nous avons vu que cette équation admettait trois droites comme solutions particulières; soient

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

les équations de ces droites : on aura des identités

$$\Delta X = SX, \quad \Delta Y = S'Y, \quad \Delta Z = S''Z,$$

où S, S′, S″ seront des constantes. On en déduira

$$\Delta\left(X^{S''-S'} Y^{S'-S''} Z^{S'-S}\right) = 0,$$

et par conséquent l'intégrale sera

$$X^{S''-S'} Y^{S-S''} Z^{S'-S} = C,$$

ce qui est le résultat connu.

Mais on peut indiquer un autre usage des solutions particulières. Reprenons l'identité

$$\Delta\left(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}\right) = \left(\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p\right) u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}.$$

Si l'on peut déterminer les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de manière à satisfaire aux deux équations

$$(43) \quad \begin{cases} \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p = -\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial z} = -H, \\ h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \ldots + h_p\alpha_p = -m-2, \end{cases}$$

on aura

$$\Delta\left(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}\right) + H u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} = 0,$$

et, par conséquent, la fonction $u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p}$, étant du degré $-m-2$ que doit avoir le multiplicateur, et satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles qui le définit, sera une valeur particulière de ce multiplicateur. L'intégration se trouvera ainsi ramenée aux quadratures.

Les équations (43) équivalent à $\dfrac{m(m+1)}{2} + 1$ équations du premier degré. On a donc le théorème suivant :

Toutes les fois que l'on connaîtra $\dfrac{m(m+1)}{2} + 1 = q - 1$ *solutions particulières algébriques de l'équation différentielle proposée*

$u_1, u_2, \ldots, u_q - 1$, *on pourra en déduire une valeur particulière du multiplicateur, qui sera de la forme*

$$\mu = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_{q-1}^{\alpha_{q-1}}.$$

A la vérité, ce théorème paraît sujet à une exception; car, si le déterminant des équations à résoudre était nul, on pourrait craindre que ces équations fussent impossibles. Mais alors celles qu'on obtient en supprimant dans les équations (43) les seconds membres H et $-(m+2)$ deviennent des équations homogènes en nombre égal à celui des inconnues, et dont le déterminant est nul. Il est donc possible de satisfaire aux équations

$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_{q-1} K_{q-1} = 0,$$
$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_{q-1} h_{q-1} = 0;$$

c'est-à-dire que l'on peut appliquer notre premier théorème, et obtenir l'intégrale générale sous la forme

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_{q-1}^{\alpha_{q-1}} = C.$$

Ainsi, dans le cas d'exception du second théorème, on est conduit d'une manière plus rapide à l'intégrale cherchée.

Nous venons de reconnaître comment, au moyen d'un certain nombre de solutions particulières algébriques, on peut former le multiplicateur de l'équation différentielle proposée. Réciproquement, supposons que ce multiplicateur μ soit de la forme

$$\mu = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_p^{\alpha_p},$$

$f_1, f_2, \ldots, f_p$ étant des polynômes algébriques, et les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des nombres quelconques positifs ou négatifs réels ou imaginaires. En écrivant que l'équation aux dérivées partielles du multiplicateur est satisfaite par la valeur précédente, on aura une équation que l'on peut écrire

$$\alpha_1 \frac{\Delta f_1}{f_1} + \alpha_2 \frac{\Delta f_2}{f_2} + \ldots + \alpha_p \frac{\Delta f_p}{f_p} + H = 0.$$

On peut d'ailleurs supposer que $f_1, f_2, \ldots, f_p$ soient indécomposables; s'il en était autrement, il suffirait de les remplacer dans l'expression de μ par les facteurs dont ils sont composés. L'équation

précédente ne pourra donc avoir lieu que si f_i divise Δf_i. Il faudra donc que l'on ait

$$\Delta f_1 = K_1 f_1, \ldots, \Delta f_p = K_p f_p,$$

$K_1, \ldots, K_p$ étant des polynômes, qui d'ailleurs devront satisfaire à l'équation

$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p + H = 0.$$

On obtient donc le théorème suivant :

Si le multiplicateur de l'équation différentielle proposée est un produit de plusieurs facteurs rationnels élevés chacun à une puissance quelconque, chacun de ces facteurs, égalé à zéro, donnera une solution particulière de l'équation proposée.

Les théorèmes précédents nous conduisent donc naturellement à une nouvelle méthode d'intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. Étant donnée une équation à intégrer, on en cherchera différentes solutions particulières algébriques, et, au moyen de ces solutions, on formera le facteur ou l'intégrale générale toutes les fois que cela sera possible, en employant les théorèmes que nous venons de faire connaître. C'est cette méthode que nous appliquerons, dans la seconde Partie de ce travail, à l'équation la plus simple après celle de Jacobi, celle pour laquelle les polynômes L, M, N sont du second degré. Mais, avant d'aborder cette application et pour la faciliter, nous allons étudier un groupe de points remarquables que nous appellerons les *points singuliers*, et qui sont ceux pour lesquels la direction de la tangente donnée par l'équation différentielle est indéterminée.

V.

Des points singuliers de l'équation différentielle.

Reprenons l'équation différentielle

(44) $$L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

ou

(45) $$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Il y a toujours des points du plan pour lesquels on a

$$(46)\qquad \begin{cases} P = Mz - Ny = 0, \\ Q = Nx - Lz = 0, \\ R = Ly - Mx = 0; \end{cases}$$

car les équations précédentes peuvent s'écrire

$$(47)\qquad \frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z},$$

et équivalent à deux seulement. Pour de tels points, l'équation (45) sera identiquement satisfaite, et la direction de la tangente ne sera plus déterminée par l'équation différentielle. Ainsi :

En tous les points du plan pour lesquels on a

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

l'équation différentielle ne fait pas connaître la direction de la tangente.

Cherchons, en premier lieu, quel sera le nombre de ces points singuliers. On peut rattacher cette recherche à un lemme relatif à six polynômes A, A′, B, B′, C, C′, de degrés l, l', m, m', n, n', satisfaisant à l'identité déjà considérée

$$(48)\qquad AA' + BB' + CC' = 0;$$

il est évident que les degrés des produits AA′, BB′, CC′ sont égaux. On a donc déjà

$$l + l' = m + m' = n + n' = \lambda.$$

Cela posé, je dis que *la somme du nombre des points communs aux trois courbes*

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

et du nombre des points communs aux trois courbes

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0,$$

est égale à

$$\frac{lmn + l'm'n'}{\lambda}.$$

En effet, soient h le nombre des points communs aux trois courbes A, B, C; h' celui des points communs aux trois courbes A′, B′, C′. Tous les points communs à A et à B, au nombre de lm, appartiennent, d'après l'identité (48), à l'une des courbes C, C′. Il y en a h appartenant à C, par hypothèse. Il restera donc $ml - h$ points communs aux trois courbes A, B, C′. D'ailleurs les ln' points communs aux deux courbes A, C′ appartiennent, d'après l'identité, à l'une des courbes B, B′; comme il y en a $ml - h$ appartenant à B, il restera $ln' - lm + h$ points communs aux trois courbes A, B′, C′. Enfin les $m'n'$ points communs aux courbes B′ C′ appartiennent à l'une des courbes A, A′. Comme il y en a $ln' - lm + h$ appartenant à A, il en restera

$$m'n' - ln' + lm - h = h'$$

appartenant à A′, B′, C′. On a donc

$$h + h' = m'n' - ln' + lm,$$

et, en transformant le second membre, on trouvera facilement qu'il est égal à

$$h + h' = \frac{lmn + l'm'n'}{\lambda},$$

comme nous l'avions annoncé.

Appliquons cette proposition générale aux trois équations de degré $m + 1$

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

qui définissent les points singuliers. On a l'identité

$$Px + Qy + Rz = 0.$$

Si donc on considère, d'une part, les courbes P, Q, R, d'autre part, les droites x, y, z, ces droites n'auront aucun point commun, et le lemme précédent nous donnera, pour le nombre des points communs aux trois courbes P, Q, R, la formule

$$\frac{(m+1)^3 + 1}{m+2} = m^2 + m + 1.$$

Tel est le nombre des points singuliers de l'équation pour laquelle L, M, N sont du $m^{\text{ième}}$ degré.

On peut faire quelques remarques utiles au sujet de la disposition de ces points singuliers. D'abord, il ne peut pas y en avoir plus de $m+1$ en ligne droite. En effet, les équations (46), qui définissent les points singuliers, étant du degré $m+1$, s'il y avait plus de $m+1$ points en ligne droite, P, Q, R contiendraient en facteur le premier membre de l'équation de la droite qui passe par ces points singuliers, et, après la suppression de ce facteur, l'équation serait ramenée à une autre où les polynômes P, Q, R seraient de degré moindre. Or on peut toujours supposer que l'on a supprimé les facteurs communs à P, Q, R.

Je dis maintenant que, s'il y a $m+1$ points singuliers en ligne droite, cette droite sera une solution particulière de l'équation différentielle. En effet, supposons qu'on ait choisi les axes de telle manière que la droite qui contient $m+1$ points singuliers ait pour équation

$$x=0.$$

Les équations (46) nous montrent que les points singuliers situés sur cette droite doivent satisfaire aux équations

$$Ly=0, \quad Lz=0,$$

et, par conséquent, y et z n'étant pas nuls simultanément, à l'équation unique

$$L=0.$$

L étant du degré m, cela ne peut arriver que si L contient x en facteur, et nous avons vu qu'alors

$$x=0$$

est une solution de l'équation proposée.

Réciproquement, on reconnaîtra que, si une droite est solution particulière, elle contient $m+1$ points singuliers.

Par exemple, dans le cas où L, M, N sont du second degré, toutes les fois que trois des sept points singuliers sont en ligne droite, cette droite donne une solution particulière; et réciproquement, toutes les fois qu'une droite fournira une solution, elle contiendra trois, et seulement trois points singuliers.

Je dis maintenant que $(m+1)p$ des points singuliers ne peuvent jamais être sur une courbe indécomposable C_p de degré p.

toutes les fois que p sera supérieur à 1. En effet, admettons que cette condition soit remplie, et qu'il y ait $p(m+1)$ points sur une courbe représentée par l'équation

$$C_p = 0.$$

Je considère les courbes représentées par l'équation

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0,$$

où α, β, γ sont des constantes, c'est-à-dire les courbes du réseau défini par les points singuliers. Si l'on fait passer ces courbes par un nouveau point de la courbe C_p, elles auront en commun avec elle $(m+1)p+1$ points, et, par conséquent, elles contiendront la courbe C_p tout entière. Il y aura donc deux courbes distinctes du réseau dont les équations seront

$$C_p U = 0, \quad C_p V = 0.$$

En adjoignant à ces deux courbes une troisième courbe quelconque du réseau P', on pourra poser

$$\begin{aligned} P &= aP' + bUC_p + cVC_p, \\ Q &= a'P' + b'UC_p + c'VC_p, \\ R &= a''P' + b''UC_p + c''VC_p, \end{aligned}$$

et, en écrivant que l'identité

$$Px + Qy + Rz = 0$$

est satisfaite, on aura l'équation

$$P'(ax + a'y + a''z) + C_p[U(bx + b'y + b''z) + V(cx + c'y + c''z)] = 0.$$

C_p devra donc diviser le premier terme, et comme p est, par hypothèse, supérieur à 1, C_p divisera P'. Alors P, Q, R seront divisibles par C_p et l'équation différentielle se ramènera à une autre de degré moindre par la suppression de ce facteur.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière d'ordre p de l'équation différentielle proposée. Cette solution f donnera naissance à l'identité

$$L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} = Kf,$$

que l'on peut aussi écrire

$$(49)\quad \left(L - \frac{Kx}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(M - \frac{Ky}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(N - \frac{Kz}{p}\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

D'ailleurs les points singuliers sont définis par les équations (47), que l'on peut écrire

$$L = \lambda x, \quad M = \lambda y, \quad N = \lambda z,$$

en introduisant l'arbitraire λ. En substituant ces valeurs de L, M, N dans l'équation précédente, elle devient

$$\left(\lambda - \frac{K}{p}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0,$$

ou

$$(p\lambda - K)f = 0.$$

Il y aura donc deux séries de points singuliers : 1° ceux qui sont sur la courbe f; 2° ceux qui n'y sont pas nécessairement et pour lesquels on a

$$\lambda = \frac{K}{p},$$

ou

$$L - K\frac{x}{p} = 0, \quad M - K\frac{y}{p} = 0, \quad N - K\frac{z}{p} = 0.$$

Le nombre de ces derniers est facile à déterminer. Appelons-le h, et désignons par h' le nombre des points communs aux trois courbes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Si nous appliquons le lemme démontré au commencement de cet article aux six polynômes qui figurent dans l'identité (49), nous aurons

$$h + h' = \frac{m^3 + (p-1)^3}{m + p - 1}.$$

On en déduit que le nombre des points singuliers qui se trouvent sur la solution particulière f est *au moins* égal à

$$m^2 + m + 1 - h = p(m - p + 2) + h'.$$

En particulier, si la courbe f n'a pas de point singulier, h' sera nul. Mais je n'insiste pas sur cette recherche, la détermination du nombre h' offrant des difficultés quand la courbe a des points multiples.

Le caractère propre des points qui ne sont pas des points singuliers de l'équation différentielle, c'est qu'il passe en ces points une seule branche de courbe satisfaisant à l'équation différentielle. On peut donc affirmer :

1° Que, si une courbe solution particulière a un point multiple d'une espèce quelconque, ce point multiple est un point singulier de l'équation différentielle;

2° Que tous les points communs à deux courbes solutions particulières sont, quelle que soit la relation des deux courbes dans le voisinage de ces points communs, des points singuliers de l'équation différentielle.

Je vais indiquer maintenant comment la considération des points singuliers intervient dans l'application des théorèmes de l'article précédent, et permet de réduire dans bien des cas le nombre des intégrales particulières exigées par ces théorèmes pour la détermination de l'intégrale générale.

Nous avons vu que, étant données p solutions particulières algébriques $u_1, u_2, \ldots, u_p$, qui donnent lieu aux identités

$$(50) \qquad \Delta u_1 = K_1 u_1, \quad \ldots, \quad \Delta u_p = K_p u_p,$$

si l'on peut déterminer des constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, telles que l'on ait

$$(51) \qquad \begin{cases} \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots + \alpha_p K_p = 0, \\ \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_p h_p = 0, \end{cases}$$

$h_1, h_2, \ldots, h_p$ étant les degrés de $u_1, \ldots, u_p$, l'intégrale générale sera de la forme

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} = C.$$

Les équations (51) équivalent, nous l'avons vu, à $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ équations du premier degré entre $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, et, comme ces équations sont homogènes, il faudra connaître en général $\frac{m(m+1)}{2} + 2$ solutions particulières.

Mais supposons que nos p solutions particulières représentent des courbes ne passant pas par q des points singuliers de l'équation. Considérons l'un de ces points singuliers de coordonnées x_i, y_i, z_i. Pour ce point on aura

$$L = \lambda_i x_i, \quad M = \lambda_i, y_i, \quad N = \lambda_i, z_i,$$

et, par conséquent, pour une fonction quelconque f,

$$\Delta f = \lambda_i \left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) = \lambda_i \alpha f,$$

α étant le degré de f. On aura donc en particulier

$$\Delta u_1, = \lambda_i h_1 u_1, \quad \ldots, \quad \Delta u_p = \lambda_i h_p u_p,$$

et, par conséquent, u_1, u_2, ..., u_p n'étant pas nuls par hypothèse,

$$K_1 = \lambda_i h_1 u_1, \quad K_p = \lambda_i h_p u_p,$$

et la première des équations (51), si l'on y substitue x_i, y_i, z_i à la place de x, y, z, deviendra

$$\lambda_i (\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \ldots + \alpha_p h_p) = 0.$$

Si λ_i est nul, elle sera identiquement satisfaite; sinon elle sera identique à la seconde des équations (51).

Or les q équations, que l'on obtient en substituant à x, y, z les coordonnées des q points singuliers, peuvent tenir lieu de q des équations qu'on obtient, en écrivant directement que le polynôme

$$\alpha_1 K_1 + \ldots + \alpha_p K_p$$

a tous ses termes nuls. On voit donc que ces équations se réduiront à $\frac{m(m+1)}{2} - q$ distinctes, s'il y a q points singuliers par lesquels ne passent pas les courbes solutions particulières. Nous avons donc le théorème suivant, qui complète celui de l'article précédent :

Si l'on a $\frac{m(m+1)}{2} + 2 - q = p$ *solutions particulières représentant des courbes ne passant pas par* q *des points singuliers* u_1.

$u_2, \ldots, u_p$ *désignant ces solutions, l'intégrale générale sera de la forme*

$$u_0^{\alpha_1}, u_2^{\alpha_2}, \ldots, u_p^{\alpha_p} = \mathrm{C}.$$

Il est bon toutefois de lever une objection que l'on peut faire à la démonstration précédente. Nous avons admis que, si, dans le polynôme

$$\varphi(x, y, z) = \alpha_1 \mathrm{K}_1 + \ldots + \alpha_p \mathrm{K}_p,$$

on substitue à la place de x, y, z les coordonnées x_i, y_i, z_i des points singuliers, les q équations

$$\varphi(x_1, y_i, z_i) = 0,$$

que l'on obtient ainsi, tiennent lieu de q des équations auxquelles on est conduit en annulant les coefficients de tous les termes de ce polynôme. Il faut donc examiner la question suivante :

Quand on veut exprimer qu'un polynôme de degré $m - 1$, $\mathrm{F}(x, y, z)$ est identiquement nul, les q équations que l'on obtient en écrivant que ce polynôme est nul pour q points peuvent-elles remplacer un nombre égal des équations que l'on obtient en écrivant que ce polynôme a tous ses coefficients nuls?

On verra facilement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les q points ne soient pas dans une relation telle que toute courbe d'ordre $m - 1$, qui contient un certain nombre d'entre eux, passe par quelques-uns des autres. Le théorème précédent ne sera donc exact que si les q points singuliers considérés n'ont pas entre eux la relation particulière que nous venons de définir.

Considérons, par exemple, le cas où L, M, N sont du second degré. Si l'on a deux solutions particulières représentant des courbes ne passant pas par trois points singuliers, l'intégrale générale sera de la forme

$$u_1^{h_2} = \mathrm{C} u_2^{h_1}.$$

Mais ce théorème pourra être en défaut si les trois points singuliers, n'appartenant pas aux courbes u_1, u_2, sont en ligne droite.

Si l'on a trois solutions particulières u_1, u_2, u_3, représentant des courbes ne passant pas par deux points singuliers, l'intégrale sera

de la forme

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} = \mathrm{C}.$$

Et enfin, si l'on a quatre solutions particulières u_1, u_2, u_3, u_4, représentant des courbes ne passant pas par un point singulier, l'intégrale sera de la forme

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} u_4^{\alpha_4} = \mathrm{C},$$

ces deux dernières propositions n'étant sujettes à aucune exception.

VI.

Du changement de variables dans l'équation différentielle.

Supposons qu'aux variables x, y, z on veuille en substituer trois autres α, β, γ, que nous supposerons être des fonctions homogènes de x, y, z, de degrés p, q, r. On peut arriver à ce résultat de différentes manières :

1° Nous avons vu que la fonction homogène de degré zéro qui, égalée à une constante, donne l'intégrale générale de l'équation différentielle, doit satisfaire à l'équation

$$\mathrm{L}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{M}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{N}\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ajoutons l'équation suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

qui exprime que la fonction est homogène et de degré zéro. Avec les nouvelles variables α, β, γ, on reconnaît presque sans calcul que ces équations deviennent

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\Delta\gamma = 0,$$

$$p\alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha} + q\beta\frac{\partial f}{\partial \beta} + r\gamma\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0.$$

D'ailleurs, si l'on remarque que l'équation différentielle, exprimant

que f est constante, est

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma = 0,$$

on aura trois équations entre lesquelles on pourra éliminer les dérivées inconnues de f, et l'on trouvera

$$\Delta\alpha(q\beta\, d\gamma - r\gamma\, d\beta) + \Delta\beta\,(r\gamma\, d\alpha - p\alpha\, d\gamma) + \Delta\gamma\,(p\alpha\, d\beta - q\beta\, d\alpha) = 0,$$

ce qui représente la nouvelle forme de l'équation différentielle.

2° Nous avons vu que l'intégrale de l'équation différentielle est celle des deux intégrales du système

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N},$$

qui est homogène et de degré zéro. Or le système précédent se transforme dans le suivant :

$$(52) \qquad \frac{d\alpha}{\Delta\alpha} = \frac{d\beta}{\Delta\beta} = \frac{d\gamma}{\Delta\gamma},$$

dont il suffira de chercher l'intégrale

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = C,$$

qui est homogène, et de degré zéro, en regardant α comme du degré p, β comme du degré q, γ comme du degré r.

3° On peut enfin, sans beaucoup de peine, effectuer directement le changement de variables. Posons, pour abréger,

$$u = L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) + N(x\,dy - y\,dx),$$

et voyons ce que devient u, quand on remplace x, y, z en fonction de α, β, γ. En introduisant, pour la commodité du calcul, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont trois nombres quelconques, et désignant par D'_a, D'_b, D'_c ses dérivées par rapport à a, b, c, on a

$$u = LD'_a + MD'_b + ND'_c.$$

On a aussi

$$\Delta\alpha = L\frac{\partial\alpha}{\partial x} + M\frac{\partial\alpha}{\partial y} + N\frac{\partial\alpha}{\partial z},$$

$$\Delta\beta = L\frac{\partial\beta}{\partial x} + M\frac{\partial\beta}{\partial y} + N\frac{\partial\beta}{\partial z},$$

$$\Delta\gamma = L\frac{\partial\gamma}{\partial x} + M\frac{\partial\gamma}{\partial y} + N\frac{\partial\gamma}{\partial z};$$

éliminant L, M, N entre ces quatre équations, nous avons

$$\begin{vmatrix} u & D'_a & D'_b & D'_c \\ \Delta\alpha & \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\alpha}{\partial z} \\ \Delta\beta & \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ \Delta\gamma & \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant suivant les éléments de la première colonne,

$$\frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(x, y, z)} u = \Delta\alpha \begin{vmatrix} D'_a & D'_b & D'_c \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} \end{vmatrix} + \ldots,$$

les deux termes non écrits se déduisant du premier par des permutations circulaires effectuées sur α, β, γ.

Multiplions, d'après les règles connues, le coefficient de $\Delta\alpha$ par le déterminant D; en se rappelant que β, γ sont homogènes et de degrés q, r, on trouvera

$$\begin{vmatrix} D'_a & D'_b & D'_c \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} \end{vmatrix} D = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & q\beta & r\gamma \\ 0 & d\beta & d\gamma \end{vmatrix},$$

ce qui donne, pour le coefficient de $\Delta\alpha$, la valeur $q\beta\, d\gamma - r\gamma\, d\beta$.

On aura donc, en substituant cette valeur dans l'expression

de u,

$$\frac{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial(x,y,z)}u = \Delta\alpha(q\beta\,d\gamma - r\gamma\,d\beta) + \Delta\beta(r\gamma\,d\alpha - p\alpha\,d\gamma) + \Delta\gamma(p\alpha\,d\beta - q\beta\,d\alpha),$$

ce qui est d'accord avec les résultats trouvés précédemment.

Si, au lieu du déterminant fonctionnel de α, β, γ, on introduit son inverse

$$\delta = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}, \tag{53}$$

on aura

$$\left\{ \begin{aligned} u = \delta\,\Delta\alpha(q\beta\,d\gamma - r\gamma\,d\beta) + \delta\,\Delta\beta(r\gamma\,d\alpha - p\alpha\,d\gamma) \\ + \delta\,\Delta\gamma(p\alpha\,d\beta - q\beta\,d\alpha), \end{aligned} \right. \tag{54}$$

ou, en posant

$$L' = \delta\,\Delta\alpha, \quad M' = \delta\,\Delta\beta, \quad N' = \delta\,\Delta\gamma, \tag{55}$$

$$u = L'(q\beta\,d\gamma - r\gamma\,d\beta) + M'(r\gamma\,d\alpha - p\alpha\,d\gamma) + N'(p\alpha\,d\beta - q\beta\,d\alpha); \tag{56}$$

L' sera, par rapport à x, y, z, du degré $m - q - r + 2$, et satisfera, par conséquent, à l'équation

$$p\alpha\frac{\partial L'}{\partial\alpha} + q\beta\frac{\partial M'}{\partial\beta} + r\gamma\frac{\partial N'}{\partial\gamma} = (m + 2 - q - r)\,L'.$$

On aura des équations semblables pour M', N'.

En tenant compte de ces formules, on peut aisément former, avec le nouveau système de variables, l'équation à laquelle satisfait le multiplicateur. En écrivant que μu est une différentielle exacte, les trois conditions d'intégrabilité se réduiront à une seule,

$$L'\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} + M'\frac{\partial\mu}{\partial\beta} + N'\frac{\partial\mu}{\partial\gamma} + \mu\left(\frac{\partial L'}{\partial\alpha} + \frac{\partial M'}{\partial\beta} + \frac{\partial N'}{\partial\gamma}\right) = 0, \tag{56}$$

toute pareille à celle que nous avons obtenue pour les variables x, y, z.

On peut encore transformer directement l'équation du multiplicateur

$$L\frac{\partial\mu}{\partial x} + M\frac{\partial\mu}{\partial y} + N\frac{\partial\mu}{\partial z} + H\mu = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\cdots$ par $\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x}$, $\ldots$, on trouvera

$$\Delta\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}+\Delta\beta\frac{\partial\mu}{\partial\beta}+\Delta\gamma\frac{\partial\mu}{\partial\gamma}+\mu\mathrm{H}=0.$$

Si nous comparons cette équation à celle que nous avons obtenue précédemment, nous verrons que les coefficients des dérivées de μ deviennent égaux dans les deux équations, si l'on multiplie la précédente par δ. Il faut donc qu'alors les coefficients de μ soient aussi égaux, ce qui donne

$$(57)\qquad \frac{\partial\mathrm{L}'}{\partial\alpha}+\frac{\partial\mathrm{M}'}{\partial\beta}+\frac{\partial\mathrm{N}'}{\partial\gamma}=\delta\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{N}}{\partial z}\right).$$

Ce résultat pourrait d'ailleurs se vérifier par un calcul direct.

Ainsi cette fonction, que nous avons désignée par H, est un invariant, non-seulement quand on effectue une substitution linéaire, mais aussi quand on prend pour nouvelles variables des fonctions homogènes quelconques des anciennes.

En terminant, nous allons montrer que quelques-uns des résultats précédents sont indépendants de l'homogénéité de l'équation, et les rattacher à la théorie du dernier multiplicateur.

Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{\mathrm{L}}=\frac{dy}{\mathrm{M}}=\frac{dz}{\mathrm{N}},$$

où L, M, N désignent maintenant des fonctions quelconques, qui ne sont pas nécessairement homogènes ; si l'on substitue aux variables x, y, z trois nouvelles variables α, β, γ, les équations primitives deviendront encore

$$\frac{d\alpha}{\Delta\alpha}=\frac{d\beta}{\Delta\beta}=\frac{d\gamma}{\Delta\gamma}.$$

Le multiplicateur du système satisfait à l'équation

$$\mathrm{L}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mathrm{M}\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mathrm{N}\frac{\partial\mu}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{N}}{\partial z}\right)=0.$$

Cette équation deviendra

$$\Delta\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}+\Delta\beta\frac{\partial\mu}{\partial\beta}+\Delta\gamma\frac{\partial\mu}{\partial\gamma}+\mu\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{N}}{\partial z}\right)=0.$$

Il reste à transformer le coefficient de μ. On peut éviter le calcul en employant l'artifice suivant :

Considérons l'intégrale triple

$$V = \iiint \Delta u \, dx \, dy \, dz = \iiint \left(L \frac{\partial u}{\partial x} + M \frac{\partial u}{\partial y} + N \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz.$$

La variation de cette intégrale, quand la fonction u, qui est quelconque, changera de forme, est

$$\delta V = - \iiint \delta u \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz.$$

D'autre part, si l'on effectue le changement de variables, l'intégrale V devient

$$\iiint \left(\Delta\alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \Delta\beta \frac{\partial u}{\partial \beta} + \Delta\gamma \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) \delta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

δ désignant toujours

$$\delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

La variation de l'intégrale sous sa nouvelle forme est

$$\delta V = - \iiint \delta u \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta \, \Delta\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\delta \, \Delta\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\delta \, \Delta\gamma) \right] d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

En comparant les deux expressions de la variation δV, on aura donc l'équation

$$(58) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta \, \Delta\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\delta \, \Delta\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\delta \, \Delta\gamma) = \delta \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right),$$

qui n'est pas autre chose que la formule (57) étendue au cas où L, M, N sont quelconques.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PÉRIGAUD, astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris. — Exposé de la méthode de Hansen pour le calcul des perturbations spéciales des petites planètes. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris; 1877.

La détermination analytique des perturbations d'une planète ou d'une comète étant toujours très-laborieuse, les astronomes ont dû chercher des méthodes abrégées pour calculer numériquement et de proche en proche les valeurs de ces perturbations. Hansen, dans un Mémoire très-important inséré parmi ceux de la Société Royale des Sciences de Saxe, et dont l'objet principal est la détermination analytique des perturbations, a consacré quelques pages au problème moins étendu que nous venons de signaler, et a donné une méthode nouvelle pour le résoudre. Dans une Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, M. Périgaud a fait de cette méthode une exposition d'ensemble, et l'a éclaircie en l'appliquant aux perturbations produites par Jupiter et par Saturne dans le mouvement de la planète Eugénie.

La méthode de la variation des constantes arbitraires permet de représenter les coordonnées d'une planète par rapport à des axes fixes, et leurs dérivées par rapport au temps, par les mêmes fonctions du temps et des éléments dans le mouvement troublé que dans le mouvement elliptique. Hansen a remarqué que l'on peut choisir des axes mobiles jouissant des mêmes propriétés. Il a nommé les coordonnées relatives à ces axes mobiles *coordonnées idéales;* et comme il y a une infinité de systèmes de coordonnées idéales, il assujettit le plan mobile des XY à passer constamment par le rayon vecteur mené du Soleil à la planète troublée. Il peut encore disposer de l'axe OX dans le plan XOY, au moins à l'origine du temps, et il en profite pour rendre égales deux des constantes initiales.

La position des axes mobiles par rapport aux axes fixes dépend de l'angle θ que fait avec Ox la trace de XY sur xy, de l'angle σ que cette trace fait avec OX, et de l'angle i des plans XOY, et xOy. En partant des équations différentielles bien connues du mouvement de la planète troublée, et tenant compte de ce que les coor-

données mobiles sont idéales, on obtient facilement les équations différentielles suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\dfrac{dv^2}{dt^2} + k^2(1+m)\dfrac{1}{r^2} = k^2(1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\ r^2\dfrac{d^2v}{dt^2} + 2r\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dv}{dt} = k^2(1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}, \\ \dfrac{di}{dt} = \lambda r\cos(v-\sigma)\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z}, \\ \dfrac{d\sigma}{dt} = \lambda \cot i\, r\sin(v-\sigma)\dfrac{\partial\Omega}{\partial Z}, \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{\cos i}\dfrac{d\sigma}{dt}, \end{cases}$$

où r désigne le rayon vecteur de la planète troublée, v l'angle qu'il fait avec OX, Ω la fonction perturbatrice, et λ une fonction simple du paramètre de l'orbite. L'exposition de ces formules et de la théorie générale des coordonnées idéales fait l'objet du § I[er] de la thèse de M. Périgaud ; on trouve à la fin du paragraphe une démonstration des mêmes formules indiquée à l'auteur par M. Briot et fondée sur les principes de la Mécanique.

Bien que la conception des coordonnées idéales soit essentielle dans la méthode de Hansen, elle n'offrirait que bien peu d'avantages si elle n'était combinée avec la suivante : au lieu d'introduire dans les formules les valeurs variables des éléments, Hansen s'efforce d'y introduire leurs valeurs initiales, ou des valeurs moyennes. En supposant qu'on ait tiré des équations (1) pour un instant quelconque les valeurs de r, v, i, σ, θ, on trouverait la longitude l et la latitude b de la planète par rapport aux axes fixes au moyen des équations

$$\begin{aligned} \cos b\cos(l-\theta) &= \cos(v-\sigma), \\ \cos b\sin(l-\theta) &= \cos i\sin(v-\sigma), \\ \sin b &= \sin i\sin(v-\sigma). \end{aligned}$$

Hansen réussit à écrire ces équations comme il suit :

$$(2)\quad \begin{cases} \cos b\cos(l-\theta_0-\Gamma) = \cos(v-\theta_0) + \dfrac{sp}{\varkappa}, \\ \cos b\sin(l-\theta_0-\Gamma) = \cos i_0\sin(v-\theta_0) - s\left(\tang i_0 + \dfrac{q}{\varkappa\cos i_0}\right), \\ \sin b = \sin i_0\sin(v-\theta_0) + s, \end{cases}$$

où i_0 et θ_0 désignent les valeurs initiales ou moyennes de i et θ; Γ, p, q et $\varkappa$ des fonctions des éléments variables de la planète, s une fonction très-petite de v, i et θ; les quantités s, p et q étant de l'ordre des forces perturbatrices, et Γ de l'ordre de leurs carrés.

Hansen avait démontré ces formules au moyen des exponentielles imaginaires; M. Périgaud en a donné une démonstration géométrique (¹).

Partant de là, on abandonne les équations (1) et l'on en forme d'autres comme il va être expliqué.

Pour obtenir pour un instant quelconque les valeurs de r et v, il suffit d'employer les formules du mouvement elliptique, mais en y regardant les éléments comme fonctions du temps. Hansen se propose de mettre en évidence, dans ces formules comme dans les formules (2), des éléments constants, et il y parvient en les disposant ainsi :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\eta - e_0 \sin\eta = \frac{k(\zeta - T)\sqrt{1+m}}{a_0^{\frac{3}{2}}},\\ &\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}}\tan\frac{\eta}{2},\\ &v = \varphi + \varpi_0,\\ &\rho = \frac{p_0}{1 + e_0\cos\varphi},\\ &r = \rho(1+\nu), \end{aligned}\right.$$

r et v étant toujours les coordonnées polaires idéales, et ζ, η, φ et ρ désignant non plus le temps, l'anomalie excentrique, l'anomalie vraie et le rayon vecteur, mais des quantités voisines; ν est très-petit.

On forme assez facilement les équations différentielles qui font connaître ν, ζ et $u = rs$; ces équations, qu'il serait inutile de reproduire ici, donnent $\frac{d^2\nu}{dt^2}$, $\frac{d\delta\zeta}{dt}$ et $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\delta\zeta$ étant égal à $\zeta - t$.

Il suffit de calculer les valeurs des seconds membres de ces équations pour une série d'époques équidistantes et en employant les

(¹) Ces mêmes formules ont été démontrées géométriquement par M. L. Dupuy en 1874 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, p. 11 et suiv.). (*Note de la rédaction.*)

valeurs initiales ou moyennes des éléments pour en conclure par la méthode des quadratures mécaniques les valeurs de ν, $\delta\zeta$, u, pour ces diverses époques. De $\delta\zeta$ on conclut ζ, et, par suite, η, φ, ν. Ayant obtenu ν, on aura b et l au moyen des formules (2), dans lesquelles Γ, ps et qs sont ordinairement négligeables. On aura aussi

$$r = \rho(1 + \nu),$$

et, enfin, on calculera les coordonnées rectangulaires x, y, z ainsi :

$$x = r \cos b \cos l,$$
$$y = r \cos b \sin l,$$
$$z = r \sin b.$$

L'application faite par M. Périgaud montre nettement la marche à suivre ; il n'y a de dérivée un peu longue à calculer que celle de ν ; celles de u et de $\delta\zeta$ s'obtiennent rapidement. De plus, les quantités ν, u, $\delta\zeta$ sont beaucoup moindres que les variations des coordonnées rectangulaires que l'on détermine par les méthodes anciennes. B. B.

MÉLANGES.

DÉVELOPPEMENTS ANALYTIQUES, POUR SERVIR A COMPLÉTER LA DISCUSSION DE LA VARIATION SECONDE DES INTÉGRALES DÉFINIES MULTIPLES;

Par M. M.-G. SABININE,

Professeur à l'Université d'Odessa.

1. La discussion de la variation seconde d'une intégrale définie multiple, que nous désignerons par V, présente un cas qui n'a pas été résolu jusqu'ici. C'est, comme l'on sait, celui où il s'agit de la discussion de la partie intégrable de $\delta^2 V$, ou bien celui où les variations tronquées ω des fonctions y, qui rendent l'intégrale V maximum ou minimum, ne sont pas nulles aux limites des intégrations. Dans notre Note insérée au *Bulletin de l'Académie Im-*

périale des Sciences de Saint-Pétersbourg, t. XV, p. 70-86, nous avons obtenu les mêmes résultats qu'a donnés M. Clebsch dans son Mémoire *Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale* (¹), résultats qui n'ont pas la forme définitive sous laquelle il conviendrait de les présenter. Cela ne provient que des réductions que, d'après M. Clebsch, nous avons fait subir à l'expression ρ (²); en vertu de ces réductions, nos résultats contiennent un terme ε (³) qui entre dans la partie intégrable de $\delta^2 V$, et qui renferme les dérivées partielles de quantités arbitraires t. Dans la présente Note, nous allons démontrer que l'expression ρ se réduit *identiquement* à zéro, et nous indiquerons le moyen de discuter les deux parties de $\delta^2 V$, la partie non intégrable et celle qui se rapporte aux limites des intégrations.

Nous ferons entrer plusieurs parties de notre Note (*Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XV) dans celle-ci, afin de la présenter en entier, et en même temps afin d'éviter au lecteur l'inconvénient d'avoir recours aux citations.

Dans notre discussion de la variation $\delta^2 V$, nous supposons que les limites de l'intégrale définie multiple sont données et restent invariables. Cette supposition, étant admise uniquement pour exposer de la manière la plus simple la théorie compliquée, est toujours permise sans que la présente Note manque de la généralité qui est nécessaire pour la discussion de la variation $\delta^2 V$. En effet, au cas contraire, c'est-à-dire si l'intégrale multiple V est prise par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_i$, dont les valeurs extrêmes subissent des variations, la discussion de la variation $\delta^2 V$, par le changement de variables dans les intégrales définies, peut être toujours ramenée à la discussion de la variation seconde de l'intégrale V', prise par rapport aux nouvelles variables indépendantes $x'_1, x'_2, \ldots, x'_i$, dans laquelle les variables x_1, $x_2, \ldots, x_i$ doivent être regardées comme des fonctions inconnues de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_i$. Ainsi le moyen que nous allons proposer sert à compléter la discussion de la variation seconde d'une intégrale définie multiple, lors même qu'il y a la supposition admise par nous,

(¹) *Journal de Crelle*, t. 56, p. 122.
(²) P. 79, formule (40).
(³) P. 80, formule (47).

c'est-à-dire la supposition que les limites d'une intégrale définie multiple sont données et restent invariables.

2. Nous exposerons d'abord les préliminaires qu'il est nécessaire de faire voir pour les transformations de la variation seconde d'une intégrale définie multiple, et nous indiquerons ensuite ces transformations.

Soit proposé de trouver le maximum ou le minimum de l'intégrale multiple

$$(1) \qquad W = \int w\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_i,$$

prise par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_i$, dont les valeurs extrêmes ou les limites des intégrations successives sont données par l'équation

$$(2) \qquad u = 0,$$

u étant une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous désignerons par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_i$ les limites inférieures des variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$, et par $x''_1, x''_2, \ldots, x''_i$ leurs limites supérieures; nous supposerons que les limites de chacune des variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$ sont des fonctions des variables qui la suivent, de sorte que les limites x''_i et x'_i sont indépendantes de toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$, tandis que les limites x''_{i-1} et x'_{i-1} pourront être fonctions de x_i; celles des x_{i-2}, savoir x''_{i-2} et x'_{i-2}, des fonctions de x_i et x_{i-1}, et ainsi de suite jusqu'à la variable x_1, dont les limites x''_1 et x'_1 seront en général des fonctions de $x_2, x_3, \ldots, x_i$.

La fonction w, qui se trouve sous le signe $\int$, contient explicitement les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_i$, des fonctions inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_s$ de ces variables, et les dérivées partielles du premier ordre de ces fonctions par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_i$. Ces dérivées seront désignées dans la suite par

$$p_{1,1}, p_{1,2}, \ldots, p_{1,i}, \ldots, p_{s,1}, p_{s,2}, \ldots, p_{s,i},$$

et en général

$$p_{s,i} = \frac{\partial y_s}{\partial x_i},$$

i étant un des nombres $1, 2, \ldots, i$, et s un des nombres $1, 2, \ldots, s$.

Nous admettrons encore que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_s$ sont liées à leurs dérivées partielles $p_{s,i}$ et aux variables indépendantes x_i par les équations

$$(3) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_k = 0.$$

Les variations tronquées $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ et leurs dérivées partielles $\frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}$, qui sont en même temps les variations des dérivées partielles $p_{s,i}$, doivent satisfaire aux équations

$$(4) \qquad \delta\varphi_1 = 0, \quad \delta\varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \delta\varphi_k = 0,$$

dont la forme générale est

$$(5) \qquad \sum_s \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_s} \omega_s + \sum_s \sum_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_{s,i}} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i} = 0,$$

le signe Σ_s désignant une somme relative aux indices $1, 2, \ldots, s$, et Σ_i une somme relative aux indices $1, 2, \ldots, i$.

Outre les équations (3) et (4), nous admettrons que les valeurs limites des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_s$ sont liées à leurs dérivées partielles et aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$ par les relations données, et nous supposerons qu'il n'y a qu'une relation donnée,

$$(6) \qquad \Big/^{x''_1} F(x_1, x_2, \ldots, x_i, y_1, y_2, \ldots, y_s, q_{1,2}, q_{1,3}, \ldots, q_{1,i}, \ldots, q_{s,2}, \ldots, q_{s,i}) = 0,$$

$\Big/^{x''_1}$ étant le signe de substitution, et

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{llll} q_{1,2} = p_{1,2} + p_{1,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_2}, & q_{1,3} = p_{1,3} + p_{1,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_3}, & \ldots, & q_{1,i} = p_{1,i} + p_{1,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_i}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ q_{s,2} = p_{s,2} + p_{s,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_2}, & q_{s,3} = p_{s,3} + p_{s,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_3}, & \ldots, & q_{s,i} = p_{s,i} + p_{s,1} \frac{\partial x''_1}{\partial x_i}. \end{array} \right.$$

Cette supposition, étant admise uniquement pour abréger, n'a pas d'influence sur la généralité de la discussion de la variation $\delta^2 W$; car, au cas que l'on donne un nombre quelconque d'équations analogues à (6), les transformations de la variation de $\delta^2 W$ seront au fond les mêmes qu'il est nécessaire de faire dans le cas pris

par nous. En posant

$$\int^{x''_1} F(x_1, x_2, \ldots, x_i, y_1, y_2, \ldots, y_s, q_{1,2}, \ldots, q_{1,i}, \ldots, q_{s,2}, \ldots, q_{s,i})$$
$$= \psi(x_2, \ldots, x_i, y_s, \ldots, q_{s,i}),$$

l'équation (6) se représentera par celle-ci :

$$(8) \qquad \psi(x_2, \ldots, x_i, y_s, \ldots, q_{s,i}) = 0,$$

i étant, dans cette équation, un des nombres 2, 3, ..., i.

Les variations tronquées ω, relatives aux limites des intégrations, et leurs dérivées partielles $\frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}$, qui sont en même temps les variations des dérivées partielles $q_{s,i}$, doivent satisfaire à l'équation

$$(9) \qquad \delta\psi = 0,$$

dont la forme générale est

$$(10) \qquad \sum_s \frac{\partial \psi}{\partial y_s} \omega_s + \sum_s \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial q_{s,i}} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i} = 0.$$

Il est à remarquer que nous supposons que dans les équations (6) et (9) entrent les $q_{s,i}$, mais non pas les $p_{s,i}$; cette supposition est permise sans restreindre la généralité de la discussion de la variation δ^2W. En effet, au cas où l'on donne l'équation de condition contenant $p_{s,i}$ sous la forme

$$\int^{x''_1} f(x_1, x_2, \ldots, y_s, \ldots, p_{s,i}) = 0,$$

et en même temps

$$\int^{x''_1} \delta f(x_1, x_2, \ldots, y_s, \ldots, p_{s,i}) = 0,$$

cette équation $\int^{x''_1} \delta f(x_1, x_2, \ldots, y_s, \ldots, p_{s,i}) = 0$ entraîne $s+1$ équations, dont une est celle à laquelle doivent satisfaire les valeurs limites des ω_s, et les s autres, les équations qui donnent les s relations entre x_i, y_s et $p_{s,i}$; ces s relations et les $s(i-1)$ équations (7) déterminent les $p_{s,i}$ en fonctions de x_i, y_s et $q_{s,i}$; en portant ces valeurs

des $p_{s,i}$ dans l'équation $\int^{x''_1} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, y_s, \ldots, p_{s,i}) = 0$, on aura l'équation de condition qui ne renferme plus d'autres dérivées partielles de y_s que les $q_{s,i}$.

La question proposée du maximum ou du minimum relatif peut être ramenée, comme on sait, à la question du maximum ou du minimum absolu de cette autre intégrale

$$(11)\quad V = V_1 + V_2, \quad \text{où} \quad V_1 = \int v_1\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i, \quad V_2 = \int v_2\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_i,$$

dans lesquelles

$$(12)\qquad v_1 = w + \sum_k \lambda_k \varphi_k, \quad v_2 = l\psi,$$

les λ_k et l représentant des fonctions inconnues des x_i, qu'il faut déterminer, ainsi que les fonctions y_s, au moyen des équations (2) et (8) et d'autres équations qui dérivent de la condition $\delta V = 0$.

Les limites de l'intégrale V étant supposées invariables, la variation δV ne sera autre chose que l'intégrale des différentielles de v_1 et v_2 dues aux accroissements ω_s des y_s et aux accroissements $\frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}$ des $p_{s,i}$. Nous pouvons donc représenter cette variation δV par

$$(13)\quad \delta V = \delta V_1 + \delta V_2 = \int \delta v_1\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i + \int \delta v_2\, dx_2 \ldots dx_i,$$

en posant, pour abréger,

$$N_s = \frac{\partial v_1}{\partial y_s}, \quad P_{s,i} = \frac{\partial v_1}{\partial p_{s,i}}, \quad M_s = \frac{\partial v_2}{\partial y_s}, \quad Q_{s,i} = \frac{\partial v_2}{\partial q_{s,i}},$$

l'indice i qui affecte les $Q_{s,i}$ étant un des nombres 2, 3, ..., i, et

$$(14)\qquad \delta v_1 = \sum_s N_s\,\omega_s + \sum_s \sum_i P_{s,i} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i},$$

$$(15)\qquad \delta v_2 = \sum_s M_s\,\omega_s + \sum_s \sum_i Q_{s,i} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i},$$

ou

$$(16)\qquad \delta v_1 = \sum_s \sum_i \frac{\partial (P_{s,i}\,\omega_s)}{\partial x_i} + \sum_s \omega_s \left(N_s - \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial x_i}\right),$$

$$(17)\qquad \delta v_2 = \sum_s \sum_i \frac{\partial (Q_{s,i}\,\omega_s)}{\partial x_i} + \sum_s \omega_s \left(M_s - \sum_i \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial x_i}\right).$$

Nous aurons donc

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \delta V = &\int \sum_s \sum_i \frac{\partial (Q_{s.i}\,\omega_s)}{\partial x_i}\, dx_2 \ldots dx_i \\ &+ \int \sum_s \left(M_s - \sum_i \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial x_i} \right) \omega_s\, dx_2 \ldots dx_i \\ &+ \int \sum_s \sum_i \frac{\partial (P_{s,i}\,\omega_i)}{\partial x_i}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i \\ &+ \int \sum_s \left(N_s - \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial x_i} \right) \omega_s\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i. \end{aligned}\right.$$

En égalant à zéro le quatrième terme de cette expression, on obtient les s équations aux dérivées partielles du second ordre

$$(19)\qquad N_1 = \sum_i \frac{\partial P_{1,i}}{\partial x_i},\quad N_2 = \sum_i \frac{\partial P_{2.i}}{\partial x_i},\quad \ldots,\quad N_s = \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial x_i},$$

auxquelles il faut adjoindre les k équations (3). Ces équations (19) et (3) serviront à déterminer les fonctions inconnues y_s et λ_k. Les valeurs générales des y_s et des λ_k, obtenues par l'intégration des équations (19) et (3), contiendront des fonctions arbitraires α_1, α_2, ...

Quant à la partie restante de $\delta^2 V$, l'intégrale

$$\int \sum_s \sum_i \frac{\partial (P_{s,i}\,\omega_s)}{\partial x_i}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

se réduira, au moyen des transformations connues, à deux intégrales de l'ordre $i-1$, dont l'une, celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x'_1, donne les s équations

$$(20)\qquad \int^{x'_1} \sum_i P_{1,i} \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}} = 0,\quad \ldots,\quad \int^{x'_1} \sum_i P_{s.i} \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}} = 0;$$

l'autre, celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x''_1, étant égalée à zéro, avec l'intégrale $\int \sum_s \left(M_s - \sum_i \dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial x_i} \right) \omega_s\, dx_2 \ldots dx_i$, donne

encore les s équations

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int^{x''_1} \sum_i \mathrm{P}_{1,i} \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_1}} + \mathrm{M}_1 - \sum_i \frac{\partial \mathrm{Q}_{1,i}}{\partial x_i} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \displaystyle\int^{x''_1} \sum_i \mathrm{P}_{s,i} \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_1}} + \mathrm{M}_s - \sum_i \frac{\partial \mathrm{Q}_{s,i}}{\partial x_i} = 0. \end{array}\right.$$

L'intégrale

$$\int \sum_s \sum_i \frac{\partial(\mathrm{Q}_{s,i}\,\omega_s)}{\partial x_i}\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_i$$

se réduira, au moyen de transformations connues, à deux intégrales qui, étant égalées à zéro, donnent les $2s$ équations

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int^{x''_2} \sum_i \mathrm{Q}_{1,i} \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}} = 0, \quad \ldots, \quad \int^{x''_2} \sum_i \mathrm{Q}_{s,i} \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} = 0, \\ \displaystyle\int^{x'_2} \sum_i \mathrm{Q}_{1,i} \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}} = 0, \quad \ldots, \quad \int^{x'_1} \sum_i \mathrm{Q}_{s,i} \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}} = 0, \end{array}\right.$$

u_1 étant le résultat de l'élimination de la variable x_1 entre $u = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$.

Aux équations (20), (21) et (22) il faut adjoindre les équations (7) et (8). Ces équations (20), (21), (22), (7) et (8), relatives aux limites des intégrations, serviront à déterminer les fonctions l et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

La variation seconde $\delta^2 \mathrm{V}$, en vertu de la formule (13), se réduit à

$$(23)\quad \delta^2\mathrm{V} = \delta^2\mathrm{V}_1 + \delta^2\mathrm{V}_2 = \int \delta^2 v_1\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i + \int \delta^2 v_2\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_i,$$

où

$$\delta^2 v_1 = \sum_s \frac{\partial\, \delta v_1}{\partial y_s}\,\omega_s + \sum_s \sum_i \frac{\partial\, \delta v_1}{\partial p_{s,i}}\, \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i},$$

$$\delta^2 v_2 = \sum_s \frac{\partial\, \delta v_2}{\partial y_s}\,\omega_s + \sum_s \sum_i \frac{\partial\, \delta v_2}{\partial q_{s,i}}\, \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}.$$

Or on peut mettre ces deux dernières expressions sous la forme

$$\delta^2 v_1 = \sum_s \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}} \omega_s\right)}{\partial x_i} + \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial \cdot \frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}}}{\partial x_i}\right) \omega_s,$$

$$\delta^2 v_2 = \sum_s \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}} \omega_s\right)}{\partial x_i} + \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial \cdot \frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}}}{\partial x_i}\right) \omega_s,$$

par conséquent

$$(24)\quad \begin{cases} \delta^2 V_1 = \displaystyle\int \sum_s \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}} \omega_s\right)}{\partial x_i} dx_1\, dx_2 \ldots dx_i \\ \qquad + \displaystyle\int \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial \cdot \frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}}}{\partial x_i}\right) \omega_s\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i, \end{cases}$$

$$(25)\quad \begin{cases} \delta^2 V_2 = \displaystyle\int \sum_s \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}} \omega_s\right)}{\partial x_i} dx_2\, dx_3 \ldots dx_i \\ \qquad + \displaystyle\int \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial \cdot \frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}}}{\partial x_i}\right) \omega_s\, dx_2 \ldots dx_i, \end{cases}$$

où, sous le signe $\int$, il faut aussi substituer à δv_1 et δv_2 leurs expressions (14) et (15). La sommation relative à chacun des indices s et i devant être faite deux fois, nous remplacerons d'abord, dans les formules (14) et (15), les indices s et i respectivement par σ et j, et nous porterons ensuite ces expressions dans (24) et (25), sans changer les indices s et i relatifs aux secondes sommations. Observant que

$$\frac{\partial N_\sigma}{\partial p_{s,i}} = \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}, \quad \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}} = \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}, \quad \frac{\partial N_\sigma}{\partial y_s} = \frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma}, \quad \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial y_s} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial M_\sigma}{\partial q_{s,i}} = \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}, \quad \frac{\partial Q_{\sigma,j}}{\partial q_{s,i}} = \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}, \quad \frac{\partial M_\sigma}{\partial y_s} = \frac{\partial M_s}{\partial y_\sigma}, \quad \sum_j \frac{\partial Q_{\sigma,j}}{\partial y_s} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_{\sigma,i}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i},$$

nous obtiendrons les deux formules

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta^2 V_1 = &\int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}\omega_s\,\omega_\sigma\right)}{\partial x_i}\right] dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_i \\
&+\int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial\left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}\omega_s\right)}{\partial x_i}\right] dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_i \\
&+\int \left\{\sum_s \sum_\sigma \left[\frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma}\omega_\sigma + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}\omega_\sigma\right)}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial\left(\sum_s \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}\right]\omega_s\right\} dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_i,
\end{aligned}\right.$$

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta^2 V_2 = &\int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}\omega_s\,\omega_\sigma\right)}{\partial x_i}\right] dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_i \\
&+\int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial\left(\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}\omega_s\right)}{\partial x_i}\right] dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_i \\
&+\int \left\{\sum_s \sum_\sigma \left[\frac{\partial M_s}{\partial y_\sigma}\omega_\sigma + \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_{\sigma,i}}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \sum_i \frac{\partial\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}\omega_\sigma\right)}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial\left(\sum_s \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}\right]\omega_s\right\} dx_2\,dx_3\,\ldots\,dx_i.
\end{aligned}\right.$$

3. Pour obtenir une expression de $\delta^2 V$ qui puisse servir à la distinction du maximum ou du minimum de l'intégrale V, nous transformerons les expressions (26) et (27) en substituant aux variations tronquées ω_s des fonctions linéaires de nouvelles variables, dont les coefficients se déterminent de la manière suivante.

Désignons par a_m une constante indéterminée, indépendante de $x_1, x_2, \ldots, x_i$, qui n'entre dans les fonctions y, λ et l que par suite de l'intégration des équations (3), (13), (20), (21), (22) et (8); le nombre des fonctions y, étant égal à s, prenons s quelconques

de ces constantes a_m, et formons les expressions

$$(28)\quad \begin{cases} R_{1,1} = \sum_m b_{1,m} \dfrac{\partial y_1}{\partial a_m}, & \ldots, \quad R_{1,n} = \sum_m b_{n,m} \dfrac{\partial y_1}{\partial a_m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_{s,1} = \sum_m b_{1,m} \dfrac{\partial y_s}{\partial a_m}, & \ldots, \quad R_{s,n} = \sum_m b_{n,m} \dfrac{\partial y_s}{\partial a_m}, \end{cases}$$

dans lesquelles $b_{1,1}$, ..., $b_{1,m}$, ..., $b_{n,1}$, ..., $b_{n,m}$ sont des constantes indéterminées, indépendantes de x_1, x_2, ..., x_i, qui sont assujetties à la seule condition d'être des quantités réelles et positives, et qui n'entrent ni dans les fonctions y, λ et l, ni dans les équations (2), (13), ni dans les équations aux limites (3), (20), (21) et (22); la somme $\sum_m$ s'étendant aux constantes a_m, et n, ainsi que m, désignant tous les nombres entiers positifs depuis 1 jusqu'à s.

Nous représenterons encore ces mêmes valeurs par

$$(29)\quad \begin{cases} R_{1,1} = \sum_\mu b_{1,\mu} \dfrac{\partial y_1}{\partial a_\mu}, & \ldots, \quad R_{1,\nu} = \sum_\mu b_{\nu,\mu} \dfrac{\partial y_1}{\partial a_\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_{\sigma,1} = \sum_\mu b_{1,\mu} \dfrac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu}, & \ldots, \quad R_{\sigma,\nu} = \sum_\mu b_{\nu,\mu} \dfrac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu}, \end{cases}$$

en changeant les indices s, n, m respectivement en σ, ν, μ.

Les valeurs des y_s, considérées comme fonctions des a_m, étant indépendantes entre elles, et les constantes $b_{n,m}$ parfaitement arbitraires, on peut toujours attribuer à ces dernières des valeurs pour lesquelles le déterminant D des s^2 quantités (28) ne sera pas égal à zéro. Cela posé, formons encore les $s(k+1)$ expressions

$$(30)\quad \begin{cases} \Lambda_{1,1} = \sum_m b_{1,m} \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial a_m}, & \ldots, \quad \Lambda_{1,n} = \sum_m b_{n,m} \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial a_m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Lambda_{k,1} = \sum_m b_{1,m} \dfrac{\partial \lambda_k}{\partial a_m}, & \ldots, \quad \Lambda_{k,n} = \sum_m b_{n,m} \dfrac{\partial \lambda_k}{\partial a_m}, \end{cases}$$

$$(31)\quad L_1 = \sum_m b_{1,m} \frac{\partial l}{\partial a_m}, \quad \ldots, \quad L_n = \sum_m b_{n,m} \frac{\partial l}{\partial a_m},$$

ou, en changeant les indices n, m respectivement en ν, μ,

$$(32)\quad \begin{cases} \Lambda_{1,1}=\sum_\mu b_{1,\mu}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial a_\mu}, & \ldots, \quad \Lambda_{1,\nu}=\sum_\mu b_{\nu,\mu}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial a_\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Lambda_{k,1}=\sum_\mu b_{1,\mu}\dfrac{\partial\lambda_k}{\partial a_\mu}, & \ldots, \quad \Lambda_{k,\nu}=\sum_\mu b_{\nu,\mu}\dfrac{\partial\lambda_k}{\partial a_\mu}, \end{cases}$$

$$(33)\quad L_1=\sum_\mu b_{1,\mu}\frac{\partial l}{\partial a_\mu}, \quad \ldots, \quad L_\nu=\sum_\mu b_{\nu,\mu}\frac{\partial l}{\partial a_\mu},$$

qui nous seront utiles dans la suite.

En prenant les dérivées de quelques-unes des équations (19), (3), (20), (21), (22) et (8), par rapport aux constantes a_μ, multipliant ensuite ces dérivées par les constantes $b_{\nu,\mu}$, et faisant la somme des produits, nous obtiendrons des équations différentielles linéaires par rapport aux expressions (23), (32) et (33), de la forme

$$(34)\qquad h_{s,\nu}=0,$$

où

$$(35)\quad \begin{cases} h_{s,\nu}=\sum_\sigma \dfrac{\partial N_s}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_k\dfrac{\partial N_s}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}+\sum_i\sum_\sigma\dfrac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}}\dfrac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i} \\ \qquad -\sum_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_\sigma\dfrac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_k\dfrac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}+\sum_\sigma\sum_j\dfrac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\dfrac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right), \end{cases}$$

$$(36)\quad \sum_\sigma\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_i\sum_\sigma\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_{\sigma,i}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i}=0,$$

$$(37)\quad \int^{x''_1}\sum_i\sum_\sigma\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i}+\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)+g_{s,\nu}=0,$$

où

$$(38)\quad \begin{cases} g_{s,\nu}=\sum_\sigma\dfrac{\partial M_s}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\dfrac{\partial M_s}{\partial l}L_\nu+\sum_i\sum_\sigma\dfrac{\partial M_s}{\partial q_{s,i}}\dfrac{\partial R_{s,\nu}}{\partial x_i} \\ \qquad -\sum_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_\sigma\dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu+\sum_\sigma\sum_j\dfrac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\dfrac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right), \end{cases}$$

$$(39)\quad \int^{x'_1}\sum_i\sum_\sigma\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}+\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)=0,$$

$$(40)\begin{cases}\displaystyle\int^{x''_1}\sum_i\sum_\sigma\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu+\sum_j\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)=0,\\ \displaystyle\int^{x'_1}\sum_i\sum_\sigma\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu+\sum_j\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)=0,\end{cases}$$

$$(41)\qquad \sum_\sigma\frac{\partial\psi}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_i\sum_\sigma\frac{\partial\psi}{\partial q_{\sigma,i}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i}=0;$$

d'où l'on doit conclure que les valeurs des R, Λ et L sont les solutions des équations (34), (36), (39), (40) et (41), analogues à celles dont les intégrales sont connues par le théorème de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 17). Le déterminant D des expressions (28) ou (29) n'étant pas égal à zéro, on peut exprimer les s variations tronquées ω_s en fonctions d'autant de variables indépendantes t_n ou t_ν, en prenant les expressions (28) ou (29) pour coefficients de ces variables, savoir

$$(42)\qquad \omega_s=\sum_n R_{s,n}t_n,$$

$$(43)\qquad \omega_\sigma=\sum_\nu R_{\sigma,\nu}t_\nu,$$

où les variables t_n ou t_ν doivent être considérées comme fonctions arbitraires de $x_1, x_2, \ldots, x_i$.

Avant de faire les substitutions de ces expressions des ω_s dans celle de $\delta^2 V$, nous démontrerons deux égalités qui nous seront nécessaires dans la transformation de $\delta^2 V$, que nous avons en vue. La première de ces égalités est

$$(44)\begin{cases}\displaystyle\sum_\nu\sum_s\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}t_\nu\omega_s\right)\\ \displaystyle\quad+\sum_n\sum_\nu\sum_s R_{s,n}t_nt_\nu\left[\sum_k\frac{\partial N_s}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)\right]\\ \displaystyle\quad+\sum_n\sum_\nu\sum_i t_n\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_\sigma\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,n}\right)R_{\sigma,\nu}\right.\\ \displaystyle\qquad\qquad\left.-\sum_s\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)R_{s,n}\right]=0,\end{cases}$$

$$(45)\left\{\begin{aligned}&\sum_\nu\sum_s\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu t_\nu \omega_s\right)\\&+\sum_n\sum_\nu\sum_s R_{s,n}t_n t_\nu\left[\frac{\partial M_s}{\partial l}L_\nu-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu\right)\right]\\&+\sum_n\sum_\nu\sum_i t_n\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left(\sum_\sigma\frac{\partial Q_{\sigma,i}}{\partial l}L_n R_{\sigma,\nu}-\sum_s\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l}L_\nu R_{s,n}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Pour démontrer la formule (44), multiplions d'abord l'équation (5) par $\Lambda_{k,\nu}t_\nu$; faisons ensuite la sommation par rapport aux indices k et ν, et nous aurons

$$(46)\left\{\begin{aligned}0=&\sum_\nu\sum_s\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}t_\nu\omega_s\right)\\&+\sum_n\sum_\nu\sum_s R_{s,n}t_n t_\nu\left[\sum_k\frac{\partial N_s}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)\right]\\&-\sum_n\sum_\nu\sum_i t_n\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_s\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,\nu}\right)R_{s,n}\right].\end{aligned}\right.$$

Les expressions (42) des ω_s étant substituées dans l'équation (5), il en résulte

$$\sum_s\sum_n t_n\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_s}R_{s,n}+\sum_i\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_{s,i}}\frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i}\right)+\sum_i\sum_s\sum_n\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i}=0,$$

ce qui devient, en vertu de l'équation (36),

$$(47)\qquad \sum_i\sum_s\sum_n\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i}=0.$$

Si, après avoir multiplié cette dernière équation par $\Lambda_{k,\nu}t_\nu$, nous faisons les sommations par rapport aux indices k et ν, nous aurons

$$\sum_i\sum_s\sum_n\sum_\nu\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i}\Lambda_{k,\nu}t_\nu=0,$$

ou, en remplaçant respectivement s, n, ν par σ, ν, n,

$$\sum_i\sum_n\sum_\nu t_n\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_\sigma\left(\sum_k\frac{\partial P_{s,i}}{\partial\lambda_k}\Lambda_{k,n}\right)R_{\sigma,\nu}\right]=0.$$

Cette équation, jointe à l'équation (46), donne l'égalité (44).

Nous déduirons de la même manière l'égalité (45) et la suivante :

$$(48)\qquad \sum_i\sum_s\sum_n\frac{\partial\omega_{s,i}}{\partial l}R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i}=0.$$

Nous introduirons encore dans le calcul les expressions

$$(49)\qquad \tau_{s,i} = \sum_n R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i}, \qquad \tau_{\sigma,j} = \sum_\nu R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j},$$

que l'on obtiendra en remplaçant, dans les expressions (42) et (43) des ω_s et ω_σ, les variables t_n, t_ν par leurs dérivées respectives $\frac{\partial t_n}{\partial x_i}$, $\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}$.

Il est évident que

$$(50)\qquad \tau_{s,i} = \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i} - \sum_n t_n \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i}, \qquad \tau_{\sigma,j} = \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} - \sum_\nu t_\nu \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j},$$

et les équations (42) et (43) donnent

$$t_n = \sum_\sigma \frac{\frac{\partial D}{\partial R_{\sigma,n}}}{D} \omega_\sigma, \qquad t_\nu = \sum_s \frac{\frac{\partial D}{\partial R_{\sigma,\nu}}}{D} \omega_s;$$

par conséquent

$$(51)\qquad \begin{cases} \tau_{s,i} = \dfrac{\partial \omega_s}{\partial x_i} - \sum_n \sum_\sigma \dfrac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i} \dfrac{\frac{\partial D}{\partial R_{\sigma,n}}}{D} \omega_\sigma, \\ \tau_{\sigma,j} = \dfrac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} - \sum_\nu \sum_s \dfrac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} \dfrac{\frac{\partial D}{\partial R_{s,\nu}}}{D} \omega_s. \end{cases}$$

Au moyen de ces formules, les équations (47) et (48) peuvent être mises sous la forme

$$(52)\qquad \sum_i \sum_s \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \tau_{s,i} = 0, \quad \text{ou} \quad \sum_j \sum_\sigma \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial \lambda_k} \tau_{\sigma,j} = 0,$$

$$(53)\qquad \sum_i \sum_s \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} \tau_{s,i} = 0, \quad \text{ou} \quad \sum_j \sum_\sigma \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial l} \tau_{\sigma,j} = 0.$$

Les $\tau_{s,i}$ qui se trouvent dans les équations (53) se rapportent aux limites des intégrations; il est évident que les équations (5), et par suite les équations (52), n'ont pas d'influence sur les valeurs limites des ω_s, et par conséquent sur les $\tau_{s,i}$ qui se trouvent dans les équations (53). En effet, si nous désignons par ω'_s la partie de ω_s qui ne résulte que du changement de forme de y_s par rapport aux fonctions arbitraires α_1, α_2, ..., nous aurons

$$\omega_s = \omega'_s + \sum_\alpha \frac{\partial y_s}{\partial \alpha} \delta\alpha.$$

Or l'intégration des équations (19) et (3) donnera la forme de y_s par rapport aux fonctions arbitraires α, et cette forme ainsi déterminée restera invariable, quelles que soient les variations des valeurs limites de y_s; d'où il suit que les ω'_s, aux limites des intégrations, s'annulent, et en vertu de cela les variations tronquées ω_s, aux limites des intégrations, se réduiront à

$$(54)\qquad \omega_s = \sum_\alpha \frac{\partial y_s}{\partial \alpha}\,\delta\alpha.$$

Mais ces ω_s donnés par (54) satisfont identiquement à chacune des équations (5).

4. Revenons maintenant à la transformation de la variation $\delta^2 V$.

Si nous ajoutons à la troisième intégrale de l'expression (26) l'intégrale de l'équation (44), nous aurons

$$(55)\qquad \delta^2 V_1 = A + B,$$

où

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} A = &\int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}\,\omega_s\,\omega_\sigma\right) dx_1 \ldots dx_i \\ &+ \int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\,\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}\,\omega_s\right) dx_1 \ldots dx_i \\ &+ \int \sum_s \sum_\nu \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k}\,\Lambda_{k,\nu}\,t_\nu\,\omega_s\right) dx_1 \ldots dx_i, \end{aligned}\right.$$

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} h^{(\nu)}_{s,\sigma} = &\frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma}\,R_{\sigma,\nu}\,t_\nu + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}}\,\frac{\partial(R_{\sigma,\nu}\,t_\nu)}{\partial x_i} \\ &- \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}\,R_{\sigma,\nu}\,t_\nu\right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\,\frac{\partial(R_{\sigma,\nu}\,t_\nu)}{\partial x_j}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} \beta = &\sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma h^{(\nu)}_{s,\sigma}\,R_{s,n}\,t_n \\ &+ \sum_n \sum_\nu \sum_s R_{s,n}\,t_n\,t_\nu \left[\sum_k \frac{\partial N_s}{\partial \lambda_k}\,\Lambda_{k,\nu} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k}\,\Lambda_{k,\nu}\right)\right] \\ &+ \sum_n \sum_\nu \sum_i t_n\,\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_\sigma \left(\sum_k \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial \lambda_k}\,\Lambda_{k,n}\right) R_{\sigma,\nu}\right] \\ &- \sum_n \sum_\nu \sum_i t_n\,\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_s \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k}\,\Lambda_{k,\nu}\right) R_{s,n}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(59)\qquad B = \int \beta\, dx_1 \ldots dx_i.$$

De même, si nous ajoutons à la troisième intégrale de l'expression (27) l'intégrale de l'équation (45), nous aurons

$$(60) \qquad \delta^2 V_2 = A_1 + B_1,$$

où

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 = &\int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma}\omega_s\,\omega_\sigma\right) dx_2 \ldots dx_i \\ &+\int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\,\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j}\,\omega_s\right) dx_2 \ldots dx_i \\ &+\int \sum_s \sum_\nu \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_\nu\, t_\nu\, \omega_s\right) dx_2 \ldots dx_i, \end{aligned} \right.$$

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{s,\sigma}^{(\nu)} = &\frac{\partial M_s}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu}\, t_\nu + \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_{\sigma,i}}\,\frac{\partial (R_{\sigma,\nu}\, t_\nu)}{\partial x_i} \\ &-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu}\, t_\nu\right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}}\,\frac{\partial (R_{\sigma,\nu}\, t_\nu)}{\partial x_j}\right], \end{aligned} \right.$$

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_1 = &\sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma g_{s,\sigma}^{(\nu)} R_{s,n}\, t_n \\ &+\sum_n \sum_\nu \sum_s R_{s,n}\, t_n\, t_\nu \left[\frac{\partial M_s}{\partial l} L_\nu - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_\nu\right)\right] \\ &+\sum_n \sum_\nu \sum_i t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_\sigma \frac{\partial Q_{\sigma,i}}{\partial l} L_n\, R_{\sigma,\nu}\right] \\ &-\sum_n \sum_\nu \sum_i t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\left[\sum_s \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_\nu\, R_{s,n}\right], \end{aligned} \right.$$

$$(64) \qquad B_1 = \int \beta_1\, dx_2 \ldots dx_i.$$

Pour la transformation de $\delta^2 V$ que nous avons en vue, on doit faire des réductions d'abord dans l'expression (58) de β, et ensuite dans l'expression (63) de β_1.

Nous allons maintenant démontrer l'égalité suivante :

$$(65) \qquad \beta = \rho + c + f + \sum_n \sum_\nu \sum_s R_{s,n}\, t_n\, t_\nu\, h_{s,\nu},$$

où

$$(66) \quad \rho = \sum_n \sum_\nu \sum_i t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i} \left\{ \begin{aligned} &\sum_\sigma \left(\sum_s \frac{\partial P_{\sigma,i}}{d y_s} R_{s,n} + \sum_k \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,n} + \sum_s \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial p_{s,j}}\,\frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_j}\right) R_{\sigma,\nu} \\ &-\sum_s \left(\sum_\sigma \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} + \sum_\sigma \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\,\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i}\right) R_{s,n} \end{aligned} \right\}$$

$$(67)\qquad c=-\sum_n\sum_\nu\sum_s\sum_\sigma\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}R_{s,n}t_n\right),$$

$$(68)\qquad f=\sum_n\sum_\nu\sum_s\sum_\sigma\sum_i\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i},$$

$h_{s,\nu}$ étant le second membre de l'équation (35). Pour établir la formule (65), observons que

$$(69)\quad\left\{\begin{aligned}
R_{s,n}h_{s,\sigma}^{(\nu)}&=R_{s,n}R_{\sigma,\nu}t_\nu\frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma}+\sum_i R_{s,n}\frac{\partial(R_{\sigma,\nu}t_s)}{\partial x_i}\frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}}\\
&\quad-\sum_i R_{s,n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}t_\nu\right)\\
&\quad-\sum_i R_{s,n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial(R_{\sigma,\nu}t_\nu)}{\partial x_j}\right]\\
&=R_{s,n}t_\nu\left[\frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}+\sum_i\frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i}-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{\sigma,\nu}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)\right]\\
&\quad+\sum_i\frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}}R_{s,n}R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}-\sum_i\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma}R_{s,n}R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\\
&\quad-\sum_i\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}R_{s,n}\frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\\
&\quad-\sum_i\sum_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\right)R_{s,n}R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\\
&\quad-\sum_i\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}R_{s,n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right),
\end{aligned}\right.$$

et, en vertu de

$$\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}=\frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
&-\sum_i\sum_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\right)R_{s,n}R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}-\sum_i\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}R_{s,n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right)\\
&=-\sum_i\sum_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}R_{s,n}\right)R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\\
&\quad-\sum_i\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}R_{s,n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right)+\sum_i\sum_j\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i}R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\\
&=-\sum_i\sum_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}R_{s,n}R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right)+\sum_i\sum_j\frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}}\frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i}R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Or, les indices i, j étant les mêmes, on a

$$\sum_i\sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}} \frac{\partial \mathrm{R}_{s,n}}{\partial x_i} \mathrm{R}_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} = \sum_i\sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{\sigma,i}}{\partial p_{s,j}} \frac{\partial \mathrm{R}_{s,n}}{\partial x_j} \mathrm{R}_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i};$$

par conséquent,

$$(70)\quad -\sum_i\sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}}\right) \mathrm{R}_{s,n}\mathrm{R}_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} - \sum_i\sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \mathrm{R}_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{R}_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right)$$

$$(71)\quad = -\sum_i\sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \mathrm{R}_{s,n}\mathrm{R}_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) + \sum_i\sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial \mathrm{R}_{s,n}}{\partial x_j} \mathrm{R}_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}.$$

Si, dans la formule (69), nous remplaçons l'expression (70), qui s'y trouve, par (71), nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{s,n} h_{s,\sigma}^{(\nu)} = \mathrm{R}_{s,n} t_n \Bigg[& \frac{\partial \mathrm{N}_s}{\partial y_\sigma}\mathrm{R}_{\sigma,\nu} + \sum_i \frac{\partial \mathrm{N}_s}{\partial p_{\sigma,i}} \frac{\partial \mathrm{R}_{\sigma,\nu}}{\partial x_i} \\
& - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial y_\sigma}\mathrm{R}_{\sigma,\nu}\right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial \mathrm{R}_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)\Bigg] \\
& - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \mathrm{R}_{s,n}\mathrm{R}_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) \\
& + \sum_i \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}\Bigg[\left(\frac{\partial \mathrm{P}_{\sigma,i}}{\partial y_s}\mathrm{R}_{s,n} + \sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{\sigma,i}}{\partial p_{s,j}} \frac{\partial \mathrm{R}_{s,n}}{\partial x_j}\right)\mathrm{R}_{\sigma,\nu} \\
& \qquad - \left(\frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial y_\sigma}\mathrm{R}_{\sigma,\nu} + \sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial \mathrm{R}_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\right)\mathrm{R}_{s,n}\Bigg].
\end{aligned}$$

Multipliant cette dernière expression par t_n, faisant ensuite les sommations relatives aux indices s, σ, n, ν, et remplaçant

$$-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \mathrm{R}_{s,n}\mathrm{R}_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) t_n$$

par

$$-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \mathrm{R}_{s,n}\mathrm{R}_{\sigma,\nu} t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}\right) + \sum_i\sum_j \frac{\partial \mathrm{P}_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \mathrm{R}_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i} \mathrm{R}_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j},$$

nous obtiendrons l'égalité (65).

Or il est aisé de voir que ρ (66), par la substitution aux variables t_n et t_ν des fonctions de nouvelles variables, se réduit identiquement à zéro. En effet, en remettant dans le second membre de l'égalité (66), pour $\mathrm{R}_{s,n}$, $\Lambda_{k,n}$, $\mathrm{R}_{\sigma,\nu}$, $\Lambda_{k,\nu}$, leurs expressions (28), (29),

(30), (32), l'égalité (66) prendra la forme suivante :

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} \rho = \sum_n \sum_\nu \sum_i t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i} \Big[& \sum_\sigma \sum_m \sum_\mu \left(\frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial a_m} \frac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu} b_{n,m} b_{\nu,\mu} \right) \\ & - \sum_s \sum_m \sum_\mu \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial a_\mu} \frac{\partial y_s}{\partial a_m} b_{n,m} b_{\nu,\mu} \right) \Big]. \end{aligned}\right.$$

Les constantes $b_{n,\mu}$ ou $b_{\nu,m}$, parfaitement arbitraires, n'étant assujetties qu'à la condition d'être des quantités réelles et positives, on peut toujours leur attribuer des valeurs pour lesquelles le déterminant des s^2 quantités $\sqrt{b_{n,\mu}}$ ou $\sqrt{b_{\nu,m}}$ ne soit pas égal à zéro, et par conséquent on peut exprimer les variables t_n ou t_ν en fonctions d'autant de variables arbitraires et indépendantes t_μ ou t_m, en prenant les radicaux positifs $\sqrt{b_{n,\mu}}$ ou $\sqrt{b_{\nu,m}}$ pour coefficients de ces variables t_μ ou t_m, c'est-à-dire qu'on peut poser

$$(73)\qquad t_n = \sum_\mu t_\mu \sqrt{b_{n,\mu}}, \quad t_\nu = \sum_m t_m \sqrt{b_{\nu,m}}.$$

En remplaçant, dans le second membre de l'égalité (72), les variables t_n et t_ν par leurs expressions (73), nous aurons

$$(74)\quad \rho = \sum_m \sum_\mu \sum_i t_\mu \frac{\partial t_m}{\partial x_i} \left\{\begin{aligned} & \sum_\sigma \sum_n \sum_\nu \left(\frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial a_m} \frac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu} b_{n,m} b_{\nu,\mu} \sqrt{b_{n,\mu}} \sqrt{b_{\nu,m}} \right) \\ & - \sum_s \sum_n \sum_\nu \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial a_\mu} \frac{\partial y_s}{\partial a_m} b_{n,m} b_{\nu,\mu} \sqrt{b_{n,\mu}} \sqrt{b_{\nu,m}} \right) \end{aligned}\right\}.$$

De même, en posant

$$(75)\qquad t_\mu = \sum_n T_n \sqrt{b_{n,\mu}}, \quad t_m = \sum_\nu T_\nu \sqrt{b_{\nu,m}},$$

et, en portant ces valeurs (75) de t_μ et t_m dans le second membre de l'égalité (74), l'expression de ρ devient

$$(76)\quad \rho = \sum_n \sum_\nu \sum_i T_n \frac{\partial T_\nu}{\partial x_i} \left\{\begin{aligned} & \sum_\sigma \sum_m \sum_\mu \left(\frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial a_m} \frac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu} b_{n,m} b_{\nu,\mu} b_{n,\mu} b_{\nu,m} \right) \\ & - \sum_s \sum_m \sum_\mu \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial a_\mu} \frac{\partial y_s}{\partial a_m} b_{n,m} b_{\nu,\mu} b_{n,\mu} b_{\nu,m} \right) \end{aligned}\right\}.$$

En changeant, dans le terme $\sum_\sigma \sum_m \sum_\mu \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial a_m} \frac{\partial y_\sigma}{\partial a_\mu} b_{n,m} b_{\nu,\mu} b_{n,\mu} b_{\nu,m}$, les indices m, μ, σ respectivement en μ, m, s, il est évident que le

second membre de l'égalité (76) sera égal à zéro, ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi les procédés que nous avons suivis dans la transformation de l'expression (58) de β montrent que cette expression se réduit à la suivante :

$$(77) \qquad \beta = c + f + \sum_n \sum_\nu \sum_s \mathrm{R}_{s,n} h_{s,\nu} t_n t_\nu.$$

Les mêmes procédés, étant appliqués, sans aucun changement, à l'expression (63) de β_1, montreront aussi que cette expression se réduit à la suivante :

$$(78) \qquad \beta_1 = c_1 + f_1 + \sum_n \sum_\nu \sum_s \mathrm{R}_{s,n} g_{s,\nu} t_n t_\nu,$$

où

$$(79) \qquad c_1 = -\sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial \mathrm{Q}_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \mathrm{R}_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} \mathrm{R}_{s,n} t_n\right),$$

$$(80) \qquad f_1 = \sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathrm{Q}_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \mathrm{R}_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} \mathrm{R}_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i},$$

$g_{s,\nu}$ étant le second membre de l'équation (38).

Or, dans l'égalité (77), le coefficient $h_{s,\nu}$ de $\mathrm{R}_{s,n} t_n t_\nu$ étant nul en vertu de l'équation (34), il en résulte l'égalité

$$(81) \qquad \beta = c + f.$$

Si, pour abréger, nous faisons

$$(82) \qquad \mathrm{C} = \int c\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i,$$

$$(83) \qquad \mathrm{F} = \int f\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i,$$

$$(84) \qquad \mathrm{C}_1 = \int c_1\, dx_2 \ldots dx_i,$$

$$(85) \qquad \mathrm{F}_1 = \int f_1\, dx_2 \ldots dx_i,$$

$$(86) \qquad \mathrm{G} = \int \sum_n \sum_\nu \sum_s \mathrm{R}_{s,n} g_{s,\nu} t_n t_\nu\, dx_1 \ldots dx_i,$$

en vertu des formules (23), (55), (56), (59), (81), (82), (83), (60), (61), (64), (78), (84), (85) et (86), nous trouverons

$$(87) \qquad \delta^2 \mathrm{V} = \mathrm{A} + \mathrm{C} + \mathrm{G} + \mathrm{A}_1 + \mathrm{C}_1 + \mathrm{F} + \mathrm{F}_1.$$

Remplaçant, dans l'intégrale (82), la valeur $R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}$ par

$$\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} - t_\nu \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j},$$

on a

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned} C = &\int \sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} R_{s,n} t_n t_\nu\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_i \\ &- \int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} \omega_s\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_i. \end{aligned}\right.$$

Nous voyons que les secondes intégrales des expressions (56) A et (88) C disparaissent; d'ailleurs, si, dans la première intégrale de A (56), nous substituons la somme $\sum_\nu R_{\sigma,\nu} t_\nu$ à ω_σ, et si nous ajoutons le résultat à la première intégrale de C (88) et à la troisième de A (56), nous aurons

$$(89)\quad \left\{\begin{aligned} A + C = \int \sum_s \sum_\nu \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Bigg[\Bigg(&\sum_\sigma \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} \\ &+ \sum_\sigma \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\Bigg) t_\nu \omega_s\Bigg] dx_1 \ldots dx_i. \end{aligned}\right.$$

De la même manière, nous trouverons

$$(90)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 + C_1 = \int \sum_s \sum_\nu \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Bigg[\Bigg(&\sum_\sigma \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_\nu \\ &+ \sum_\sigma \sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j}\Bigg) t_\nu \omega_s\Bigg] dx_2 \ldots dx_i. \end{aligned}\right.$$

L'expression A + C (89) se réduira, au moyen de transformations connues, à deux intégrales de l'ordre $i - 1$, et l'expression $A_1 + C_1$ (90) à deux intégrales de l'ordre $i - 2$. Chacune des deux intégrales obtenues pour l'expression $A_1 + C_1$ sera égale à zéro, en vertu des équations (40); une des deux intégrales obtenues pour l'expression A + C, savoir, celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x'_1 sera seule égale à zéro, en vertu des équations (39), et l'autre, savoir celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x''_1, étant jointe à l'intégrale G (86), sera aussi égale à zéro, en vertu des équations (37); donc la formule (87) deviendra

$$(91)\qquad \delta^2 V = \int f\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_i + \int f_1\, dx_2 \ldots dx_i.$$

En ayant égard aux formules (68), (80) et (91), et en y remplaçant $R_{s,n}\frac{\partial t_n}{\partial x_i}$ et $R_{\sigma,\nu}\frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}$ respectivement par $\tau_{s,i}$ et $\tau_{\sigma,j}$, la formule (91) deviendra

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2 V = &\int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial P_{s.i}}{\partial p_{\sigma,j}} \tau_{s,i}\tau_{\sigma,j}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_i \\ &+ \int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial Q_{s.i}}{\partial q_{\sigma,j}} \tau_{s,i}\tau_{\sigma,j}\right) dx_2\, dx_3 \ldots dx_i. \end{aligned}\right.$$

On sait d'ailleurs que la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple, qui contient sous le signe $\int$ les dérivées partielles d'ordre quelconque des fonctions inconnues, peut toujours, au moyen des équations de condition, se ramener à la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple qui renferme sous le signe $\int$ les dérivées partielles du premier ordre seulement des fonctions inconnues. D'après cela, la formule (92) conduit au théorème suivant :

1° *Dans le cas où il n'y a pas d'équations de condition, telles que* (9), *qui ne se rapportent qu'aux limites des intégrations, la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple se ramènera à la discussion d'une seule partie de la variation seconde, savoir, de la partie intégrable.*

2° *Dans le cas où l'on donne des équations de condition, telles que* (9), *qui ne se rapportent qu'aux limites des intégrations, on devra discuter les deux parties de la variation seconde, savoir, la partie non intégrable et celle qui ne se rapporte qu'aux limites des intégrations, et chacune des deux fonctions qui se trouvent l'une dans la première partie et l'autre dans la seconde est l'expression différentielle entière, homogène et du second degré par rapport à des variables arbitraires.*

Pour l'élimination d'une ou de plusieurs des quantités $\tau_{s,i}$ *qui ne se rapportent qu'aux limites des intégrations, on emploiera une ou plusieurs des équations telles que l'équation* (53); *pour l'élimination des k quantités* $\tau_{s,i}$ *qui se trouvent dans la partie non intégrable, on emploiera les k équations* (52). *Cette élimination*

étant faite, la discussion de la variation $\delta^2 V$ (92) *se ramènera, en général, à celle de deux expressions différentielles entières, homogènes et du second degré par rapport à des variables arbitraires et indépendantes entre elles* $\tau_{s,i}$.

Le théorème énoncé se rapporte à la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple qui ne renferme pas explicitement sous le signe $\int$ les dérivées partielles des valeurs limites des fonctions inconnues; mais les procédés exposés, qui servent à déduire le théorème énoncé, montrent la marche à suivre pour discuter la variation seconde de l'intégrale définie multiple qui renferme explicitement sous le signe $\int$ les dérivées partielles des valeurs limites des fonctions inconnues, et, dans ce cas sans doute, la discussion de la variation seconde se ramènera à celle de deux expressions différentielles entières, homogènes et du second degré par rapport à des variables telles que $\tau_{s,i}$.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU SECOND ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ;

PAR M. G. DARBOUX.

(Suite.)

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES AU CAS OU L, M, N SONT DU SECOND DEGRÉ.

VII.

Des points singuliers.

Dans le cas où L, M, N sont du second degré, les points singuliers sont au nombre de sept. Il résulte des théorèmes de l'article V

que quatre d'entre eux ne peuvent être en ligne droite, que six de ces points ne peuvent être sur une conique. Enfin, si trois d'entre eux sont en ligne droite, la droite qui les réunit sera une solution particulière de l'équation différentielle.

Supposons que l'on ait transporté l'origine des coordonnées en un de ces points singuliers. Les valeurs correspondantes de L, M, N pourront s'écrire, en supposant $z = 1$,

$$(59)\quad \begin{cases} L = ax + by + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2, \\ M = a'x + b'y + \alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2, \\ N = Ax^2 + Bxy + Cy^2, \end{cases}$$

et l'équation sera

$$(60)\quad -L\frac{dy}{dx} + M + N\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0.$$

Si la nature du point singulier est telle que les quatre coefficients a, b, a', b' soient nuls, il est aisé de reconnaître que l'équation sera intégrable. En effet, si nous rétablissons la 3ième coordonnée z, l'équation deviendra

$$\begin{aligned} &(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)(y\,dz - z\,dy) \\ &+ (\alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2)(z\,dx - x\,dz) \\ &+ (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(x\,dy - y\,dx) = 0, \end{aligned}$$

et elle sera une équation linéaire par rapport à z. L'intégration n'offre donc aucune difficulté, et elle nous conduit à une intégrale de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} z(y-ax)^\alpha (y-bx)^\beta (y-cx)^\gamma \\ \quad + \displaystyle\int \frac{(Ax^2 + Bxy + Cy^2)(y\,dx - x\,dy)}{(y-ax)^{1-\alpha}(y-bx)^{1-\beta}(y-cx)^{1-\gamma}} = C. \end{cases}$$

où l'on a

$$\alpha + \beta + \gamma = -1.$$

Cherchons maintenant combien il peut passer par un point singulier de courbes pour lesquelles y soit une fonction développable de x. Si nous exprimons que la courbe dont l'équation est

$$y = Cx + C'x^2 + \ldots$$

satisfait à l'équation différentielle, nous aurons pour déterminer C l'équation

$$bC^2 + (b' - a)C + a' = 0.$$

Il y a donc, en général, seulement deux courbes de cette nature passant par chaque point singulier. Il résulte, d'ailleurs, des principes exposés dans le beau Mémoire de MM. Briot et Bouquet, sur l'intégration des équations différentielles (*Journal de l'École Polytechnique* (XXXVI[e] Cahier), que ces deux courbes existent réellement, tant que l'équation précédente en C a ses racines inégales.

Si l'on veut qu'il passe, par un point singulier, plus de deux courbes à tangentes distinctes, il faudra que l'équation qui détermine C ait lieu identiquement, c'est-à-dire que l'on ait

$$b = a' = 0, \quad b' = a.$$

Alors les valeurs de L, M, N pourront s'écrire

$$\begin{aligned} L &= xz + u_2, \\ M &= yz + v_2, \\ N &= w_2, \end{aligned}$$

u_2, v_2, w_2 désignant, pour abréger, des polynômes homogènes en x, y seulement. Dans ce cas, l'équation différentielle peut s'écrire

$$\begin{aligned} dz(u_2 y - v_2 x) + w_2(x\,dy - y\,dx) \\ + (v_2\,dx - u_2\,dy)\,z + z^2(x\,dy - y\,dx) = 0. \end{aligned}$$

Elle admet comme solutions particulières les trois droites représentées par l'équation

$$u_2 y - v_2 x = 0,$$

et, du reste, si l'on fait $y = 1$, ou, ce qui revient au même, si l'on prend comme variables $\frac{z}{y}, \frac{x}{y}$, elle prend la forme

$$A\frac{dz}{dx} + B + Cz + Dz^2 = 0,$$

équation que l'on saura intégrer dès que l'on connaîtra une solution particulière.

Supposons, par exemple, qu'il y ait deux points pareils et que l'on ait choisi le triangle de référence de telle manière que les

coordonnées de ces deux points soient $x = 0$, $y = 0$ pour l'un, $y = 0$, $z = 0$ pour l'autre. Les valeurs de L, M, N seront

$$\begin{aligned} L &= xz + Ay^2 + 2Bxy, \\ M &= yz + 2Kxy, \\ N &= 2Kzx + \alpha y^2 + 2Byz. \end{aligned}$$

Nous allons voir que l'on a cinq droites comme solutions particulières.

En effet, on a d'abord la droite $y = 0$, donnant lieu à l'équation

$$\Delta y = 0,$$

puis deux autres droites passant par le point $x = 0$, $y = 0$,

$$y + \lambda' x = 0, \quad y + \lambda'' x = 0,$$

pourvu que λ', λ'' soient les racines de l'équation

$$A\lambda^2 - 2B\lambda - 2K = 0,$$

et, de même, deux autres droites passant par le point $y = 0$, $z = 0$,

$$y + \mu' z = 0, \quad y + \mu'' z = 0,$$

μ', μ'' étant les racines de l'équation

$$\alpha\mu^2 - 2\beta\mu - 1 = 0.$$

Au moyen des cinq solutions ainsi obtenues, nous allons obtenir l'intégrale générale en appliquant la méthode de l'article IV. On a

$$\begin{aligned} \Delta y &= (z + 2Kx) \cdot y, \\ \Delta(y + \lambda' x) &= (A\lambda' y + z)(y + \lambda' x), \\ \Delta(y + \lambda'' x) &= (A\lambda'' y + z)(y + \lambda'' x), \\ \Delta(y + \mu' z) &= (2Kx + \alpha\mu' y)(y + \mu' z), \\ \Delta(y + \mu'' z) &= (2Kx + \alpha\mu'' y)(y + \mu'' z), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\Delta \left(\frac{y + \lambda' x}{y + \lambda'' x}\right)^n \left(\frac{y + \mu' z}{y + \mu'' z}\right)^p = 0,$$

pourvu que le rapport $\frac{n}{p}$ satisfasse à l'équation

$$An(\lambda' - \lambda'') + \alpha p(\mu' - \mu'') = 0.$$

L'intégrale générale sera donc

$$\left(\frac{y+\lambda' x}{y+\lambda'' x}\right)^n = C\left(\frac{y+\mu'' z}{y+\mu' z}\right)^p,$$

ou, en l'écrivant indépendamment de tout système d'axes,

(II) $$\frac{p}{q} = C\left(\frac{r}{s}\right)^\alpha,$$

p, q, r, s désignant des polynômes du premier degré.

Enfin, si l'on voulait qu'il y eût plus de deux points singuliers de l'espèce indiquée, on obtiendrait le cas particulier suivant de l'intégrale précédente,

(III) $$ps = Cqr,$$

qui représente des coniques passant par quatre points fixes. On voit que ces quatre points fixes sont des points singuliers de l'espèce indiquée.

Considérons maintenant les points singuliers par lesquels peuvent passer deux courbes qui soient tangentes sans être osculatrices. On peut alors démontrer le théorème suivant, qui nous sera utile dans la suite :

Toutes les fois que deux courbes, satisfaisant à l'équation, sont tangentes en un de leurs points communs sans y être osculatrices, la tangente commune au point de contact sera une solution particulière de l'équation différentielle.

Prenons, en effet, l'origine des coordonnées en ce point, qui sera nécessairement un point singulier, et supposons que la tangente commune ait été prise pour axe des x. Les valeurs de L, M, N sont données par les formules (59). Si l'on écrit que l'équation est satisfaite par une valeur de y de la forme

$$y = Cx^2 + C'x^3 + \ldots,$$

on aura, en ordonnant,

$$0 = -a'x + [C(2a - b') - \alpha']x^2 + \ldots;$$

on devra donc avoir

$$a' = 0, \quad C(2a - b') - \alpha' = 0, \quad \ldots.$$

Si donc il y a deux courbes satisfaisant à l'équation, et simplement tangentes, il sera nécessaire que l'équation

$$(61) \qquad C(2a - b') - \alpha' = 0$$

soit vérifiée par deux valeurs de C, ce qui ne peut avoir lieu que si l'on a

$$\alpha' = 0, \quad 2a - b' = 0.$$

Or, si α' est nul, l'équation admettra la solution $y = 0$, et par conséquent le théorème est démontré.

Le même calcul conduit à une autre proposition. Supposons qu'il y ait seulement une courbe passant par le point singulier tangentiellement à une droite donnée, mais que ce point soit un point d'inflexion pour la courbe. Alors le développement de y commencera seulement au terme en y^3 ou à des termes d'ordre supérieur. C sera nul, et l'équation (61) nous donnera

$$\alpha' = 0.$$

Ainsi :

Si un des points singuliers de l'équation différentielle est point d'inflexion pour une des courbes qui y passent, la tangente à cette courbe au point d'inflexion sera une solution particulière de l'équation différentielle.

Après avoir indiqué cette proposition, revenons à l'étude du cas où il y a des points singuliers par lesquels passent des courbes simplement tangentes les unes aux autres.

Supposons, par exemple, qu'il y ait trois points de cette nature, par chacun desquels il puisse passer deux courbes qui soient tangentes sans être osculatrices, et que les trois tangentes en ces points forment un triangle. Si nous prenons ce triangle pour triangle de référence, les valeurs de L, M, N devront être divisibles par x, y, z respectivement, puisque les trois côtés du triangle donnent trois solutions de l'équation. Les valeurs de L, M, N prendront les formes

$$L = x(a'y + bz),$$
$$M = y(a''z + b'x),$$
$$N = z(ax + b''y).$$

On verra, en effet, que, parmi les formes en nombre infini que l'on

peut donner à L, M, N, il y en a toujours une pour laquelle L ne contient pas le terme en x^2, M le terme en y^2 et N le terme en z^2. Les trois points singuliers qui, en dehors des sommets, sont sur les côtés du triangle se déterminent aisément. Leurs coordonnées sont

$$x = 0, \quad a''z = b''y,$$
$$y = 0, \quad bz = ax,$$
$$z = 0, \quad a'y = b'x.$$

En exprimant qu'il y a au moins deux courbes, passant en chacun de ces points et tangentes au côté correspondant du triangle, on trouve les équations de condition

$$aa'' + bb' + ab = 0,$$
$$a'a + b'b'' + a'b' = 0,$$
$$a''a' + bb'' + a''b'' = 0.$$

On peut, d'ailleurs, toujours disposer des paramètres de référence de telle manière que l'on ait

$$a = b, \quad a' = b'.$$

Alors les équations précédentes se réduisent aux deux suivantes :

$$a'' = b'', \quad a + a' + a'' = 0,$$

et les valeurs de L, M, N peuvent s'écrire

$$L = x[(\gamma - \beta)y + (\beta - \alpha)z],$$
$$M = y[(\alpha - \gamma)z + (\gamma - \beta)x],$$
$$N = z[(\beta - \alpha)x + (\alpha - \gamma)y].$$

Nous intégrerons plus loin (art. XV) l'équation définie par ces valeurs.

Considérons encore l'équation définie par les valeurs

$$L = x(y + 2z),$$
$$M = y(z + 2x),$$
$$N = z(x + 2y),$$

qui présente des propriétés analogues pour les trois points singuliers, sommets du triangle de référence, et cela de telle manière qu'au point $z = 0$, $y = 0$, il passe au moins deux courbes tan-

gentes à la droite $y=0$; qu'au point $x=0$, $z=0$, il y ait de même au moins deux courbes tangentes à la droite $z=0$, et, enfin, qu'au point $y=0$, $x=0$, il y en ait deux au moins, tangentes à la droite $x=0$.

Aux trois solutions particulières $x=0$, $y=0$, $z=0$, on peut ajouter la suivante :

$$xz^2+yx^2+zy^2-3xyz=0,$$

qui représente une courbe du troisième degré, à la fois inscrite et circonscrite au triangle de référence. Avec quatre solutions, on pourra former le multiplicateur. On a

$$\Delta x=(y+2z)x,$$
$$\Delta y=(z+2x)y,$$
$$\Delta z=(x+2y)z,$$

et en posant, pour abréger,

$$v=xz^2+yx^2+zy^2-3xyz,$$

on trouve

$$\Delta v=(2x+2y+2z)v.$$

Le multiplicateur sera de la forme

$$\mu=x^\alpha y^\beta z^\gamma v^\delta,$$

α, β, γ, δ étant définis par les équations (art. V)

$$\alpha+\beta+\gamma+3\delta=-4,$$

$$\alpha\frac{\Delta x}{x}+\beta\frac{\Delta y}{y}+\gamma\frac{\Delta z}{z}+\delta\frac{\Delta v}{v}+\mathrm{H}=0,$$

qui donnent

$$\alpha=\beta=\gamma=-\tfrac{1}{3},\quad \delta=-1.$$

On a donc

$$\mu=(xyz)^{-\frac{1}{3}}(xz^2+yz^2+zy^2-3yxz)^{-1}.$$

Mais, au lieu d'effectuer l'intégration, il est préférable de faire un changement de variables et de substituer à x, y, z les variables

$$\lambda=(xz^2)^{\frac{1}{3}},\quad \mu=(yx^2)^{\frac{1}{3}},\quad \nu=(zy^2)^{\frac{1}{3}}.$$

On a

$$L' = \Delta\lambda = \lambda(\lambda\nu^2 + \mu^2\lambda - 2\mu\nu^2),$$
$$M' = \Delta\mu = \mu(\mu^2\lambda + \nu^2\mu - 2\nu\lambda^2),$$
$$N' = \Delta\nu = \nu(\nu^2\mu + \lambda\nu - 2\mu^2\lambda),$$

et, en appliquant les formules de l'article VI, la nouvelle équation en λ, μ, ν sera

$$L'(\mu\, d\nu - \nu\, d\mu) + M'(\nu\, d\lambda - \lambda\, d\nu) + N'(\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda) = 0.$$

Si l'on substitue à L', M', N' les valeurs

$$L' - \lambda(\lambda^2\nu + \mu^2\lambda + \mu\nu^2),$$
$$M' - \mu(\lambda^2\nu + \mu^2\lambda + \mu\nu^2),$$
$$N' - \nu(\lambda^2\nu + \mu^2\lambda + \mu\nu^2),$$

ce qui ne change pas l'équation, le facteur $\lambda\mu\nu$ sera en évidence, et, après sa suppression, on aura

$$\nu(\mu\, d\nu - \nu\, d\mu) + \lambda(\nu\, d\lambda - \lambda\, d\nu) + \mu(\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda) = 0,$$

ce qui est une équation de Jacobi. On a, pour cette équation,

$$\Delta(\lambda + \mu + \nu) = \lambda + \mu + \nu,$$
$$\Delta(\lambda + \alpha\mu + \alpha^2\nu) = \alpha(\lambda + \alpha\mu + \alpha^2\nu),$$
$$\Delta(\lambda + \alpha^2\mu + \alpha\nu) = \alpha^2(\lambda + \alpha^2\mu + \alpha\nu),$$

α étant une racine cubique imaginaire de l'unité, et, par conséquent, l'intégrale est

$$(\lambda + \mu + \nu)(\lambda + \alpha\mu + \alpha^2\nu)^{\alpha}(\lambda + \alpha^2\mu + \alpha\nu)\alpha^2 = C,$$

ou, en revenant aux notations primitives,

$$(\text{IV}) \left\{ \begin{aligned} &\left(x^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} + \alpha y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} + \alpha^2 z^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}\right)^{\alpha} \\ &\qquad \times \left(x^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} + \alpha^2 y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} + \alpha z^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}\right)^{\alpha^2} = C. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale générale n'est donc pas algébrique.

Je terminerai ce que j'ai à dire sur les points singuliers en remarquant que, si l'on considère trois points singuliers, non en ligne droite, on peut toujours, en substituant à L, M, N les valeurs $L - Ax$, $M - Ay$, $N - Az$, disposer des trois constantes contenues dans le polynôme du premier degré A, de telle ma-

nière que les nouvelles valeurs de L, M, N s'annulent pour les trois points singuliers. Alors, si l'on prend le triangle de ces trois points pour triangle de référence, on aura

$$(62)\qquad \begin{cases} L = A\,yz + B''xz + C'xy, \\ M = C''yz + A'xz + B\,xy, \\ N = B'yz + C\,xz + A''xy. \end{cases}$$

Après ces remarques préliminaires sur les points singuliers, nous allons intégrer l'équation différentielle, en supposant qu'il y ait des solutions particulières du premier, du second ou du troisième degré, en nombre suffisant pour donner soit le multiplicateur, soit l'intégrale générale.

VIII.

Intégration de l'équation proposée dans le cas où le facteur est une puissance d'un polynôme du premier degré.

Dans ce cas, il y aura, comme solution particulière, la droite que l'on obtient en égalant ce polynôme à zéro. Supposons que l'on ait choisi le triangle de référence de telle manière que l'équation de cette droite soit

$$z = 0.$$

Alors l'équation différentielle pourra être ramenée à la forme

$$L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz) = 0,$$

où N est nul. L'expression $\dfrac{L(y\,dz - z\,dy) + M(z\,dx - x\,dz)}{z^4}$ devra être une différentielle exacte. Si l'on fait $z = 1$, elle se réduit à

$$-L\,dy + M\,dx.$$

Il faudra donc que l'on ait

$$\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

d'où il suit que l'on peut poser

$$L = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad M = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

v désignant un polynôme du troisième degré en x, y. L'intégrale générale sera donc

$$v = C,$$

ou, si l'on rétablit l'homogénéité,

$$V = Cz^3,$$

V désignant un polynôme homogène quelconque du troisième degré en x, y, z. Si l'on écrit cette équation indépendamment de tout choix particulier d'axes, elle devient

$$(V) \qquad v = Cp^3,$$

p étant un polynôme quelconque du premier degré. Réciproquement, on reconnaîtra sans peine que l'équation différentielle des courbes représentées par l'équation précédente se ramène, quels que soient v et p, au type que nous étudions.

A l'examen de ce premier cas d'intégrabilité se rattache un théorème qui nous sera utile dans la suite. *Ce cas est le seul dans lequel l'équation proposée puisse admettre comme solution particulière une cubique sans point double.*

En effet, supposons que l'équation proposée admette comme solution une telle cubique, représentée par l'équation

$$v = 0;$$

on devra prendre pour L, M, N (art. III) les valeurs

$$L = b\frac{\partial v}{\partial z} - c\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$M = c\frac{\partial v}{\partial x} - a\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$N = a\frac{\partial v}{\partial y} - b\frac{\partial v}{\partial x},$$

où a, b, c seront nécessairement des constantes, puisque L, M, N doivent être du second degré, comme les dérivées de v. L'équation pourra donc s'écrire (art. III)

$$3v(a\,dx + b\,dy + c\,dz) - dv(ax + by + cz) = 0,$$

et, en intégrant, on aura

$$v = C(ax + by + cz)^3.$$

IX.

Examen du cas où le facteur est de la forme $p^\alpha q^\beta$, p et q étant du premier degré.

Dans ce cas, l'équation devra admettre comme solutions les deux droites représentées par les équations

$$p = 0, \quad q = 0;$$

si l'on prend le triangle de référence de telle manière que les équations de ces deux droites deviennent

$$x = 0, \quad y = 0,$$

l'équation différentielle pourra s'écrire

$$x\mathrm{A}\,(y\,dz - z\,dy) + \mathrm{N}\,(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

A étant un polynôme du premier degré. Le facteur sera $x^\alpha y^\beta$, et l'on aura d'abord

$$\alpha + \beta = -4.$$

Il faut écrire que l'on a identiquement

$$\alpha\frac{\Delta x}{x} + \beta\frac{\Delta y}{y} + \mathrm{H} = 0;$$

or on a

$$\Delta x = x\mathrm{A}, \quad \Delta y = 0, \quad \mathrm{H} = \mathrm{A} + x\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z};$$

on devra donc avoir identiquement

$$(\alpha + 1)\,\mathrm{A} + x\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} = 0.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{A} = mx + ny + pz,$$

on trouvera que la valeur de N satisfaisant à l'équation précédente est

$$\mathrm{N} = -(\alpha + 1)\left(mxz + nyz + p\frac{z^2}{2}\right) - mxz + ax^2 + bxy + cy^2,$$

et l'équation différentielle pourra s'écrire

$$d\left[x^{\alpha+1}y^{\beta+1}\left(mxz + nyz + \frac{pz^2}{2} + a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2\right)\right] = 0,$$

a_1, b_1, c_1 étant de nouvelles constantes dépendant de a, b, c; d'où résultera pour l'intégrale la forme

(VI) $$U^m = Cp^{m'}q^{m''},$$

où U est un polynôme du second degré et p, q des polynômes du premier degré.

On peut aussi démontrer un théorème de la nature de celui que nous avons établi pour le cas précédent. *Toutes les fois que l'équation admettra comme solutions particulières une conique et deux droites, qui ne soient pas tangentes à la conique, et ne se coupent pas sur cette conique, son intégrale sera de la forme* (VI).

Prenons, en effet, pour triangle de référence le triangle formé par les deux droites et par la polaire de leur point de concours relativement à la conique. L'équation de cette conique pourra, si l'on choisit convenablement les paramètres de référence, être mise sous la forme

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2bxy = 0,$$

et les valeurs correspondantes de L, M, N seront (art. III)

$$\begin{aligned} L &= Qz - R(y + bx), \\ M &= R(x + by) - Pz, \\ N &= P(bx + y) - Q(x + by), \end{aligned}$$

P, Q, R étant des polynômes du premier degré. On aura

$$\Delta u = 0.$$

D'autre part, les droites $x = 0$, $y = 0$ devant être solutions particulières, il faudra que L, M soient divisibles respectivement par x, y; en exprimant ces conditions, on sera conduit par un calcul facile aux valeurs suivantes de P, Q, R :

$$P = x + Cy, \quad Q = y + Ax, \quad R = z,$$

et par suite aux valeurs suivantes de L, M :

$$L = x(A - b)z, \quad M = y(b - C)z;$$

on aura donc

$$\Delta x = (A - b)zx, \quad \Delta y = (b - C)zx,$$

et par conséquent

$$\Delta(x^\alpha y^\beta u^\gamma) = 0,$$

pourvu que α, β satisfassent à la relation

$$\alpha(A - b) + \beta(b - C) = 0.$$

Si maintenant on détermine γ par l'équation

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0,$$

$x^\alpha y^\beta u^\gamma$ sera une fonction homogène de degré zéro, dont le Δ sera nul, et l'intégrale générale sera par conséquent

$$x^\alpha y^\beta u^\gamma = C.$$

C'est le théorème que nous voulions démontrer; mais nous ferons remarquer, et l'on verra plus loin, que ce théorème cesserait d'être exact, si les deux droites se coupaient sur la conique, ou si l'une d'elles était tangente à la conique.

X.

Du cas où le facteur est de la forme $p^\alpha q^\beta r^\gamma$, p, q, r étant du premier degré.

Dans ce cas, l'équation devra admettre comme solutions les trois droites

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0;$$

supposons d'abord que ces trois droites forment un triangle, et prenons ce triangle comme triangle de référence.

Alors les valeurs de L, M, N seront

$$L = Ax, \quad M = By, \quad N = Cz;$$

A, B, C étant du premier degré, on pourra même écrire (art. VII)

$$L = x(b'y + c''z),$$
$$M = y(b''z + cx),$$
$$N = z(bx + c'y);$$

et l'on trouvera

$$H = (b + c)x + (b' + c')y + (b'' + c'')z = A + B + C.$$

Cela posé, pour que le facteur soit $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, il faut que l'on ait

$$\Delta(x^\alpha y^\beta z^\gamma) + x^\alpha y^\beta z^\gamma H = 0,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = -4,$$

ou

$$(\alpha + 1)A + (\beta + 1)B + (\gamma + 1)C = 0.$$

Les trois polynômes A, B, C étant liés par une équation linéaire, il faudra que leur déterminant soit nul, ce qui donne l'équation de condition

$$(63) \qquad bb'b'' + cc'c'' = 0.$$

Mais alors, on peut trouver directement l'intégrale générale. Il est aisé de reconnaître qu'il y a une nouvelle droite satisfaisant à l'équation. En effet, on a

$$\Delta(ux + vy + wz) = xy(b'u + cv) + yz(b''v + c'w) + zx(bw + c''u),$$

et, si la condition (63) est vérifiée, on peut trouver des valeurs de u, v, w satisfaisant aux équations

$$b'u + c\ v = 0,$$
$$b''v + c'w = 0,$$
$$bw + c''u = 0.$$

On aura donc, avec ces valeurs,

$$\Delta(ux + vy + wz) = 0.$$

D'autre part, on peut trouver des nombres α', β', γ', tels que

$$\Delta(x^{\alpha'} y^{\beta'} z^{\gamma'}) = 0.$$

Il suffira que α', β', γ' vérifient les équations

$$\alpha' b' + \gamma' c' = 0,$$
$$\beta' b'' + \alpha' c'' = 0,$$
$$\gamma' b + \beta' c = 0,$$

également compatibles en vertu de la relation (63) On aura donc

$$\Delta[x^{\alpha'}y^{\beta'}z^{\gamma'}(ux+vy+wz)^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}]=0,$$

et par conséquent l'intégrale générale sera

$$x^{\alpha'}y^{\beta'}z^{\gamma'}=C(ux+vy+wz)^{\alpha'+\beta'+\gamma'}.$$

Elle est de la forme

$$\text{(VII)}\qquad p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}=C,$$

p, q, r, s étant des polynômes du premier degré et la somme $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ étant nulle. Réciproquement, quels que soient p, q, r, s, l'équation différentielle des courbes (VII) appartient au type que nous étudions.

Examinons maintenant le cas où les trois polynômes p, q, r, qui forment le facteur égalé à zéro, représentent trois droites concourantes. Par un choix convenable des axes et des paramètres de référence, on pourra ramener les équations de ces trois droites à être

$$y=0,\quad z=0,\quad y-z=0.$$

On aura ici

$$M=By,\quad N=0,$$

et comme

$$\Delta(y-z)=M-N=By,$$

il faudra que B soit divisible par $y-z$. On aura donc

$$M=y(y-z),$$

et l'équation deviendra

$$(64)\qquad L(y\,dz-z\,dy)+y(y-z)(z\,dx-x\,dz)=0.$$

On aura

$$H=\frac{\partial L}{\partial x}+2y-z,$$

$$\Delta y=(y-z)y,$$

$$\Delta z=0,$$

$$\Delta(y-z)=y(y-z),$$

et par conséquent

$$\Delta[y^{\alpha}z^{\beta}(y-z)^{\gamma}]=[\alpha(y-z)+\gamma y]y^{\alpha}z^{\beta}(y-z)^{\gamma}.$$

Le multiplicateur devant satisfaire à l'équation

$$\Delta\mu+\mu H=0,$$

il faudra que l'on ait

$$\alpha(y-z)+\gamma y+\frac{\partial L}{\partial x}+2y-z=0.$$

Cette équation détermine pour L la valeur

$$L=(\alpha+1)x(z-y)-(\gamma+1)xy+Ay^2+Byz+A'z^2.$$

L'équation proposée, multipliée par le facteur, prendra la forme

$$d[y^{\alpha+1}z^{\beta+1}(y-z)^{\gamma+1}x]$$
$$+y^{\alpha}z^{\beta}(y-z)^{\gamma}(Ay^2+Byz+A'z^2)(y\,dz-z\,dy)=0.$$

On a d'ailleurs

$$\alpha+\beta+\gamma=-4.$$

En intégrant, on trouve

$$\text{(VIII)}\quad \left\{\begin{array}{l} y^{\alpha+1}z^{\beta+1}(y-z)^{\gamma+1}x \\ \quad +\int y^{\alpha}z^{\beta}(y-z)^{\gamma}(Ay^2+Byz+A'z^2)(y\,dz-z\,dy)=C. \end{array}\right.$$

La quadrature indiquée se ramène, si l'on pose $y=tz$, à la forme

$$-\int t^{\alpha}(t-1)^{\gamma}(At^2+Bt+A')\,dt,$$

qui conduit dans un très-grand nombre de cas à des fonctions algébriques.

Par exemple, pour $\gamma=1$, on obtient l'intégrale

$$\text{(IX)}\quad y^{\alpha+1}z^{-\alpha-4}[x(y-z)^2+A'y^3+B'y^2z+C'z^2y+D'z^3]=C,$$

où A', B', C', D' sont liés par l'unique relation

$$(\alpha+4)A'+(\alpha+3)B'+(\alpha+2)C'+(\alpha+1)D'=0,$$

et où C est la constante arbitraire.

XI.

Du cas où il y a au nombre des solutions particulières quatre droites.

Les calculs précédents démontrent que, s'il y a au nombre des solutions particulières quatre droites, dont trois ne soient pas

concourantes, l'intégrale générale sera de la forme (VII). Cette forme comprend, comme cas particulier, les formes (II) et (III) déjà trouvées, dans lesquelles le nombre des droites s'élève à cinq et à six. Il nous reste donc seulement à traiter le cas où, sur les quatre droites, trois sont concourantes.

Supposons que les axes aient été choisis de telle manière que les équations des trois premières droites soient

$$y = 0, \quad z = 0, \quad y - z = 0,$$

et celle de la quatrième

$$x = 0.$$

Toute équation qui admet les trois premières comme solutions particulières est, nous l'avons vu à l'article précédent,

$$y(y - z)(z\,dx - x\,dz) + L(y\,dz - z\,dy) = 0,$$

et l'on vérifie sur cette équation qu'il ne peut y avoir une quatrième droite satisfaisant à l'équation et passant par le point de concours des trois premières. Cette équation devant admettre en outre la solution $x = 0$, on aura

$$L = Ax,$$

A étant du premier degré. Comme on a quatre solutions, on pourra, sans difficulté, former le multiplicateur.

Écrivons A comme il suit :

$$A = hx - \beta y - (\alpha + 1)z;$$

le multiplicateur sera

$$y^{\alpha} z^{\beta} (y - z)^{\gamma} x^{-2},$$

γ étant défini par l'équation

$$\alpha + \beta + \gamma + 2 = 0,$$

et l'intégrale de l'équation sera

$$\text{(X)} \quad -\frac{y^{\alpha+1} z^{\beta+1} (y - z)^{\gamma+1}}{x} + h \int y^{\alpha} z^{\beta} (y - z)^{\gamma} (y\,dz - z\,dy) = C.$$

Cette forme peut donner également une infinité d'intégrales algé-

briques. Par exemple, pour $\gamma = 1$, on a

$$(\text{XI}) \qquad y^{\alpha+1} z^{-\alpha-2} x^{-1} \left[(y-z)^2 + \frac{hxy}{\alpha+2} - \frac{hxz}{\alpha+1} \right] = \text{C},$$

et pour $\gamma = 2$,

$$(\text{XII}) \quad x^{-1} y^{\alpha+1} z^{-\alpha-3} \left[(y-z)^3 + hx \left(\frac{y^2}{\alpha+3} - \frac{2yz}{\alpha+2} + \frac{z^2}{\alpha+1} \right) \right] = \text{C}.$$

Nous signalons ces formes, parce que dans ce cas il y a, comme solution particulière, soit une conique, soit une cubique.

Nous avons maintenant épuisé l'étude des cas où la solution peut être obtenue en employant les seules droites comme solutions particulières.

XII.

Remarques générales sur le cas où il y a une conique au nombre des solutions particulières.

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la conique, solution particulière. Les valeurs de L, M, N pourront être prises (art. III) sous la forme

$$(65) \qquad \begin{cases} \text{L} = \text{Q} f'_z - \text{R} f'_y, \\ \text{M} = \text{R} f'_x - \text{P} f'_z, \\ \text{N} = \text{P} f'_y - \text{Q} f'_x, \end{cases}$$

P, Q, R étant du premier degré, et alors on aura

$$(66) \quad \begin{cases} \Delta f = 0, \\ \text{H} = f'_x \left(\dfrac{\partial \text{R}}{\partial y} - \dfrac{\partial \text{Q}}{\partial z} \right) + f'_y \left(\dfrac{\partial \text{P}}{\partial z} - \dfrac{\partial \text{R}}{\partial x} \right) + f'_z \left(\dfrac{\partial \text{Q}}{\partial x} - \dfrac{\partial \text{P}}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Si l'équation différentielle admet le facteur f^α ($\alpha = -2$), il faudra que H soit nul; on devra donc avoir

$$\frac{\partial \text{R}}{\partial y} - \frac{\partial \text{Q}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \text{P}}{\partial z} - \frac{\partial \text{R}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \text{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \text{P}}{\partial y} = 0.$$

On pourra donc poser

$$\text{P} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{Q} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

φ étant une fonction du second degré; on aura

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\left(\frac{f}{\varphi}\right) = 0,$$

et, par conséquent, l'intégrale sera

$$\varphi = Cf.$$

Elle représente des coniques passant par quatre points fixes. Je vais démontrer que ce cas est le seul dans lequel l'équation puisse admettre, comme solutions, deux coniques *indécomposables* se coupant en quatre points distincts, ou, ce qui est plus général, ayant un triangle conjugué commun. Supposons, en effet, que les deux coniques soient rapportées à ce triangle conjugué; leurs équations seront

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$
$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

a, b, c n'étant pas nuls. On aura

$$(67) \qquad \begin{cases} L = Qz - Ry, \\ M = Rx - Pz, \\ N = Py - Qx, \end{cases}$$

et

$$\Delta u = 0,$$
$$\Delta v = Qxz(a - c) + Rxy(b - a) + Pyz(c - b).$$

Puisque v est une solution, on devra avoir

$$\Delta v = (a'x + b'y + c'z)(ax^2 + by^2 + cz^2).$$

En égalant dans les deux membres les coefficients de x^3, y^3, z^3, on a

$$aa' = bb' = cc' = 0,$$

et, par conséquent, a, b, c n'étant pas nuls,

$$a' = b' = c' = 0;$$

par suite on aura

$$\Delta v = 0, \quad \Delta\left(\frac{u}{v}\right) = 0,$$

et l'intégrale générale sera

$$u = Cv.$$

Ainsi, en dehors de ce cas particulier, si deux coniques donnent des solutions de l'équation, elles ne peuvent ni se couper en quatre points distincts, ni être doublement tangentes.

Revenons au cas général, où il y a une seule conique comme solution particulière. Il est utile de connaître la disposition des points singuliers, et de savoir combien il y en a sur la conique.

Les points singuliers sont définis par les équations

$$L = \lambda x, \quad M = \lambda y, \quad N = \lambda z,$$

et si l'on substitue ces valeurs de L, M, N dans l'équation identique

$$\Delta f = 0,$$

elle devient

$$2\lambda f = 0.$$

Il y a donc deux espèces de points singuliers : 1° ceux pour lesquels on a

$$\lambda = 0, \quad L = M = N = 0,$$

ou

$$\frac{P}{f'_x} = \frac{Q}{f'_y} = \frac{R}{f'_z};$$

ces points sont au nombre de trois; 2° les quatre autres seront sur la conique, et il résulte des formules (36) qu'ils seront définis par les deux équations

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$Px + Qy + Rz = 0.$$

Supposons, comme cela a lieu généralement, que les trois premiers points forment un triangle, et que l'on choisisse ce triangle pour triangle de référence, l'équation différentielle prendra une forme remarquable.

Soit alors

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

l'équation de la conique. Si l'on exprime que les valeurs de L, M, N,

données par les formules (65), s'annulent pour les trois sommets du triangle, on obtiendra des équations de condition faciles à résoudre, qui donneront pour P, Q, R les valeurs

$$P = A\lambda x + B''\mu y + B'\nu z,$$
$$Q = B''\lambda x + A'\mu y + B\nu z,$$
$$R = B'\lambda x + B\mu y + A''\nu z,$$

qui ne diffèrent des dérivées de f que par la substitution de λx, μy, νz à x, y, z. On en déduit

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} L &= a(\nu-\mu)yz + b''(\lambda-\nu)xz + b'(\mu-\lambda)xy,\\ M &= b''(\nu-\mu)yz + a'(\lambda-\nu)xz + b(\mu-\lambda)xy,\\ N &= b'(\nu-\mu)yz + b(\lambda-\nu)xz + a''(\mu-\lambda)xy,\end{aligned}\right.$$

où a, a', a'', b, b', b'' sont les coefficients de l'équation tangentielle de la conique, c'est-à-dire

$$a = B^2 - A'A'', \quad b = AB - B'B'',$$
$$a' = B'^2 - AA'', \quad b' = A'B' - BB'',$$
$$a'' = B''^2 - AA', \quad b'' = A''B'' - BB'.$$

On a d'ailleurs

$$(69)\qquad H = (\lambda-\mu)b''z + (\mu-\nu)bx + (\nu-\lambda)b'y.$$

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GÜNTHER (S.). — ZIELE UND RESULTATE DER NEUEREN MATHEMATISCH-HISTORISCHEN FORSCHUNG. — Erlangen, 1876. — In-16, IV-133 pages.

L'auteur publie sous ce titre un travail composé pour la quarante-huitième réunion générale des naturalistes et des médecins allemands, tenue en 1875 dans la ville de Graz. Refondu et complété par plus de 100 pages de notes, avec de très-soigneuses indications bibliographiques, ce travail présente un tableau attrayant des recherches contemporaines et des questions à l'ordre du jour sur l'histoire des Mathématiques.

Fruit d'une érudition profonde et sûre, il témoigne également, chez l'auteur, d'une largeur d'esprit peu commune. Il semble même que M. Günther affecte de ne pas se prononcer pour un côté ni pour l'autre dans les débats toujours ouverts, mais, en rendant compte des travaux des deux partis avec la plus grande impartialité, de chercher comme un point de vue plus élevé pour les juger. Ses appréciations sont toujours dès lors assez mesurées, et les critiques enveloppées d'assez de réserves pour que son livre ne soit pas un nouvel aliment de polémique; mais il est actuellement et restera longtemps, sans doute, précieux à lire et à consulter pour tous ceux qui s'intéressent à ces sujets.

Nous ne saurions mieux caractériser les tendances de M. Günther comme historien qu'en lui appliquant l'épithète d'*évolutionniste*. Il aime à suivre dans le cours des âges les lentes et parfois singulières transformations de la pensée humaine sur un même sujet. Dans cet ordre d'idées, rien ne doit être négligé, ni les chimères de l'astrologie, ni l'importance mystique si longtemps attribuée aux carrés magiques et aux polygones étoilés. Kepler est, sur ce dernier point et sur d'autres encore, un exemple assez frappant de la nécessité d'étendre l'histoire des Mathématiques au delà du cadre strictement scientifique, et d'en faire ce qu'elle doit être vraiment, un facteur essentiel de l'histoire de l'humanité pensante.

D'autres exemples intéressants de l'évolution d'une idée sont amplement développés : ainsi la constitution de la théorie de l'arc-en-ciel, celle de la loi mathématique qui règle la distribution des

feuilles sur la tige d'une plante. L'invention du διορισμός, par le platonicien Léon, est rapprochée des travaux de Cauchy sur la convergence des séries.

L'Astronomie ancienne est vengée des reproches d'absurdité qu'on lui a adressés, par la remarque, déjà faite par Whewell, que les méthodes d'approximation modernes ne sont, au fond, que la théorie des épicycles mise sous forme analytique.

Je note ici que M. Günther ne paraît pas connaître l'important Mémoire de Schiaparelli sur le système astronomique d'Eudoxe, et qu'il ne donne pas, par suite, de ce système une idée bien exacte (p. 54).

On peut également s'étonner de le voir affirmer (p. 78) que le théorème d'Euclide, « que dans un triangle la somme de deux angles ne peut pas être plus grande que deux droits, » a évidemment pour fondement implicite le postulatum sur les parallèles. Cette assertion serait difficile à soutenir; il suffira de faire observer que, dans ce cas, Lobatchefsky et Bolyai auraient inventé la Géométrie elliptique en même temps que l'hyperbolique.

P. T.

TEIXEIRA (F.-Gomes). — Sobre o emprego dos eixos coordenados obliquos na Mecanica analytica. (Dissertação de concurso. In-8°, 50 pages. Coimbra, 1876.)

Les équations, données par Lagrange, qui traduisent le principe des vitesses virtuelles supposent les coordonnées rectangulaires. M. Teixeira donne les formules équivalentes en coordonnées obliques, soit ordinaires, soit obtenues en projetant orthogonalement sur les axes de coordonnées le rayon vecteur qui joint un point à l'origine. Il en déduit les conditions d'équilibre d'un corps solide. Les équations générales de la Dynamique, les équations qui déterminent le mouvement d'un corps solide sont ensuite données pour les mêmes systèmes de coordonnées.

MÉLANGES.

RÉSULTAT DES OBSERVATIONS DU PASSAGE DE VÉNUS RECUEILLIES DANS LES STATIONS ANGLAISES;

Par M. G. RAYET.

M. Airy et les astronomes de Greenwich, après avoir présidé aux études préliminaires nécessitées par l'organisation des expéditions envoyées par le gouvernement britannique pour observer le dernier passage de Vénus, ont été chargés de poursuivre la discussion des observations recueillies et de déduire de ces nombreux documents la valeur la plus probable de la parallaxe solaire. Un Rapport présenté au Parlement (1) renferme le résumé des Notes des astronomes ainsi que la reproduction de leurs croquis, et deux Communications adressées à la Société Royale Astronomique de Londres, en novembre 1877 et en février 1878, ont fait connaître l'état d'avancement des travaux de discussion et la conclusion générale des observations.

La détermination de la position géographique des stations à l'aide des culminations lunaires n'a présenté aucune difficulté sérieuse, et les calculs sont terminés depuis longtemps déjà; mais il n'en a pas été de même de la discussion des observations de contact, soit à l'entrée, soit à la sortie. En effet, les astronomes n'ont généralement pas observé le phénomène géométrique, et le plus grand nombre d'entre eux ont signalé l'existence d'un pont, d'une goutte noire, plus ou moins marquée suivant la puissance optique de leur instrument et les conditions atmosphériques. Les apparences qu'ils ont décrites peuvent cependant se réduire à un petit nombre de types. A l'entrée on paraît avoir observé trois phases différentes α, β et γ; à la sortie quatre phases δ, ε, ζ et η. La

(1) *Report on the telescopic observations of the Transit of Venus*, 1874, *made in the expedition of the British Government, and on the conclusion derived from those observations*, by sir G.-B. Airy. Broch. petit in-folio, 34 p.

phase α répond à l'instant où la planète se projette tout entière sur le Soleil, la lumière entre les deux limbes étant encore très-obscure. A l'instant de la phase β la zone précédente a commencé à s'éclairer, et le contact paraît passé depuis quelques instants. Enfin, pour la phase γ, la zone qui sépare les deux limbes a pris un éclat égal à celui des points voisins du Soleil. Les phases ε ou ζ paraissent identiques à la phase β, et de la discussion de l'ensemble des observations il résulte que :

La phase α précède la phase β de $24^s,22$ et correspond à une distance des centres des deux astres plus grande de $0'',78$;

La phase γ est postérieure de $20^s,17$ à la phase β et correspond à une distance des centres inférieure de $0'',64$ à celle qui convient à la phase β ;

La phase δ précède la phase ζ de $48^s,4$ et répond à une distance des centres moindre pour δ que pour ζ de $1'',63$;

La phase ε est antérieure de $21^s,0$ à la phase ζ et répond à une distance des centres moindre que $0'',72$;

La phase η est postérieure de $72^s,1$ à la phase ζ et correspond à une distance des centres plus grande pour η que pour ζ de $2'',41$.

Quoique, dans les textes que nous avons sous les yeux, M. Airy ne donne point une description détaillée de chacune des phases précédentes, il nous a cependant paru intéressant de faire connaître la grandeur de leurs différences, qui est une sorte de limite de l'erreur dont les observations peuvent être entachées par suite des phénomènes du ligament noir.

L'application des corrections précédentes ayant rendu les observations comparables, elles ont ensuite pu être combinées deux à deux dans les équations de la méthode de Halley, ou introduites séparément dans les équations de condition de la méthode de De l'Isle.

Les calculs ont alors conduit aux résultats suivants. La parallaxe a pour valeur :

		Poids.
Par les observations d'entrée.........	$8'',739$	10,46
Par les observations de sortie.........	8,847	2,53
Moyenne générale.............	8,760	

Pour montrer le degré de concordance des résultats partiels, il

suffira de reproduire ici le tableau où MM. Airy et Tupman ont rassemblé les résultats partiels de la combinaison deux à deux des observations du second contact interne :

Parallaxe solaire moyenne déduite de la comparaison des phases semblables du deuxième contact interne.

	Mokattam et Suez.	Luxor.	Abbas-seyeh.	Roorkee.	Madras.	Mussoorie.	Moyenne.
Sydney.............	8",76	8",78	8",78	8",81	8",91	8",61	8",768
Goulburn (N. S. W.).	8,88	8,90	8,92	8,92	9,05	8.73	8,891
Woodford (N. S. W.).	8,82	8,79	8,81	8,83	8,95	8,64	8,801
Victoria............	8,91	8,90	8,90	8,93	9,05	8,74	8,900
Adélaïde............	8,77	8,79	8,79	8,82	8,94	8,61	8,778
Cap.................	8,50	8,51	8,72	8,55	8,63	8,30	8,495
Port Élisabeth........	8,44	8,41	8,43	8,46	8,51	8,20	8,385
Moyenne........	8,774	8,780	8,780	8,804	8,918	8,597	8,770

La parallaxe de 8",770 donne la distance moyenne de la Terre au Soleil égale à 23549,5 rayons terrestres.

« Les calculs préliminaires nécessaires pour la combinaison des observations photographiques sont », dit en terminant M. Airy, « effectués depuis longtemps, mais on a rencontré dans la mesure des plaques une difficulté inattendue : vingt-quatre des négatifs mesurés par M. Burton ayant été mesurés à nouveau par M. Tupman avec le même instrument, on a trouvé que les distances des centres données par les deux opérations différaient d'environ 1 seconde, soit de $\frac{1}{25}$ du déplacement parallactique de Vénus. La suite des calculs a donc dû être ajournée à l'époque où l'on aura trouvé un meilleur procédé de mesure ».

La méthode de discussion employée par M. Airy dans les Communications que nous venons d'analyser a pour but de rendre utilisable au calcul final, à l'aide de corrections particulières, l'ensemble de toutes les observations. Lorsqu'on étudie les descriptions du phénomène telles qu'elles ont été données par les observateurs, il est d'ailleurs facile de se convaincre que les instants notés se rapportent à des phases du phénomène, en général très-différentes et qu'il ne paraît pas aisé de classer suivant un petit nombre

de types. M. Stone [1] n'admet donc pas le système de correction employé par le savant directeur de Greenwich; il pense au contraire que, parmi les observations, il faut en éliminer un certain nombre et ne tenir compte que de celles qui se rapportent à une phase bien déterminée du phénomène, phase qui n'a pas besoin d'être celle du contact véritable, puisque les différences des observations entrent seules dans le calcul, mais qui doit avoir été nettement saisie par les observateurs. Suivant M. Stone, cette phase est l'instant où le ligament noir entre le bord solaire et Vénus a complétement disparu et où le filet de lumière formé par la jonction des cornes a repris une intensité égale à celle des points voisins.

Examinant à ce point de vue les observations publiées par M. Airy, le directeur de l'Observatoire du Cap trouve que, parmi les observations du contact interne de l'entrée, il y en a dix qui se rapportent à la phase choisie par lui comme la plus nette. Ces dix observations lui donnent ensuite

$$\pi = 8'',86.$$

Les observations du contact interne de sortie sont plus difficiles à discuter et se montrent moins concordantes que les précédentes. Dans quelques stations, en effet, les conditions atmosphériques se sont alors trouvées très-mauvaises, et puis il est possible que l'apparition du ligament noir soit plus difficile à saisir que sa rupture complète. Quoi qu'il en soit, M. Stone a choisi parmi les observations de sortie celles qui répondent à l'instant où le ligament noir était bien formé, et leur discussion lui a donné

$$\pi = 8'',98;$$

en tenant compte des poids probables des deux déterminations précédentes, leur moyenne est 8",884.

Dans une seconde Note sur le même sujet [2], M. Stone s'est plus

---

(1) *On the telescopic observations of the Transit of Venus 1874, made in the expedition of the British Government, and on the conclusions to be deduced from those observations,* by E.-T. Stone (*Monthly Notices*, vol. XXXVIII, p. 279-295).

(2) *A Comparison of the Observations of Contact of Venus with the Sun's limb in the Transit of 1874, made at the R. Observatory, Cape of Good Hope, with the corresponding Observations made at the Stations in the Parliamentary Report and a discussion of the results* (*Monthly Notices*, vol. XXXVIII, p. 341).

spécialement occupé de la comparaison de ses observations du Cap avec celles des autres stations. Étudiant surtout les observations du contact interne de sortie, il conclut que la valeur la plus probable de la parallaxe est comprise entre 8″,84 et 8″,92.

M. le capitaine G.-L. Tupman s'est également occupé d'une nouvelle discussion des observations publiées dans le Rapport de l'Astronome Royal d'Angleterre [1]. Une méthode de discussion analogue à celle de M. Stone lui donne, pour la parallaxe déduite :

Des observations d'entrée	8″,857
Des observations de sortie	8,792
Moyenne	8,813

La différence des résultats déduits du second contact interne tient sans doute en grande partie à ce que M. Tupman a eu à sa disposition un assez grand nombre d'observations, faites en particulier en Australie et dans l'Inde, qui ne se trouvent pas publiées dans le Rapport de M. Airy et n'ont pu être utilisées par M. Stone.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ;

Par M. G. DARBOUX.

(Suite.)

XIII.

Examen du cas où le multiplicateur est de la forme $u^\alpha p^\beta$, u étant du second degré, p du premier.

Dans ce cas, il devra y avoir, comme solutions particulières, une droite et une conique. Supposons d'abord que la droite ne soit pas tangente à la conique : on pourra choisir les axes de telle ma-

(1) *Note on the Mean Solar Parallax as derived from the observations of the recent Transit of Venus*, by Cap. G.-L. Tupman (*Monthly Notices*, vol. XXXVIII, p. 334).

nière que l'équation de la droite soit

$$x = 0,$$

et celle de la conique

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

on aura

$$\begin{aligned} L &= Qz - Ry, \\ M &= Rx - Pz, \\ N &= Py - Qx. \end{aligned}$$

En exprimant que L est divisible par x, on trouvera

$$Q = cx, \quad R = bx,$$

et les valeurs définitives seront

$$(70) \qquad \left\{ \begin{aligned} L &= x(cz - by), & \Delta u &= 0, \\ M &= bx^2 - Pz, & \Delta x &= (cz - by)x, \\ N &= Py - cx^2, & H &= cz - by + y\frac{\partial P}{\partial z} - z\frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on veut que le facteur soit $u^\beta x^\alpha$, il faudra d'abord que

$$2\beta + \alpha = -4,$$

et ensuite

$$(1 + \alpha)(cz - by) - z\frac{\partial P}{\partial y} + y\frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

ce qui donnera, pour P,

$$P = (\alpha + 1)(bz + cy) + mx.$$

On trouvera sans peine, dans ce cas, la nouvelle solution particulière

$$\frac{mx}{\alpha + 2} + bz + cy = 0,$$

qui conduira à l'intégrale

$$u^\beta x^{\alpha+1}\left(\frac{mx}{\alpha + 2} + bz + cy\right) = C,$$

qui ne diffère pas de l'intégrale (VI). Le seul cas nouveau correspond à la valeur de α,

$$\alpha = -2.$$

Dans ce cas, l'intégrale devient

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{bz + cy}{x} + m \log \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \text{C}.$$

Étudions maintenant le cas, beaucoup plus intéressant, où l'on suppose que la droite soit tangente à la conique, et choisissons les axes de telle manière que l'équation de la conique soit

$$y^2 + 2xz = 0,$$

celle de la droite étant toujours $x = 0$.

Alors on aura

$$\text{L} = \text{Q}x - \text{R}y,$$
$$\text{M} = \text{R}z - \text{P}x,$$
$$\text{N} = \text{P}y - \text{Q}z.$$

L devant être divisible par x, R est de la forme cx; mais, comme à P, Q, R on peut, sans changer L, M, N, substituer $\text{P} + \alpha z$, $\text{Q} + \alpha y$, $\text{R} + \alpha x$, nous pourrons supposer $\text{R} = 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} \text{L} &= \text{Q}x, \\ \text{M} &= -\text{P}x, \\ \text{N} &= \text{P}y - \text{Q}x, \end{aligned} \qquad \text{H} = x\left(\frac{\partial \text{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \text{P}}{\partial y}\right) + y\frac{\partial \text{P}}{\partial z} - z\frac{\partial \text{P}}{\partial y}.$$

Le facteur étant $x^\alpha u^\beta$, on devra avoir

$$\Delta(x^\alpha u^\beta) + \text{H}x^\alpha u^\beta = 0.$$

Posons

$$\text{P} = mx + ny + pz,$$
$$\text{Q} = m'x + n'y + p'z.$$

L'équation précédente deviendra

$$\alpha \text{Q} + x(m' - n) + py - p'z = 0,$$

ce qui donne

$$(\alpha + 1)m' - n = 0,$$
$$\alpha n' + p = 0,$$
$$(\alpha - 1)p' = 0.$$

L'hypothèse $p' = 0$ conduirait à l'intégrale déjà trouvée. Supposons $\alpha = 1$; on a alors

$$-n' = p, \quad m' = \frac{n}{2}.$$

Le multiplicateur sera $\frac{x}{u^{\frac{5}{2}}}$. L'intégration n'offre aucune difficulté, et l'on obtient un résultat de la forme suivante :

$$\text{(XIV)} \qquad [x^2(ax + by + cz) + y^3 + 3xyz]^2 = C(y^2 + 2xz)^3.$$

L'intégrale générale se compose de courbes du sixième ordre; mais il y a, comme solutions particulières, la droite et la conique qui ont servi à former le facteur, la cubique correspondante à une valeur nulle de C, et enfin une courbe du quatrième ordre, qu'on obtient en faisant $C = 1$ et en supprimant le facteur x^2. La cubique, comme on doit s'y attendre d'après le théorème de l'article VIII, a un point double, dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = 0$; ici ce point n'est jamais un point de rebroussement.

Pour simplifier, autant que possible, l'intégrale précédente, il convient de rapporter la cubique aux axes les plus simples possibles : ces axes seront formés par les deux tangentes au point double, et par la droite qui contient les trois points d'inflexion. En effectuant ce changement de variables, l'intégrale prend la forme

$$\text{(XIV)} \qquad (y^3 + x^3 + 3xyz)^2 = C(y^2 + 2xz + ax^2)^3,$$

qui montre que cette intégrale n'a qu'un seul invariant a.

XIV.

Étude des cas où le multiplicateur est de la forme $u^\alpha p^\beta q^\gamma$, u étant du second degré, p et q du premier.

Dans ce cas, l'équation admettra comme solutions deux droites et une conique. Si les deux droites ne sont pas tangentes à la conique, et si elles ne se coupent pas sur la conique, nous avons vu (art. IX) que l'intégrale sera de la forme

$$u^m = Cp^{m'}q^{m''}.$$

Il suffira donc d'examiner les cas exceptionnels que nous avions exclus.

Le cas où une seule des droites est tangente à la conique, et où leur point de concours est en dehors de la conique, ne donne rien

de nouveau. Examinons le cas où les deux droites sont tangentes; alors, en choisissant convenablement les axes, les équations des deux droites et de la conique deviendront

$$x = 0, \quad z = 0, \quad u = y^2 + 2xz = 0.$$

On aura, comme dans l'exemple précédent,

$$L = Qx, \quad M = -Px, \quad N = Py - Qz.$$

D'ailleurs, N devant être divisible par z, puisque $z = 0$ est une solution, on devra faire $P = az$, ou, plus simplement, $P = z$.

On a donc

$$\begin{aligned} L &= x(mx + ny + pz), \\ M &= -xz, \\ N &= yz - z(mx + ny + pz), \\ H &= mx + y - pz. \end{aligned}$$

Écrivons que le facteur est $x^\alpha z^\beta u^\gamma$; on a

$$\alpha + \beta + 2\gamma = -4,$$
$$\Delta(x^\alpha z^\beta u^\gamma) + H\, x^\alpha z^\beta u^\gamma = 0,$$

ce qui donne les conditions

$$(\alpha - \beta + 1)m = 0,$$
$$(\alpha - \beta)n + \beta + 1 = 0,$$
$$(\alpha - \beta - 1)p = 0.$$

Excluons le cas où m et p seraient nuls, qui conduirait à l'intégrale (VI); il faut donc que l'on ait

$$\alpha - \beta = \pm 1.$$

Les deux équations à considérer se ramènent l'une à l'autre en échangeant x et z. Prenons donc

$$\alpha = \beta + 1;$$

alors on aura

$$m = 0, \quad n = -\alpha,$$

et le multiplicateur sera

$$x^\alpha z^{\alpha - 1} u^{-\alpha - \frac{3}{2}}.$$

L'intégration s'effectue sans difficulté, et conduit à l'intégrale

$$\text{(XV)} \qquad \frac{x^{\alpha+1} z^{\alpha}}{u^{\alpha+\frac{1}{2}}} + p' \int \frac{\lambda^{\alpha}\, d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} = \mathrm{C},$$

où l'on a posé $2xz = \lambda u$.

Le cas où les deux droites p, q se coupent sur la conique u, aucune n'étant tangente à la courbe, ne donne rien de nouveau. Laissons-le de côté, et examinons celui où, les deux droites se coupant sur la courbe, l'une est tangente.

Alors, en choisissant convenablement les axes, les équations des deux droites et de la conique seront

$$x = 0, \quad y = 0, \quad u = y^2 + 2xz = 0.$$

On a encore ici

$$\mathrm{L} = \mathrm{Q}x, \quad \mathrm{M} = -\mathrm{P}x, \quad \mathrm{N} = \mathrm{P}y - \mathrm{Q}z,$$

et il reste à exprimer que $y = 0$ est une solution, c'est-à-dire que P est divisible par y. Prenons $\mathrm{P} = y$; on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= x(mx + ny + pz), \\ \mathrm{M} &= -xy, \\ \mathrm{N} &= y^2 - z(mx + ny + pz), \\ \mathrm{H} &= (m-1)x - pz. \end{aligned}$$

En écrivant que $x^{\alpha} u^{\beta} z^{\gamma}$ satisfait à l'équation du multiplicateur, on aura les équations

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)m &= \beta + 1, \\ \alpha n &= 0, \\ (\alpha - 1)p &= 0. \end{aligned}$$

Excluons les cas qui conduiraient aux intégrales déjà trouvées, nous aurons seulement à examiner l'hypothèse

$$\alpha = 1, \quad n = 0, \quad m = \frac{1+\beta}{2}.$$

L'intégration s'effectuera sans difficulté, et conduira, aux notations près, à l'intégrale

$$\text{(XVI)} \qquad (y^2 - 2\alpha xz + ax^2)(y^2 + 2xz)^{\alpha} = \mathrm{C} y^{2\alpha+2}.$$

On remarquera que nous voyons apparaître ici, pour la première fois, deux coniques comme solutions particulières. Ces deux coni-

ques sont simplement tangentes, ce qui est d'accord avec le théorème de l'article XII.

Il ne reste plus à examiner de multiplicateur formé avec une conique et deux droites.

XV.

Étude du cas où au nombre des solutions particulières se trouvent trois droites et une conique.

Supposons d'abord que les trois droites forment un triangle, que nous prendrons pour triangle de référence. S'il y a seulement deux des trois droites qui ne soient pas tangentes à la conique, ou qui ne se coupent pas sur la conique, l'intégrale sera de la forme

$$u^m = Cp^{m'}q^{m''}.$$

Nous pouvons donc écarter cette hypothèse, et il restera à examiner les suivantes :

1° La conique passe par les trois sommets du triangle formé par les trois droites. Alors il y a trois points par lesquels passent trois courbes non tangentes, satisfaisant à l'équation, les trois sommets du triangle, et (art. VIII) l'intégrale est formée par un faisceau de coniques circonscrites au triangle.

2° La conique passe par deux des sommets, par exemple, par ceux qui sont sur la droite $y = 0$. Alors l'une au moins des droites $x = 0$, $z = 0$ est tangente à la conique. Sans cela, on aurait deux droites ne se coupant pas sur la conique et non tangentes à la conique, ce qui est un cas exclu. On reconnaît aisément que le cas où elles seraient toutes les deux tangentes est impossible. Il suffira donc de supposer qu'une seule des droites $x = 0$ est tangente à la conique.

Alors, en prenant convenablement les paramètres de référence, l'équation de la conique sera

$$u = y^2 + 2xy + 2xz = 0,$$

et les valeurs correspondantes de L, M, N

$$\begin{aligned} L &= Qx - R(y + x),\\ M &= R(y + z) - Px,\\ N &= P(x + y) - Q(y + z).\end{aligned}$$

Il faut que L, M, N soient divisibles respectivement par x, y, z. Les valeurs correspondantes de P, Q, R sont

$$P = -y,$$
$$Q = -x - y + hz,$$
$$R = 0.$$

On a alors

$$L = (-x - y + hz)x,$$
$$M = xy,$$
$$N = [x + y(1-h) - hz]z.$$

On trouve facilement une cinquième solution

$$p = y(1-h) - hz = 0;$$

car on a

$$\Delta p = (x - hz)p.$$

Au moyen de ces cinq solutions, on forme, d'après la règle, l'intégrale, qui est

$$\text{(XVII)} \qquad x^{2h-2} z^{h-2} [hz + y(h-1)]^h (y^2 + 2xz + 2xy)^{2-2h} = C.$$

3° Examinons maintenant le cas où la conique passe par un seul sommet du triangle $x = 0$, $y = 0$. Alors elle sera nécessairement tangente au côté opposé, et son équation sera

$$(x-y)^2 + 2z(mx + ny) = 0.$$

Les valeurs correspondantes de L, M, N s'obtiennent sans peine. On a

$$L = x[2mnz + (m+n)y],$$
$$M = y[2mnz + (m+n)x],$$
$$N = z[-my - nx].$$

On peut encore trouver une cinquième solution

$$x - y = 0;$$

car on a

$$\Delta(x-y) = 2mnz(x-y).$$

Au moyen de ces cinq solutions, on forme l'intégrale générale, qui est

$$\text{(XVIII)} \qquad zx^{\frac{m}{m+n}} y^{\frac{n}{m+n}} = C[(x-y)^2 + 2z(mx + n - y)].$$

Dans ces deux derniers cas, il y a trois droites passant par un point. Les intégrales trouvées sont donc des cas particuliers de l'intégrale X.

4° Enfin, si la conique ne passe par aucun des sommets du triangle formé par les trois droites, elle est nécessairement tangente aux trois côtés; car, si elle coupait un de ces côtés, il y aurait, sur ce côté, quatre points singuliers, ce qui est impossible. Servons-nous des formules de l'article XII. Les trois sommets de notre triangle sont les trois points singuliers qui ne se trouvent pas sur la conique. Les formules (68) sont donc applicables, et pour que les trois côtés du triangle donnent des solutions, il faut que dans ces formules on ait

$$a = a' = a'' = 0.$$

Or, il résulte des valeurs de a, a', a'' que ces équations expriment précisément que la conique est tangente aux trois côtés. En disposant des paramètres de référence de telle manière que l'équation de cette conique soit

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2xz - 2xy = 0,$$

les formules déjà rappelées nous donneront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} &= xz\,(c - a) + xy\,(a - b),\\
\mathrm{M} &= yx(a - b) + yz\,(b - c),\\
\mathrm{N} &= zy\,(b - c) + zx\,(c - a),\\
\mathrm{H} &= x\,(c - b) + y\,(a - c) + z(b - a).
\end{aligned}$$

Avec les quatre solutions, on forme le facteur, qui est

$$\mu = \frac{1}{xyz\sqrt{u}}.$$

L'intégration directe, quoiqu'un peu longue, n'offre aucune difficulté. En ne prenant dans la différentielle que les termes contenant a, on trouve leur intégrale

$$a \log \frac{x - y - z + \sqrt{u}}{x - y - z - \sqrt{u}} = 2a \log \frac{x - y - z + \sqrt{u}}{2\sqrt{yz}},$$

ce qui conduit à l'intégrale générale

$$\text{(XIX)}\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{x-y-z+\sqrt{u}}{x-y-z-\sqrt{u}}\right)^a \\ &\quad\times\left(\frac{y-z-x+\sqrt{u}}{y-z-x-\sqrt{u}}\right)^b\left(\frac{z-x-y+\sqrt{u}}{z-x-y-\sqrt{u}}\right)^c = \mathrm{C}, \end{aligned}\right.$$

que l'on pourrait aussi écrire

$$\frac{(x-y-z+\sqrt{u})^{2a}(y-z-x+\sqrt{u})^{2b}(z-x-y+\sqrt{u})^{2c}}{x^{b+c}y^{a+c}z^{a+b}} = \mathrm{C}'.$$

Nous présenterons quelques remarques sur ce résultat, qui nous paraît élégant.

D'abord, l'équation différentielle ne changeant pas quand on augmente a, b, c d'une même quantité h, il faut que le produit

$$\frac{x-y-z+\sqrt{u}}{x-y-z-\sqrt{u}}\cdot\frac{y-z-x+\sqrt{u}}{y-z-x-\sqrt{u}}\cdot\frac{z-x-y+\sqrt{u}}{z-x-y-\sqrt{u}}$$

soit constant, et en effet la valeur de ce produit est l'unité.

Remarquons, de plus, que l'équation intégrée ici est celle que nous avons considérée à l'article VII, et qui est caractérisée par cette propriété, qu'il passe, en trois points singuliers, une infinité de courbes tangentes, aux mêmes droites.

Enfin, nous signalerons une manière curieuse d'interpréter le résultat trouvé. Posons

$$(71)\qquad x = a^2,\quad y = b^2,\quad z = c^2,$$

et considérons a, b, c comme les côtés d'un triangle, dont les angles seront A, B, C. On aura

$$u = -4b^2c^2\sin \mathrm{A} = -4a^2c^2\sin^2\mathrm{B} = -4a^2b^2\sin^2\mathrm{C},$$

$$x-y-z = a^2-b^2-c^2 = -2bc\cos\mathrm{A},$$

et par suite

$$\frac{x-y-z+\sqrt{u}}{x-y-z-\sqrt{u}} = e^{2i\mathrm{A}}.$$

L'intégrale générale (XIX) sera donc, en remplaçant les exposants a, b, c par m, n, p,

$$m\mathrm{A}+n\mathrm{B}+p\mathrm{C} = \text{const.}$$

Ainsi, avec le changement de notations exprimé par les formules (71), l'équation différentielle considérée est celle des triangles dont les angles satisfont à la relation précédente.

Pour terminer l'examen complet du cas où il y a, comme solutions particulières, trois droites et une conique, il nous reste à traiter le cas où les trois droites sont concourantes. Alors, ou bien la conique passe par le point de concours des trois droites, ou bien elle est tangente à deux des droites. L'examen de ce dernier cas, qui n'offre aucune difficulté, nous a conduit à l'intégrale suivante, que nous nous contenterons de mentionner :

$$(\mathrm{XX}) \qquad \frac{y+\sqrt{xz}}{y-\sqrt{xz}} = \mathrm{C}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}-\sqrt{z}}\right)^{b}.$$

Étudions un peu, avec plus de détails, le cas où la conique passe par le point de concours des trois droites. Si l'on prend ce point de concours comme origine, et que l'on choisisse les axes de telle manière que la conique ait pour équation

$$u = y^2 + 2xz = 0,$$

l'équation différentielle correspondante sera définie par les valeurs

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} &= ax^2 + bxy - y^2 + xz,\\
\mathrm{M} &= -a''x^2 - b''xy + yz,\\
\mathrm{N} &= a''xy + b''y^2 - z^2 - axz - byz.
\end{aligned}$$

Si l'on prend comme variables x, y et u, l'équation deviendra

$$\mathrm{L}(y\,du - 2u\,dy) + \mathrm{M}(2u\,dx - x\,du) = 0,$$

et, si l'on fait pour un instant $x = 1$, elle devient une équation linéaire $\frac{1}{u}$. L'intégrale s'obtiendra donc sans difficulté, et l'on trouvera le résultat suivant : les trois droites satisfaisant à l'équation étant représentées par les équations

$$y = \alpha x, \quad y = \beta x, \quad y = \gamma x,$$

formons les fonctions

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= (y-\alpha x)(y-\beta x)(y-\gamma x),\\
f(x,y) &= (y-\alpha x)^{\beta-\gamma}(y-\beta x)^{\gamma-\alpha}(y-\gamma x)^{\alpha-\beta}.
\end{aligned}$$

L'intégrale sera, en choisissant convenablement les paramètres de référence,

$$(\text{XX } bis) \qquad \frac{\varphi(x,y)f(x,y)}{x(y^2+2xz)} + \int f(x,y)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \text{C}.$$

Ici se termine l'examen des cas dans lesquels il y a, comme solutions particulières, une seule conique et des droites.

XVI.

Étude du cas où l'équation admet comme solutions particulières deux coniques simplement tangentes.

Dans ce cas, on choisira le triangle de référence de telle manière que les deux coniques aient pour équations

$$u = x^2 + y^2 + 2zx = 0,$$
$$v = x^2 + y^2 + 2kzx = 0.$$

Les valeurs de L, M, N, définissant toute équation admettant la première conique comme solution particulière, seront

$$\text{L} = \text{Q}x - \text{R}y,$$
$$\text{M} = \text{R}(x+z) - \text{P}x,$$
$$\text{N} = \text{P}y - \text{Q}(x+z),$$

P, Q, R exprimant des polynômes du premier degré. On aura alors

$$\Delta u = 0,$$
$$\Delta v = 2\text{P}xy(k-1) + 2\text{Q}x^2(1-k) + 2\text{R}yz(1-k).$$

On trouve facilement les valeurs de P, Q, R pour lesquelles Δv est divisible par v. Ce sont

$$\text{P} = bz - y, \quad \text{Q} = x + 2kz, \quad \text{R} = bx,$$

et les valeurs correspondantes de L, M, N deviennent

$$(72) \qquad \begin{cases} \text{L} = x^2 + 2kxz - bxy, \\ \text{M} = bx^2 + xy, \\ \text{N} = byz - y^2 - x^2 - (2k+1)xz - 2kz^2. \end{cases}$$

On a

$$H = 2x(1-k) - 2kz, \quad \Delta u = 0,$$
$$\Delta v = 2(1-k)xv, \qquad \Delta x = x(x + 2kz - by).$$

Remarquons que la solution $x = 0$ s'est introduite d'elle-même. Cela est conforme au théorème général de l'article VII, d'après lequel, toutes les fois que deux courbes satisfaisant à l'équation différentielle sont simplement tangentes, leur tangente commune est une nouvelle solution particulière.

Il suffira, dans le cas actuel, de connaître une seule solution nouvelle pour obtenir au moins le facteur. Cherchons s'il y a des droites pouvant satisfaire à l'équation. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une droite, c'est que trois points singuliers soient en ligne droite. Nous allons d'abord déterminer ces points.

Ils sont déterminés, nous l'avons vu, par les équations

$$L = \lambda x, \quad M = \lambda y, \quad N = \lambda z.$$

Il y a d'abord les trois points sur la droite $x = 0$,

(1) $\quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad \lambda = -2k,$

(2,3) $\quad x = 0, \quad y^2 - byz + 2kz^2 = 0, \quad \lambda = 0.$

Il y a ensuite un point sur la conique v, et non sur la conique u,

(4) $\quad x = 1, \quad y = -b, \quad z = -\dfrac{b^2+1}{2k}, \quad \lambda = 0;$

un point sur la conique u, et non sur v,

(5) $\quad x = k, \quad y = -b, \quad z = -\dfrac{b^2+k^2}{2k}, \quad \lambda = k(1-k),$

et enfin les deux points communs à u et à v,

(6) $\quad x = 1, \quad y = i, \quad z = 0, \quad \lambda = 1 - bi,$

(7) $\quad x = 1, \quad y = -i, \quad z = 0, \quad \lambda = 1 + bi.$

Ces sept points seront désignés par leurs numéros d'ordre.

D'abord, si le point (1) est en ligne droite avec deux autres, la solution particulière correspondante sera de la forme

$$mx + ny = 0.$$

Or on a

$$\Delta(mx + ny) = mx^2 + 2mkxz - mbxy + nbx^2 + nxy.$$

Pour que le second membre soit divisible par $mx + ny$, il faut que le coefficient de z soit nul, que l'on ait

$$m = 0.$$

La droite ne pourra donc être que

$$y = 0,$$

et il faudra que b soit nul.

Dans ce cas,

$$\Delta v = 2(1 - k)xv,$$
$$\Delta y = xy,$$

et par conséquent

$$\Delta\left(\frac{vy^{2k-2}}{u^k}\right) = 0.$$

L'intégrale générale sera donc

$$C(x^2 + y^2 + 2kxz)y^{2k-2} = (x^2 + y^2 + 2xz)^k.$$

C'est, aux notations près, l'intégrale (XVI).

Nous pouvons donc laisser de côté le cas où la droite cherchée passerait par le point (1). Elle ne pourra donc couper la droite $x = 0$ qu'en un des points (2, 3).

La droite 6, 7, $z = 0$ ne pouvant jamais être solution, comme on s'en assurera sur l'équation, il ne reste donc que deux hypothèses : ou bien l'un des points 6,7, l'un des points 4,5 et l'un des points 2,3 seront en ligne droite, ou bien la droite 4,5 ira passer par un des points 2, 3.

Les points 6, 7 jouant le même rôle, et les points 4, 5 se changeant l'un dans l'autre quand on échange les deux coniques, tout se réduit, pour le premier cas, à exprimer que la droite 6, 4 contient l'un des points 2, 3. On obtient ainsi la condition

$$bi = 2k - 1,$$

et la droite qui contient les points singuliers est

$$x + iy + z = 0.$$

On trouve, en effet,

$$\Delta(x+iy+z) = [(2k-1)x+iy-2kz](x+iy+z).$$

On a maintenant assez de solutions pour former le facteur; mais l'intégration se présente ainsi sous une forme si compliquée, que j'ai dû recourir au changement de variables suivant.

Prenons comme nouvelles inconnues

$$x+iy = \alpha,$$
$$x-iy = \beta,$$
$$x^2+y^2+2xz = u = \gamma^2;$$

comme $\Delta\gamma$ est nul, la nouvelle équation sera, d'après les règles données à l'article VI,

$$\Delta\alpha(\beta\,d\gamma - \gamma\,d\beta) + \Delta\beta(\gamma\,d\alpha - \alpha\,d\gamma) = 0.$$

En d'autres termes, on aura, pour elle,

$$L' = \Delta\alpha, \quad M' = \Delta\beta, \quad N' = 0.$$

Le calcul $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ n'offre aucune difficulté, et l'on trouve

$$L' = 2\Delta\alpha = (1+bi)(\alpha^2+\alpha\beta) + 2k(\gamma^2-\alpha\beta),$$
$$M' = 2\Delta\beta = (1-bi)(\alpha^2+\alpha\beta) + 2k(\gamma^2-\alpha\beta).$$

L'équation de la conique v devient

$$v = \alpha\beta(1-k) + k\gamma^2 = 0,$$

et l'on a

$$\Delta' v = 2(\alpha+\beta)(1-k)v.$$

Ces formules s'appliquent à l'équation générale, et sont indépendantes de toute relation entre k et i. Appliquons-les au cas où

$$1+bi = 2k;$$

on aura alors

$$L' = 2k(\alpha^2+\gamma^2),$$

et, par conséquent,

$$\Delta(\alpha^2+\gamma^2) = 4k\alpha(\alpha^2+\gamma^2).$$

Avec les solutions $v, \alpha^2+\gamma^2, u$, on peut former le facteur, qui est

$$\mu = (\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1-2k}{2k}}[\alpha\beta(1-k)+k\gamma^2]^{-2}\gamma^{\frac{2k-1}{k}}.$$

En commençant l'intégration par rapport à β, on trouvera

$$\text{(XXI)}\quad k\frac{\gamma^{3-\frac{1}{k}}(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2k}}}{\alpha[\alpha\beta(1-k)+k\gamma^2]}+\int\frac{(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1-2k}{2k}}(\gamma\,d\alpha-\alpha\,d\gamma)}{\alpha^2\gamma^{\frac{1-2k}{k}}}=\text{C}.$$

Cette forme conduit, dans une infinité de cas, à des courbes algébriques.

Revenons à l'équation primitive. Il nous reste à étudier le cas où les deux points singuliers 4, 5 sont en ligne droite avec un des points 2, 3. La condition, facile à calculer pour qu'il en soit ainsi, est que l'on ait

$$k=-b^2,$$

et la droite qui contient les trois points singuliers aura pour équation

$$x(1-b^2)-2by-2b^2z=0.$$

Avec les variables α, β, γ, cette solution prend la forme

$$[(1+ib)\alpha+(1-ib)\beta]^2-4b^2\gamma^2=0.$$

Elle se décompose en deux

$$p=\alpha(1+ib)+\beta(1-ib)-2b\gamma=0,$$
$$q=\alpha(1+ib)+\beta(1-ib)+2b\gamma=0;$$

et, en effet, on trouve, pour l'équation en α, β, γ,

$$\Delta p=pq,$$
$$\Delta q=qp.$$

Le facteur est

$$\frac{1}{\nu\gamma\sqrt{pq}}.$$

L'intégration, encore assez compliquée, s'effectue avec facilité, si aux variables α, β, γ on substitue p, q et

$$r=\alpha(1+ib)-\beta(1-ib).$$

Je me contente d'indiquer ces calculs, qui conduisent à l'intégrale

$$\frac{r-2\sqrt{pq}}{r+2\sqrt{pq}}\left(\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{q}-\sqrt{p}}\right)^h=\text{C},\quad h=ib.$$

En revenant aux notations primitives et effectuant une substitution homographique, l'intégrale deviendra

$$(\text{XXII})\qquad \frac{z+\sqrt{x(z+hy)}}{z-\sqrt{x(z+hy)}}\left[\frac{y+\sqrt{x(z+hy)}}{y-\sqrt{x(z+hy)}}\right]^h = \text{C},$$

les équations des deux coniques étant, avec les nouvelles variables,

$$z^2 - xz - hyx = 0,$$
$$y^2 - xz - hyx = 0,$$

et la tangente commune ayant pour équation

$$z + hy = 0.$$

XVII.

Examen du cas où au nombre des solutions particulières se trouvent deux coniques simplement osculatrices.

On pourra toujours choisir le triangle de référence de telle manière que les équations des deux coniques soient

$$u = y^2 + 2xz = 0,$$
$$v = y^2 + 2xz + 2xy = 0.$$

Les valeurs déjà données de L, M, N, qui définissent toute équation admettant comme solution particulière la première conique, sont

$$\text{L} = \text{Q}x - \text{R}y,\quad \text{M} = \text{R}z - \text{P}x,\quad \text{N} = \text{P}y - \text{Q}z.$$

On aura

$$\Delta u = 0,$$
$$\Delta v = -2\text{P}x^2 + 2\text{Q}xy + 2\text{R}(zx - y^2).$$

En écrivant que Δv est divisible par v, on aura facilement les valeurs de P, Q, R, et, par suite, celles de L, M, N. On trouve ainsi

$$(73)\qquad \begin{cases} \text{L} = (2b+3c)x^2 - ay^2 - 3axz + (b-2a)xy, \\ \text{M} = ayz + 2bxz - 3cxy, \\ \text{N} = 3cy^2 + (2a-3b)yz - (2b+3c)xz + 3az^2, \\ \text{H} = 2bx - 2by + 4az, \\ \Delta v = (2bx - 2ay)v. \end{cases}$$

On voit que nous n'avons pas, dans cet exemple comme dans le précédent, une troisième solution. C'est un désavantage; car, dans la plupart des cas, en cherchant à déterminer les solutions nouvelles qui nous sont nécessaires, nous serons conduits à déterminer $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, c'est-à-dire à des équations numériques.

Je traite d'abord le cas où $a = 0$; alors on aura une nouvelle solution

$$x = 0,$$

qui, jointe aux précédentes, permet de déterminer le facteur

$$x^2 u^{\frac{3c}{b}} v^{-3\frac{b+c}{b}}.$$

L'intégration se fera facilement, si l'on choisit comme variables x^2, u, v, et le résultat obtenu est, aux notations près, le suivant :

$$\text{(XXIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} &(y^2 + 2xz)^\alpha (y^2 + 2xz + 2xy)^\beta \\ &\quad \times \left(y^2 + 2xz - \frac{2\beta}{\gamma} xy - \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2} x^2 \right)^\gamma = \text{C}, \end{aligned} \right.$$

avec la relation $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

On remarquera qu'il y a, comme solution particulière, une troisième conique osculatrice aux deux premières.

Cherchons maintenant à compléter, au moyen de droites, le nombre de solutions nécessaire pour qu'on puisse déterminer le facteur. La connaissance des points singuliers nous aidera dans cette recherche; ces points, désignés par leurs numéros, sont les suivants :

$$(1) \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad \lambda = 3a.$$

Nous appelons toujours λ le quotient $\frac{\text{L}}{x} = \frac{\text{M}}{y} = \frac{\text{N}}{z}$. Ce point appartient aux coniques u, v,

$$(2) \qquad y = 0, \quad z = 0, \quad x = 1, \quad \lambda = 2b + 3c;$$

il appartient aussi à u et à v;

$$(3, 4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &y^2 + 2xz = 0, \\ &\lambda = bx - ay, \\ &(b + 3c)x + (b - a)y - az = 0; \end{aligned} \right.$$

ces points appartiennent à u;

(5) $$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad \lambda = 0;$$

il n'appartient ni à u ni à v;

(6, 7) $$\begin{cases} y^2 + 2xz + 2xy = 0, \quad \lambda = 0, \\ -az + by + (2b + 3c)x = 0; \end{cases}$$

ces deux points appartiennent à v.

Nous allons d'abord chercher les droites qui peuvent passer par l'un des points communs aux deux coniques. Commençons par le point 2 : toute droite passant par ce point aura pour équation

$$y + mz = 0;$$

elle ne pourra devenir solution, on le reconnaîtra aisément, que si l'on a

(74) $$bc(b + c) = 0.$$

Et, en effet, pour $c = 0$, on a

$$\Delta z = z[3z + (2a - 3b)y - 2bx];$$

pour $b = -c$,

$$\Delta(y + z) = (y + z)(3cy + 3z - 3cx);$$

mais, pour $b = 0$, on a trois droites passant par le point considéré. On trouve, en effet, dans ce cas,

$$\Delta y = y(az - 3cx),$$

$$\Delta(hy + z) = (hy + z)\left(3az - 3cx + \frac{3c}{h}y\right),$$

$$\Delta(h'y + z) = (h'y + z)\left(3az - 3cx + \frac{3c}{h'}y\right),$$

h, h' étant les racines de l'équation

$$2ah^2 - 2ah + 3c = 0,$$

et satisfaisant, par conséquent, à l'équation

$$h + h' = 1.$$

Ayant cinq solutions, on peut former l'intégrale générale, qui est

(XXIV) $$\left(\frac{y^2 + 2xz + 2xy}{y^2 + 2xz}\right)^{1-2h} \frac{z + hy}{z + (1 - h)y} = C.$$

Mais on peut aussi se proposer de déterminer les constantes de telle manière que l'on puisse former le facteur avec la droite trouvée et u, v. Le cas de $b = 0$ ne peut rien donner de nouveau; mais, si l'on suppose $c = 0$, on verra alors que le facteur peut être de la forme $u^\alpha v^\beta z^\gamma$, si $b = -1$. L'équation correspondante est définie par les valeurs suivantes de L, M, N :

$$\begin{aligned} L &= 2x^2 + 3xy + 3xz + y^2, \\ M &= -yz + 2xz, \\ N &= -5yz - 2xz - 3z^2. \end{aligned}$$

Le facteur est

$$\mu = v^{-\frac{7}{3}} u z^{-\frac{4}{3}}.$$

L'intégration peut être faite en commençant par x, et elle conduit à l'intégrale

$$\text{(XXV)} \qquad z(y^2 + 2xz + 2xy)^4 = C(y^3 + xy^2 + 2xyz - x^2 z)^3,$$

qui est formée de courbes du neuvième degré. Pour $c = -\frac{64}{27}$, on obtient une courbe du cinquième ordre, et deux fois la conique u.

Il est inutile de traiter de la même manière le cas où $b = -c$; car il se ramène au précédent quand on échange les deux coniques l'une dans l'autre.

Après avoir étudié cette première manière d'obtenir des droites, cherchons s'il peut y en avoir qui passent par le point $x = 0$, $y = 0$. Il suffira de voir si $\Delta(y + hx)$ peut être divisible par $y + hx$, et l'on reconnaît que cela ne pourra avoir lieu que si l'on a

$$(75) \qquad b^2 - 4ab - 8ac = 0.$$

On obtient alors

$$\Delta(bx + 2ay) = (bx + 2ay)\left[(2b + 3c)x - \frac{by}{2} + az\right].$$

Il y a plusieurs manières de faire usage de ce résultat : d'abord, la condition (75) peut être combinée avec l'équation (74), et l'on aura alors une droite de chacun des deux systèmes déjà étudiés. Le seul cas nouveau auquel conduise cette combinaison est celui pour lequel

$$c = 0, \quad b = 4a.$$

Il est toujours permis de prendre $a = 1$; on aura alors

$$a = 1, \quad b = 4, \quad c = 0.$$

L'équation sera définie par les valeurs

$$\begin{aligned} L &= 8x^2 + 2xy - 3xz - y^2, \\ M &= yz \ + 8xz, \\ N &= 10yz - 8xz + 3z^3. \end{aligned}$$

On trouve

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = (8x - 2y)v,$$
$$\Delta(2x + y) = (2x + y)(z + 8x - 2y),$$
$$\Delta z = z(3z - 10y - 8x).$$

Au moyen de ces solutions, on formerait sans peine le facteur. Mais il vaut mieux remarquer que les deux droites, solutions particulières,

$$z = 0, \quad y + 2x = 0,$$

se coupent sur la conique v. Comme en leur point de rencontre il passe trois courbes non tangentes, satisfaisant à l'équation différentielle, les deux droites et la conique v, il y aura (art. VII) une nouvelle droite passant par ce point et satisfaisant à l'équation; et, en effet, on trouve

$$\Delta\left(y + 2x - \frac{z}{4}\right) = (8x - 2y + 3z)\left(y + 2x - \frac{z}{4}\right).$$

Au moyen de ces cinq solutions, on forme l'intégrale générale, qui est

$$\text{(XXVI)} \qquad \frac{(y^2 + 2xz + 2xy)^2\left(y + 2x - \frac{z}{4}\right)}{(y + 2x)^3(y^2 + 2xz)} = C,$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$1 - C = \frac{z[y^2 - 2xy - 8x^2 - 2xz]^2}{(y + 2x)^3(y^2 + 2xz)}.$$

On voit que, dans ce cas, il y aura trois coniques au nombre des solutions particulières.

Si l'on cherchait à former le facteur avec une des droites passant par le point $x = 0, y = 0$ et u, v, on serait conduit à des cas

traités $a = b = 0$. Nous avons donc épuisé tout l'usage que l'on peut faire des solutions précédentes.

Voyons, maintenant, s'il y a des droites ne passant pas par les points 1, 2, communs aux coniques u, v. Je dis que de pareilles droites doivent être tangentes au moins à l'une de ces coniques. En effet, si elles les coupaient en quatre points distincts, ces points, étant des points singuliers, seraient au nombre de quatre sur une droite, ce qui est impossible.

Ainsi les droites nouvelles doivent être tangentes au moins à l'une des coniques u, v. Supposons d'abord qu'elles soient tangentes aux deux.

L'unique tangente commune aux deux coniques, en dehors de la tangente triple $x = 0$, est

$$x - 4y - 8z = 0,$$

et l'on trouve qu'elle est solution, si l'on a

$$(76) \qquad b + 2c = \frac{a}{4}.$$

Alors on a

$$\Delta(x - 4y - 8z) = (x - 4y - 8z)\left[x\left(\frac{a}{2} - c\right) + y\left(6c + \frac{a}{4}\right) + 3az\right].$$

Cherchons si cette tangente commune peut être solution en même temps qu'une de celles des groupes précédents. Supposons d'abord que les deux relations (74), (76) aient lieu en même temps. On peut écarter le cas où $b = 0$, qui a été complétement intégré; quant aux équations

$$c = 0, \quad b + c = 0,$$

elles se changent l'une dans l'autre, quand on échange les deux coniques. On peut donc se borner à examiner le cas où l'on a

$$c = 0, \quad b = \frac{a}{4}.$$

Prenons

$$b = 1, \quad a = 4, \quad c = 0;$$

l'équation est définie par les valeurs

$$\begin{aligned} L &= 2x^2 - 7xy - 12xz - 4y^2, \\ M &= 4yz + 2xz, \\ N &= 5yz - 2xz + 12z^2; \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
H &= 2x - 2y + 16z,\\
\Delta v &= (2x - 8y)\,v,\\
\Delta z &= (5y - 2x + 12z)\,z,\\
\Delta(x - 4y - 8z) &= (x - 4y - 8z)(2x + 12z + y).
\end{aligned}$$

Le facteur est compliqué,

$$\mu = (x - 4y - 8z)^{-\frac{5}{6}} z^{-\frac{1}{2}} (y^2 + 2xz + 2xy)^{-\frac{2}{3}} (y^2 + 2xz)^{-\frac{2}{3}}.$$

Pour faire l'intégration, ayons recours au changement de variables. Substituons à x la variable x', définie par l'équation

$$x'^2 = y^2 + 2xz.$$

La nouvelle équation sera définie par les valeurs

$$\begin{aligned}
L' &= 0,\\
M' &= 4yz + x'^2 - y^2,\\
N' &= 5yz + y^2 - x'^2 + 12z^2.
\end{aligned}$$

Enfin, substituons à z la variable z' définie par la formule

$$4z' = 4z + y.$$

On aura, pour la nouvelle équation,

$$\begin{aligned}
L'' &= 0,\\
M'' &= 4yz' + x'^2 - 2y^2,\\
N'' &= \tfrac{3}{4}(16z'^2 - x'^2).
\end{aligned}$$

Cette nouvelle équation, considérée comme définissant y, est de la nature de celles qu'on intègre quand on en connaît une solution particulière. Faisons-y, pour un instant, $z' = 1$, ou, si l'on veut, prenons comme inconnues $\frac{y}{z'}$, $\frac{x'}{z'}$; elle deviendra

$$\left(12 - \frac{3}{4}x'^2\right)\left(x'\frac{dy}{dx'} - y\right) + 4y + x'^2 - 2y^2 = 0.$$

Or, la solution particulière $v = 0$ devient ici

$$y^3 - \left(\frac{3y}{4} + 1\right)x'^2 = 0.$$

Les trois valeurs de y, fournies par cette opération, seront donc des solutions particulières de l'équation différentielle, et, d'après une propriété connue des équations de cette forme, l'intégrale générale sera cette fonction de x' qui forme, avec les trois racines de l'équation précédente, un rapport anharmonique constant. En particulier, on aura une solution nouvelle en cherchant la valeur de y qui forme une proportion équianharmonique avec ces valeurs. On trouve ainsi la nouvelle solution

$$4y^2 + 16y + x'^2 = 0,$$

ou, en rétablissant l'homogénéité,

$$4y^2 + 16yz' + x'^2 = 0,$$

et enfin, en revenant aux notations primitives,

$$9y^2 + 16yz + 2xz = 0.$$

On aura donc cinq solutions de l'équation primitive.

On trouve

$$\Delta(9y^2 + 16yz + 2xz) = 16z(9y^2 + 16yz + 2xz),$$

et l'intégrale générale est

$$(\text{XXVII}) \quad \begin{cases} z^3(x - 4y - 8z)(y^2 + 2xz + 2xy)^2 \\ \quad = C(y^2 + 2xz)(9y^2 + 16yz + 2xz)^3. \end{cases}$$

On voit qu'elle est formée de courbes du huitième ordre.

Cette intégrale peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} &(1 - 128C)(y^2 + 2xz)(9y^2 + 16yz + 2xz)^3 \\ &\quad = [(y^2 + 2xz)^2 - 4(y^2 + 2xz)(5y^2 + 8z^2 + 10yz) - 8y^3(y + 4z)]^2. \end{aligned}$$

Après avoir combiné les formules (76), (74), il nous reste à supposer que les relations (75), (76) ont lieu simultanément. Il y a alors deux systèmes de valeurs pour a, b, c, qui se ramènent l'un à l'autre quand on échange les deux coniques. J'en prends donc un seul,

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -\frac{3}{8}.$$

On a alors

$$\Delta(x+2y)=(x+2y)\left(\frac{7}{8}x-\frac{y}{2}+z\right),$$

$$\Delta(x-4y-8z)=(x-4y-8z)\left(\frac{7}{8}x-2y+3z\right),$$

et l'on peut former le multiplicateur, qui est

$$(x+2y)^{-2}(x-4y-8z)^{-\frac{2}{3}}(y^2+2xz+2xy)^{\frac{1}{6}}(y^2+2xz)^{-\frac{5}{6}}.$$

Dans cet exemple, comme dans les suivants, je me contenterai de donner la valeur du multiplicateur.

Pour terminer ce qui concerne la tangente commune, il nous suffira de rechercher si, prise seule avec les coniques u et v, elle peut donner un multiplicateur. Le calcul indique que cela ne peut avoir lieu que pour les deux systèmes de valeurs

$$a=4,\quad c=\frac{3}{2},\quad b=-2,$$

$$a=4,\quad c=-\frac{1}{2},\quad b=2,$$

qui se ramènent l'un à l'autre quand on échange les deux coniques. En considérant donc seulement le premier, on trouvera que le multiplicateur est

$$(y^2+2xz+2xy)^{-\frac{7}{6}}(x-4y-8z)^{-\frac{4}{3}}(y^2+2xz)^{-\frac{1}{6}}.$$

Nous avons maintenant obtenu tous les cas d'intégration que peut donner la considération des trois premiers groupes de droites. Il nous reste à rechercher s'il peut y avoir des droites tangentes à l'une des coniques u ou v, et coupant l'autre en deux points distincts.

Si la droite cherchée est tangente à la conique u, elle ne peut être que la droite joignant les deux points singuliers 6, 7, situés sur la conique v. En exprimant que cette droite, dont l'équation est

$$(2b+3c)x+by-az=0,$$

est tangente à u, on trouve la condition

(77) $$b^2-4ab-6ac=0.$$

Et alors on a, en effet

$$\Delta[(2b+3c)x+by-az]$$
$$=[(2b+3c)x+by-az][(2b+3c)x+(2a-b)y+3az].$$

Si l'on exprime de même que la droite qui joint les points singuliers 3, 4 est tangente à la conique ν, on aura

$$b^2 - 2ab - 6ac = 0. \tag{78}$$

Cette condition, combinée avec la précédente, ne donne que des cas examinés. Prise seule, il suffit, pour la ramener à la précédente, d'échanger le rôle des deux coniques. Nous pourrons donc la laisser de côté, et nous borner à combiner la relation (77) avec les précédentes (74), (75), (76).

Supposons, d'abord, que la relation (77) ait lieu seule, et voyons si la droite obtenue dans ce cas suffit, avec u et ν, à donner un facteur. Nous retomberons sur le cas, déjà examiné, où cette droite serait tangente aux deux coniques. Cette supposition ne donne donc rien de nouveau.

Combinons ensuite la relation (77) avec la relation (74), ce qui donne d'abord

$$c = 0, \quad a = 1, \quad b = 4$$

et, en second lieu,

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2.$$

Dans le premier cas, le facteur sera

$$(8x + 4y - z)^{-\frac{5}{6}} z^{-\frac{1}{2}} (y^3 + 2xz + 2xy)^{-\frac{2}{3}} (y^2 + 2xz)^{-\frac{2}{3}}.$$

Dans le second, on trouvera

$$(y + z)^{\frac{1}{6}} (2x - 2y - z)^{-\frac{3}{2}} (y^2 + 2xz + 2xy)^{-\frac{3}{2}} (y^2 + 2xz)^{\frac{1}{6}}.$$

En combinant les relations (77), (75), on obtient $a = 0, c = 0$, cas déjà examinés.

Enfin, en combinant les relations (77), (76), on obtiendra le système nouveau

$$a = -5, \quad b = -4, \quad a = 8,$$

pour lequel le multiplicateur sera

$$(x - 4y - 8z)^{-\frac{19}{24}} (-9x - 12y + 8z)^{-\frac{13}{24}} \times (y^2 + 2xz + 2xy)^{-\frac{1}{2}} (y^2 + 2xz)^{-\frac{5}{6}}.$$

Nous avons ainsi terminé l'examen des cas où il peut y avoir, comme solutions particulières, des droites en même temps que les coniques u et v.

XVII.

Étude du cas où, au nombre des solutions particulières, se trouvent deux coniques doublement osculatrices.

Écrivons les équations des deux coniques,

$$u = y^2 + 2xz = 0,$$
$$v = y^2 + 2xz + x^2 = 0;$$

je ferai même remarquer que les axes ne sont pas complétement déterminés. La droite $z = 0$ est une tangente quelconque à la première conique. On pourra profiter de cette indétermination pour simplifier l'équation différentielle.

On aura toujours

$$L = Qx - Ry,$$
$$M = Rz - Px,$$
$$N = Py - Qx.$$

Ces valeurs donneront

$$\Delta u = 0,$$
$$\Delta v = 2x(Qx - Ry).$$

Pour que Δv soit divisible par v, il faut prendre

$$R = -y, \quad Q = x + 2z.$$

Quant à P, il sera quelconque,

$$P = ax + by + cz,$$

et l'on aura

$$L = x^2 + y^2 + 2zx,$$
$$M = -yz - ax^2 - bxy - cxz,$$
$$N = axy + by^2 + cyz - xz - 2z^2,$$
$$H = x(1 - b) + cy - 3z,$$
$$\Delta v = 2xv.$$

On verra, par un calcul facile, que l'on peut toujours choisir les axes de telle manière que l'on ait $c = 0$. Nous supposerons donc cette constante nulle dans la suite.

Les points singuliers sont définis par les équations

$$L = \lambda x, \quad M = \lambda y, \quad N = \lambda z,$$

et ces valeurs de L, M, N, substituées dans les identités

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 2xv,$$

donnent

$$\lambda u = 0, \quad (\lambda - x)v = 0.$$

Il y aura d'abord un point commun aux deux coniques

$$(1) \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \lambda = -2.$$

Il y aura ensuite trois points sur v, pour lesquels $\lambda = 0$: ces points se déterminent par les formules

$$(2, 3, 4) \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = -2\mu, & \mu^3 + \mu(1 - 2b) + 2a = 0, \\ z = -1 + \mu^2, & \lambda = 0, \end{cases}$$

puis trois points sur u, pour lesquels $\lambda = x$, qui sont déterminés par les formules

$$(5, 6, 7) \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = -2\mu, & \mu^3 - 2(b + 1)\mu + 2a = 0, \\ z = -\mu^2, & \lambda = 2. \end{cases}$$

Un premier cas d'intégration se présente si l'on a $a = 0$. Alors on a une nouvelle solution $y = 0$

$$\Delta y = -y(z + bx),$$

et le facteur est

$$y^{-3} v^{-b-\frac{1}{2}} u^b.$$

L'intégration se fait sans difficulté si l'on prend comme variables $u, v, \frac{1}{y^2}$. On obtient une équation linéaire, dont l'intégrale est

$$(\text{XXVIII}) \quad \frac{2u^{b+1} v^{-b+\frac{1}{2}} (v - u)^{-\frac{1}{2}}}{y^2} + \int u^b v^{-b-\frac{1}{2}} (v - u)^{-\frac{3}{2}} (u\,dv - v\,du) = C.$$

Le cas que nous venons d'examiner est le seul dans lequel il puisse y avoir, comme solution, une droite passant par le point commun aux deux coniques. Nous allons rechercher s'il peut y avoir d'autres droites satisfaisant à l'équation.

Ces droites seront nécessairement tangentes à l'une des coniques et couperont l'autre en deux points singuliers. L'équation d'une droite tangente à la conique v est

$$h^2x + 2hy - x - 2z = 0.$$

Écrivons qu'elle coupe la conique u en deux points singuliers. Nous trouverons

$$a = h^3 - h, \quad 2b = 3h^2 - 1.$$

On a, en effet, avec ces valeurs de a et de b,

$$\begin{aligned} &\Delta\,(h^2x + 2hy - x - 2z) \\ &\quad = (h^2x + 2hy - x - 2z)\,[(1 - 2h^2)x - hy - 2z]. \end{aligned}$$

Mais cette unique droite, jointe aux coniques u, v, ne peut donner un facteur que dans le cas déjà examiné $a = 0$.

Si l'on exprime de même qu'il y a, comme solution particulière, une droite tangente à la conique u, l'équation de cette droite sera

$$k^2x + 2ky - 2z = 0.$$

On trouvera

$$a = k^3 + k, \quad 2b = 3k^2,$$

$$\begin{aligned} &\Delta\,(k^2x + 2ky - 2z) \\ &\quad = (k^2x + 2ky - 2z)\,[-(1 + 2k^2)\,x - ky - 2z]. \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait une droite de chaque système, il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned} a &= h^3 - h = k^3 + k, \\ 2b &= 3k^2 = 3h^2 - 1, \end{aligned}$$

ce qui donne les deux systèmes de solutions

$$k = \frac{1}{3}, \quad h = -\frac{2}{3}, \quad a = \frac{10}{27}, \quad b = \frac{1}{6},$$

$$k = -\frac{2}{3}i, \quad h = \frac{1}{3}i, \quad a = -\frac{10i}{27}, \quad b = -\frac{2}{3}.$$

Ces deux systèmes se ramènent l'un à l'autre quand on échange les

coniques. Je traiterai donc seulement le premier. Les valeurs de L, M, N sont alors

$$L = x^2 + y^2 + 2zx,$$
$$M = -yz - \frac{10}{27}x^2 - \frac{xy}{6},$$
$$N = \frac{10}{27}xy + \frac{y^2}{6} - xz - 2z^2,$$

et l'on trouve

$$\Delta\left(\frac{5x}{9} + \frac{4y}{9} + 2z\right) = \left(\frac{5x}{9} + \frac{4y}{3} + 2z\right)\left(\frac{x}{9} + \frac{2y}{3} - 2z\right),$$
$$\Delta\left(-\frac{x}{9} - \frac{2y}{3} + 2z\right) = \left(-\frac{11x}{9} - \frac{y}{3} - 2z\right)\left(-\frac{x}{9} - \frac{2y}{3} + 2z\right).$$

Le facteur sera

$$\left(-\frac{x}{9} - \frac{2y}{3} + 2z\right)^{-1}\left(\frac{5x}{9} + \frac{4y}{3} + 2z\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times (y^2 + 2xz)^{-\frac{1}{4}}(y^2 + 2xz + 2xy)^{-1}.$$

On peut effectuer l'intégration de la manière suivante. Prenons, à la place de y, z, les inconnues définies par les relations

$$5x + 12y + 8z = 18z',$$
$$-x - 6y + 18z = 18y'.$$

Les équations de u et de v deviendront

$$u = (y' - z')^2 + 2xy' = 0,$$
$$v = (y' - z')^2 + 2xy' + x^2 = 0,$$

et la nouvelle équation différentielle sera définie par les valeurs

$$L' = v,$$
$$M' = -y'(x + y' + z'),$$
$$N' = -2y'z'.$$

Posons enfin

$$2z' = (\alpha + \beta)^2\sqrt{-u},$$
$$2y' = (\alpha^2 + \beta^2)\sqrt{-u};$$

on aura

$$\alpha\sqrt[4]{-4u} = \sqrt{y'} + \sqrt{2y' - z'},$$
$$\beta\sqrt[4]{-4u} = \sqrt{z'} - \sqrt{2y' - z'}.$$

L'équation en α, β deviendra

$$\frac{d\alpha}{\alpha^4 - 1} + \frac{d\beta}{\beta^4 - 1} = 0,$$

et son intégrale sera

$$\text{(XXIX)} \qquad \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} = C\left[\frac{(\alpha - i)(\beta - i)}{(\alpha + i)(\beta + i)}\right]^i.$$

On voit que les courbes représentées par cette équation ne seront pas algébriques.

XIX.

Étude du cas où, au nombre des solutions particulières, se trouve une cubique à point double.

Après avoir examiné le cas où il y a, comme solutions particulières, des droites et des coniques, nous allons dire quelques mots de ceux où il y a au moins une cubique comme solution particulière. Mais, comme déjà nous avons rencontré plusieurs de ces cas, nous ne donnerons pas à cette Partie de notre étude tout le développement qu'elle comporte.

Commençons par les cubiques à point double; la forme canonique de leur équation est

$$u = x^3 + y^3 + 3xyz = 0.$$

Il faut chercher les valeurs de L, M, N pour lesquelles on a

$$L(x^2 + yz) + M(y^2 + xz) + Nxy = 0.$$

On a une première solution

$$\begin{aligned} L &= c(y^2 + xz) - bxy, \\ M &= axy - c(x^2 + yz), \\ N &= b(x^2 + yz) - a(y^2 + xz), \end{aligned}$$

qui, prise seule, donnerait

$$\Delta(ax + by + cz) = 0,$$

et, par conséquent, l'intégrale serait

$$x^3 + y^3 + 3xyz = C(ax + by + cz)^3;$$

c'est un cas particulier de l'intégrale V.

Mais on peut profiter de cette solution particulière pour simplifier la recherche des valeurs les plus générales de L, M, N; il suffit de remarquer qu'en l'ajoutant à toute solution on peut disposer de a, b, c de manière à annuler dans L les coefficients de x^2 et de xy, dans M celui de xy. En cherchant alors les solutions pour lesquelles ces trois coefficients sont nuls, le calcul sera beaucoup simplifié, et l'on obtiendra les valeurs les plus générales de L, M, N. On a ainsi

$$(78)\quad \begin{cases} L = c(y^2 + xz) - bxy + xz - y^2, \\ M = axy - c(x^2 + yz) + yz - x^2, \\ N = b(x^2 + yz) - a(y^2 + xz) + 2xy - 2z^2, \\ H = -2z. \end{cases}$$

On peut intégrer l'équation correspondante dans les cas suivants :

1° Si l'on a $c = 1$, $b = 0$, on aura la solution particulière $x = 0$; le facteur sera $\frac{x}{u^{\frac{5}{3}}}$, et l'intégration, qui se fait sans difficulté, donnera l'intégrale

$$(y^2 + 2xz + ax^2)^3 = C(x^3 + y^3 + 3xyz)^2.$$

Cette intégrale a déjà été rencontrée (art. XIII).

2° Cherchons s'il peut y avoir, comme solutions particulières, des droites passant par le point $x = 0$, $y = 0$; il faudra, pour cela, que $\Delta(y + \lambda x)$ soit divisible par $y + \lambda x$: cela ne peut arriver que si l'on a

$$(79)\qquad c(c^2 - 1) = 0.$$

En effet, pour $c = 1$,

$$\Delta x = x(2z - by);$$

pour $c = -1$

$$\Delta y = y(ax + 2z);$$

enfin, pour $c = 0$, on trouve trois droites; mais, dans ce dernier cas, l'équation peut être complétement intégrée. Prenons, en effet, comme nouvelles variables x, y, et le premier membre u de l'équation de la cubique; les formules du changement de variables nous donnent, pour la nouvelle équation, la forme

$$L(y\,du - 3u\,dy) + M(3u\,dx - x\,du) = 0.$$

Il faudra remplacer dans L, M, z en fonction de u : on obtient ainsi, en faisant $x = 1$, l'équation

$$\frac{du}{dy}(y^3 + by^2 + ay - 1) = 3u\left(y^2 + by - \frac{u - y^3 - 1}{3y}\right),$$

qui est une équation linéaire en $\frac{1}{u}$. L'intégrale s'obtient aisément. Si l'on appelle λ, λ', λ'' les racines de l'équation

$$y^3 + by^2 + ay - 1 = 0,$$

et si l'on rétablit l'homogénéité, l'intégrale générale est

$$(\text{XXX})\left\{\begin{aligned} &\frac{(y-\lambda x)^{2-h}(y-\lambda' x)^{2-h'}(y-\lambda'' x)^{2-h''}}{xy(x^3+y^3+3xyz)} \\ &\quad - \int \frac{(y-\lambda x)^{1-h}(y-\lambda' x)^{1-h'}(y-\lambda'' x)^{1-h''}}{x^2y^2}(x\,dy - y\,dx) = \text{C}, \end{aligned}\right.$$

h, h', h'' étant définis par les formules

$$h = \frac{(\lambda' + \lambda)(\lambda'' + \lambda)}{(\lambda' - \lambda)(\lambda'' - \lambda)},$$

$$h' = \frac{(\lambda'' + \lambda')(\lambda + \lambda')}{(\lambda'' - \lambda')(\lambda - \lambda')},$$

$$h'' = \frac{(\lambda + \lambda'')(\lambda' + \lambda'')}{(\lambda - \lambda'')(\lambda' - \lambda'')},$$

et, d'ailleurs, λ, λ', λ'' étant liés par la relation

$$\lambda\lambda'\lambda'' = 1.$$

Pour obtenir d'autres cas d'intégrabilité, nous allons chercher les points singuliers.

On établira facilement les identités

$$\text{L}(2x - ay) + \text{M}(2z - by) + (1 - c)y\text{N} = 0,$$
$$\text{L}(2z + ax) + \text{M}(2y + bx) + (c + 1)x\text{N} = 0,$$

qui résultent, d'ailleurs, de ce qu'on peut écrire ainsi les valeurs de L, M, N :

$$2\text{L} = (c+1)x(2z - by) + (c-1)y(2y + bx),$$
$$2\text{M} = (1-c)y(2z + ax) - (c+1)x(2x - ay),$$
$$2\text{N} = (2x - ay)(2y + bx) - (2z + ax)(2z - by).$$

Il suit de là que l'on aura un premier groupe de trois points singuliers, pour lesquels L, M, N seront nuls, et qui seront définis par les équations

$$\frac{2x - ay}{2z + ax} = \frac{2z - by}{2y + bx} = \frac{(1 - c)y}{(1 + c)x} = \mu,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} x &= 1 - c, \\ y &= \mu(1 + c), \\ z &= b\mu + \mu^2(c + 1), \end{aligned}$$

μ satisfaisant à l'équation

$$\mu^3(c + 1) + b\mu^2 + a\mu + c - 1 = 0.$$

Pour les autres points, L, M, N ne seront pas nuls, mais ils seront proportionnels à x, y, z; en remplaçant donc L, M, N par x, y, z dans les identités écrites plus haut, on aura

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3yz - y(ax + by + cz) &= 0, \\ 2y^2 + 3xz + x(ax + by + cz) &= 0. \end{aligned}$$

Les quatre points communs à ces deux coniques et qui appartiennent, comme cela doit être, à la cubique, seront les quatre points restants. Il y aura d'abord le point

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1,$$

pour lequel le rapport $\lambda = \frac{L}{x} = -2$, et trois autres points dont les coordonnées seront

$$x = 3\nu, \quad y = 3\nu^2, \quad z = -1 - \nu^3,$$

ν satisfaisant à l'équation

$$(80) \qquad (c - 3)\nu^3 - 3b\nu^2 - 3a\nu + c + 3 = 0.$$

Pour ces points, le rapport $\lambda = \frac{L}{x}$ aura pour valeur

$$\lambda = ax\frac{1 - c}{2} - by\frac{1 + c}{2} + \frac{5 - c^2}{2}z.$$

Nous allons profiter de cette détermination des points singuliers,

pour indiquer quelques cas dans lesquels des droites satisfont à l'équation différentielle.

Nous avons vu (art. VII) que, si un point d'inflexion de l'une des courbes satisfaisant à l'équation différentielle est un point singulier de cette équation, la tangente à la courbe en ce point sera une nouvelle solution particulière. Nous serons donc sûrs d'avoir des intégrales rectilignes, si nous exprimons que quelques-uns des points singuliers qui se trouvent sur la cubique sont des points d'inflexion.

Les points d'inflexion de la cubique sont sur la droite $z = 0$, et correspondent, dans les formules écrites plus haut, aux valeurs de ν qui satisfont à l'équation

(81) $$\nu^3 + 1 = 0.$$

Il suffira donc d'exprimer qu'une ou plusieurs de ces valeurs sont racines de l'équation (80). Supposons d'abord qu'il y en ait une seule, et prenons

$$\nu = -1;$$

alors on aura la condition

(82) $$b = a + 2,$$

et l'on trouvera

$$\Delta(x+y-z) = (x+y-z)[(c+a-1)y - (c+a+3)x - 2z].$$

On reconnaîtra aisément qu'avec cette nouvelle droite seule et la cubique on ne peut jamais former un facteur.

Combinons la relation (82) avec la précédente (79) : supposons, par exemple,

$$c = 0;$$

alors on aura un cas particulier de l'intégrale (30) : ce cas particulier est assez remarquable.

Une des valeurs λ, λ', λ'' est égale à -1, et l'intégrale prend la forme

(XXXI) $$\frac{(y-\lambda x)^{\frac{(1+\lambda)^2}{1+\lambda^2}} (x+\lambda y)^{\frac{(1-\lambda)^2}{1+\lambda^2}} (x+y-z)}{x^3+y^3+3xyz} = C.$$

On peut aussi combiner la relation (82) avec l'une des hypothèses

$$c = \pm 1,$$

qui se ramènent l'une à l'autre quand on échange x et y. Prenons donc seulement

$$c = 1;$$

on aura alors, en même temps que la cubique, les deux droites

$$x = 0, \quad x + y - z = 0.$$

Si l'on exprime que le facteur peut se former avec ces trois solutions, on trouvera

$$a = -4, \quad b = -2, \quad c = 1,$$

et l'équation sera définie par les valeurs

$$\begin{aligned} L &= 2xz + 2xy, \\ M &= -4xy - 2x^2, \\ N &= -2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 2yz + 4xz + 2xy. \end{aligned}$$

Le multiplicateur est

$$\frac{x^2(x + y - z)}{(x^3 + y^3 + 3xyz)^{\frac{7}{3}}},$$

et, si l'on effectue l'intégration en commençant par z, on obtient le résultat suivant :

$$\text{(XXXII)} \qquad \frac{[(x^2 - y^2)^2 + 4xz(y^2 - x^2) + 2x^2z^2 + 2x^2(x + y)^2]^3}{(x^3 + y^3 + 3xyz)^4} = C.$$

Les courbes qui forment l'intégrale générale sont du douzième degré.

Nous allons maintenant rechercher s'il peut y avoir, comme solutions particulières, plusieurs droites tangentes à la courbe en des points d'inflexion. Si les tangentes aux trois points d'inflexion donnaient des solutions particulières, la droite qui joint ces trois points serait une quatrième solution : on retrouverait donc le cas, déjà examiné, où il y a quatre droites au nombre des solutions particulières. Nous pouvons donc nous contenter d'examiner le cas où deux points d'inflexion seulement de la cubique sont des points singuliers de l'équation différentielle; il faut, pour cela, que l'équation (80) en ν admette deux racines de l'équation

$$\nu^3 + 1 = 0.$$

Nous pouvons, pour plus de symétrie, supposer que ces deux ra-

cines communes soient les racines imaginaires

$$\nu = -\alpha, \quad \nu = -\alpha^2,$$

α étant une racine cubique de l'unité.

On trouve alors que l'on doit avoir

$$a = 2, \quad b = -2,$$

et, dans ce cas, on a, en effet,

$$\Delta(\alpha x + \alpha^2 y - z) = (\alpha x + \alpha^2 y - z)$$
$$\times [c(\alpha^2 y - \alpha x) + x(2\alpha^2 - \alpha) + y(2\alpha - \alpha^2) - 2z],$$
$$\Delta(\alpha^2 x + \alpha y - z) = (\alpha^2 x + \alpha y - z)$$
$$\times [c(\alpha y - \alpha^2 x) + x(2\alpha - \alpha^2) + y(2\alpha^2 - \alpha) - 2z].$$

Nous ferons une seule application de ce résultat : supposons $c = 1$; l'équation sera définie par les valeurs

$$L = 2xz + 2xy,$$
$$M = -2x^2 + 2xy,$$
$$N = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 2yz - 2xz + 2xy.$$

Le multiplicateur sera

$$x^{-1}(\alpha x + \alpha^2 y - z)^{-1}(\alpha^2 x + \alpha y - z)^{-1}(x^3 + y^3 + 3xyz)^{-\frac{1}{3}},$$

et, en choisissant comme nouvelles variables

$$x + \alpha y = x', \quad x + \alpha^2 y = y', \quad x^3 + y^3 + 3xyz = u^3,$$

l'intégration pourra se faire et conduira au résultat suivant :

$$\text{(XXXIII)} \qquad \frac{u - x'}{u - y'}\left(\frac{u - \alpha x'}{u - \alpha y'}\right)^{\alpha^2}\left(\frac{u - \alpha^2 x'}{u - \alpha^2 y'}\right)^{\alpha} = C.$$

Nous nous contenterons des exemples précédents, sans traiter d'une manière complète la recherche des solutions linéaires.

XX.

Étude du cas où l'équation admet, comme solution, une cubique à point de rebroussement.

L'équation d'une telle courbe peut toujours être ramenée à la forme

$$y^3 + 3x^2 z = 0.$$

On devra avoir

$$2Lxz + My^2 + Nx^2 = 0.$$

Cette équation est très-facile à résoudre; elle nous donne les valeurs suivantes de L, M, N :

$$(83)\quad \begin{cases} L = ax^2 + bxy - hy^2 + cxz, \\ M = kx^2 + 2hxz, \\ N = -ky^2 - 2axz - 2byz - 2cz^2, \\ H = -by - 3cz. \end{cases}$$

Les points singuliers se détermineront comme il suit : il y a d'abord le point de rebroussement de la cubique

$$(1)\qquad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 1,$$

pour lequel $\lambda = \frac{L}{x} = -2c$; il y a deux points pour lesquels L, M, N sont nuls,

$$(2, 3)\qquad x = 2h,\quad z = -k,\quad y^2 - 2by + 2ck - 4ah = 0;$$

enfin, pour les quatre autres points, le rapport $\lambda = \frac{L}{x}$ n'est pas nul, et ils se trouvent, par conséquent, sur la cubique

$$(4, 5, 6, 7)\qquad x = 3,\quad y = -3\mu,\quad z = \mu^3,$$

μ étant déterminé par l'équation

$$c\mu^4 - h\mu^3 - 3b\mu^2 + 3a\mu + 3k = 0,$$

et le rapport $\lambda = \frac{L}{x}$ ayant pour valeur

$$\lambda = -\frac{3k + 2h\mu^3}{\mu}.$$

Je signalerai quelques cas évidents d'intégrabilité.

1° Si h et c sont nuls, on a trois droites passant par le point $x = 0, y = 0$. L'intégrale se forme au moyen de la cubique et de ces droites : elle est de la forme

$$(\text{XXXIV})\qquad (x + \alpha y)^\alpha (x - \beta y)^\beta (y^3 + 3x^2 z)^\gamma = C,$$

où l'on a

$$\alpha + \beta + 3\gamma = 0.$$

2° Si $h = 0$, la droite $x = 0$ est solution; on a

$$\Delta x = x(ax + by + cz);$$

pour que, jointe à la cubique, elle donne un facteur, il faut que l'on ait

$$\alpha(ax + by + cz) - by - 3cz = 0,$$

ce qui entraîne les deux systèmes $a = 0$, $c = 0$, qui donne un cas particulier de l'intégrale précédente et $a = 0$, $b = 0$; dans ce dernier cas, le facteur est

$$\frac{x^3}{(y^3 + 3x^2z)^{\frac{7}{3}}},$$

et il conduit à l'intégrale

(XXXV) $$(y^4 + 4x^2yz + ax^4)^3 = C(y^3 + 3x^2z)^4.$$

Il est à remarquer que la droite $y = 0$ n'est jamais solution; car, si k et h sont nuls, L, M sont divisibles par $ax + by + cz$, et l'équation se réduit à une équation de Jacobi dont l'intégrale est

$$y^3 = Cx^2z.$$

3° Si $k = 0$, la droite $z = 0$ est solution, et l'on a

$$\Delta z = -2z(ax + by + cz)$$

Jointe à la cubique, elle ne peut donner un facteur que dans les deux cas suivants : $a = 0$, $b = 0$, et $a = 0$, $c = 0$.

Pour $a = 0$, $b = 0$, le facteur est

$$z^{-\frac{3}{2}}(y^3 + 3x^2z)^{-\frac{5}{6}}.$$

Si l'on substitue à la variable z la quantité u définie par l'équation

$$u^3 = y^3 + 3x^2z,$$

l'intégration s'effectue sans difficulté, et l'on trouve

(XXXVI) $$\frac{2hxu^{\frac{1}{2}}}{(u^3 - y^3)^{\frac{1}{2}}} + \int \frac{y\,du - u\,dy}{u^{\frac{1}{2}}(u^3 - y^3)^{\frac{1}{2}}} = C.$$

L'intégration dépend des fonctions elliptiques.

De même, pour $a = 0$, $c = 0$, on est conduit à l'intégrale

(XXXVII) $$\frac{-2h(u^3 - y^3)^{\frac{1}{2}}}{xu^{\frac{1}{2}}} + \int \frac{y(y\,du - u\,dy)}{u^{\frac{3}{2}}(u^3 - y^3)^{\frac{1}{2}}} = C,$$

qui dépend également des fonctions elliptiques.

Enfin, sans étudier d'une manière complète les solutions linéaires, je signalerai, en terminant, le cas où il y a au nombre des solutions la droite $z = 0$, une autre droite passant par le point $y = 0$, $z = 0$ et une droite passant par le point de rebroussement de la cubique. On a alors

$$k = 0, \quad c = 1, \quad a = \frac{4h^3}{3}, \quad b = \frac{4h^2}{3}.$$

Le facteur est

$$\frac{z(2hx - y)^2}{\left(z + \frac{4h^2}{3}y\right)^{\frac{3}{2}} \left(y^3 + 3x^2 z\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégration commencée par rapport à x donne

$$\text{(XXXVIII)} \qquad \frac{[4h^3y^3 + 9hy^2z + 9xz^2 + 4h^3(3x^2z + y^3)]^2}{(3z + 4h^2y)^3\,(y^3 + 3x^2z)} = \text{C}.$$

Ce cas est remarquable, parce qu'au nombre des solutions particulières se trouve en évidence une nouvelle cubique. On peut encore donner à l'intégrale la forme

$$\frac{(y - 2hx)^3 z^2 (3z + 3h^2y + 2h^3x)}{(3z + 4h^2y)^2\,(y^3 + 3x^2z)} = \frac{1 - \text{C}}{9}.$$

XXI.

Indication d'une méthode synthétique qui permet de vérifier quelques-unes des intégrales précédentes et d'en trouver de nouvelles.

Il résulte des recherches des articles précédents que l'intégrale générale de l'équation différentielle du premier ordre, dans le cas où L, M, N sont du second degré, peut revêtir un très-grand nombre de formes différentes. Sans doute, toutes les intégrales que nous avons trouvées ne sont pas essentiellement distinctes, et, du reste, nous ne nous sommes nullement attaché à les réduire au moindre nombre possible, et à montrer comment quelques-unes d'entre elles sont des cas particuliers des plus générales; il résulte néanmoins, de l'étude qui vient d'être faite, des conséquences qui

nous paraissent dignes d'être signalées. Pendant que l'équation de Jacobi admet en définitive une seule forme d'intégrale dont toutes les autres sont des cas limites, l'équation différentielle la plus simple après elle peut être intégrée de plusieurs manières différentes, et il est possible de donner pour chaque degré plusieurs faisceaux de courbes algébriques appartenant à des types différents et dont l'équation différentielle sera précisément celle que nous avons étudiée. Nous allons indiquer une méthode qui permet de vérifier plusieurs des intégrales précédentes quand elles sont algébriques, et même d'en trouver de nouvelles.

Supposons que l'intégrale d'une équation différentielle soit algébrique. Elle sera alors de la forme

$$(84) \qquad u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} = \mathrm{C},$$

$u_1, u_2, \ldots, u_p$ étant des fonctions algébriques entières que nous pouvons supposer être indécomposables, et dont nous désignerons les degrés par $h_1, h_2, \ldots, h_p$. On devra avoir

$$(85) \qquad h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \ldots + h_p\alpha_p = 0;$$

si l'on forme directement l'équation différentielle des courbes (84), on trouvera

$$(86) \qquad \left(\alpha_1 \frac{du_1}{u_1} + \alpha_2 \frac{du_2}{u_2} + \ldots + \alpha_p \frac{du_p}{u_p}\right) u_1 u_2 \ldots u_p = 0,$$

et cette équation se présentera sous la forme

$$(87) \qquad \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz = 0,$$

où P, Q, R seront des fonctions entières de degré

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_p - 1.$$

On sait que l'équation précédente peut toujours être ramenée à la forme

$$(88) \qquad \mathrm{L}(y\,dz - z\,dy) + \mathrm{M}(z\,dx - x\,dz) + \mathrm{N}(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

où L, M, N sont d'un degré inférieur d'une unité à celui de P, Q, R, et par conséquent, si nous désignons toujours ce degré par m, on aura

$$(89) \qquad m = h_1 + h_2 + \ldots + h_p - 2.$$

Il suit de là que toute équation algébrique de la forme (88) pourra admettre des intégrales de la forme (84), les degrés $h_1, \ldots, h_p$ étant liés par la seule relation (88), et les exposants $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ par la seule équation (85).

C'est ainsi que, pour le cas de $m = 2$, on obtient immédiatement trois cas possibles d'intégrabilité, qui conduisent, pour l'intégrale générale, aux trois types suivants :

$$v_3 = C p_1^3,$$
$$u_2 = C p_1^\alpha q_1^\beta,$$
$$p_1^\alpha q_1^\beta r_1^\gamma s_1^\delta = C,$$

chacun des polynômes p, u, v étant d'un degré égal à son indice.

Mais cette remarque évidente, et qui a déjà été faite, du reste, par M. Fouret, est loin, comme nous l'avons vu par les exemples que nous avons traités, de faire connaître tous les cas d'intégrabilité de l'équation différentielle considérée. Il peut arriver, en effet, que l'équation différentielle (85), ordonnée suivant dx, dy, dz, se présente sous la forme

$$(90) \qquad \lambda^k \lambda'^{k'} \ldots (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = 0.$$

Alors, en supprimant les facteurs λ^k, $\lambda'^{k'}$, ..., on abaissera le degré de l'équation. Il est possible de reconnaître d'une manière précise dans quel cas ce fait si essentiel se produira.

Remarquons d'abord que jamais ces facteurs λ, λ' ne peuvent être identiques aux fonctions $u, \ldots, u_p$. En effet, dans l'équation (86), tous les termes, sauf $\alpha_1 u_2 u_3 \ldots u_p du_1$, sont divisibles par u_1. Comme nous avons supposé les fonctions u_i indécomposables, il est impossible que le terme précédent soit divisible par u_1.

D'autre part, si nous comparons les équations (90), (86), nous voyons que $\lambda^k \lambda'^{k'} \ldots u_1^{-1} u_2^{-1} \ldots u_p^{-1}$ sera un multiplicateur pour l'équation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

et par conséquent, d'après une remarque faite à la fin de l'article IV, les équations

$$\lambda = 0, \quad \lambda' = 0, \quad \ldots$$

constituent des solutions particulières de l'équation différentielle

proposée. D'après cela, considérons l'une d'elles, λ, que nous pouvons toujours supposer indécomposable, et donnons à la constante C de l'intégrale générale une valeur C_1, telle que la courbe

$$(91) \qquad u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p} - C_1 = 0$$

passe par un point de la courbe λ, qu'on choisira d'ailleurs d'une manière quelconque, mais en excluant tout point singulier de l'équation différentielle. Alors l'équation (91) sera vérifiée en tous les points de la courbe λ. En effet, cette équation représente une intégrale passant par un point de la courbe λ, et l'on sait que, par un point du plan, pourvu qu'il ne soit pas singulier, ne peuvent jamais passer deux courbes différentes satisfaisant à l'équation différentielle.

Comme on a d'ailleurs identiquement

$$d(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} - C_1) = u_1^{\alpha_1 - 1} \ldots u^{\alpha_p - 1} \lambda^k \lambda'^{k'} \ldots (P dx + Q dy + R dz),$$

il faudra nécessairement que la fonction $u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p} - C_1$, qui contient λ en facteur, le contienne à la puissance $k+1$.

Réciproquement, si, pour une valeur C_1 de C, la fonction $u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p} - C_1$ est divisible par une puissance $k+1$ d'un polynôme indécomposable λ, λ^k sera en facteur dans l'équation différentielle.

Dans tout ce qui précède, et pour plus de netteté, j'ai toujours écrit l'intégrale générale sous la forme

$$u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p} - C = 0,$$

dans laquelle les exposants $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ ne peuvent être tous de même signe. Tout ce qui précède subsiste évidemment si l'on écrit l'intégrale

$$u_1^{\alpha_1} \ldots u_q^{\alpha_q} = C u_{q+1}^{\alpha_{q+1}} \ldots u_p^{\alpha_p},$$

de manière que les exposants soient tous positifs.

Il résulte des remarques précédentes que, étant donnée l'équation d'un faisceau de courbes algébriques

$$f(x, y, z) = C f_1(x, y, z),$$

nous avons un moyen précis de déterminer l'ordre des polynômes L, M, N dans l'équation différentielle de ce faisceau. Supposons

que, pour une valeur de C, C_1, on ait

$$f - C_1 f_1 = U^p \varphi(x, y, z),$$

U étant indécomposable; nous appellerons U une courbe multiple d'ordre p du faisceau. Plusieurs courbes multiples peuvent se présenter ensemble, si l'on a, par exemple

$$f - C_1 f_1 = U^p V^q W^r \varphi_1(x, y, z);$$

elles peuvent aussi se présenter pour différentes valeurs de C. Mais il est clair que la même courbe ne peut se présenter pour deux valeurs différentes de C. Nous avons alors, comme conséquence des remarques précédentes, le théorème suivant :

Dans l'équation différentielle des courbes du faisceau

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_q^{\alpha_q} - C u_{q+1}^{\alpha_{q+1}} \ldots u_p^{\alpha_p} = 0,$$

le degré des polynômes L, M, N *est*

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_p - 2 - m'_2 - 2m'_3 - 3m'_4 - \ldots,$$

$h_1, h_2, \ldots, h_p$ *désignant les degrés de* $u_1, \ldots, u_p$; m'_2 *désignant la somme des degrés des courbes doubles, et en général* m'_p *la somme des degrés des courbes multiples d'ordre* p *du faisceau considéré, autres que les courbes* u.

Il résulte de ce qui précède que l'on peut diviser en deux classes bien distinctes les faisceaux de courbes algébriques. Il y aura d'abord ceux qui sont représentés par l'équation

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} = C v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2} \ldots v_q^{\beta_q},$$

et qui ne peuvent avoir d'autres courbes multiples que les courbes u, v. Toute courbe de ces faisceaux sera indécomposable, ou se décomposera en courbes qui seront simples.

Il y aura aussi des faisceaux qui comprendront d'autres courbes multiples que les courbes u et v. Alors, pour une valeur au moins de la constante C, on obtiendra une identité de la forme

$$(92) \qquad u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p} - C_1 v_1^{\beta_1} \ldots v_q^{\beta_q} = w_1^{\gamma_1} \ldots w_r^{\gamma_r},$$

où les exposants γ ne seront pas tous égaux à l'unité. Pour de tels faisceaux, le degré de l'équation différentielle s'abaissera conformément à la règle que nous avons donnée.

La théorie des formes algébriques fait connaître un assez grand nombre d'identités de la forme (92). Je vais traiter avec quelque détail un seul exemple, afin de montrer l'usage qu'on peut faire de ces identités, pour reconnaître des formes nouvelles de l'intégrale d'une équation différentielle.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} I &= \gamma^2 - \beta\delta, \\ J &= 2\gamma^3 - 3\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2, \\ K &= 4I(\beta^2 - \alpha\gamma) - (\alpha\delta - \beta\gamma)^2, \end{aligned}$$

la théorie des formes binaires cubiques nous conduit à l'identité

(93) $$4I^3 - J^2 = \delta^2 K,$$

qu'il est d'ailleurs très-aisé de vérifier.

Supposons que α, β, γ, δ désignent des polynômes homogènes en x, y, z des degrés n, $n+p$, $n+2p$, $n+3p$; les polynômes I et J seront respectivement des degrés $2n+4p$, $3n+6p$. Si nous considérons le faisceau de courbes représenté par l'équation

(94) $$4I^3 - CJ^2 = 0,$$

ce faisceau admettra comme courbe double, pour $C = 1$, la courbe $\delta = 0$, et par conséquent, dans l'équation différentielle de ce faisceau, le degré des polynômes L, M, N sera au plus

$$4n + 7p - 2,$$

nombre inférieur de $n + 3p$ unités à celui que l'on aurait obtenu s'il n'y avait pas eu de courbe double δ.

Supposons, par exemple, $n = 1$, $p = 0$. Alors α, β, γ, δ seront des polynômes du premier degré, et l'équation

$$(\gamma^2 - \beta\delta)^3 = C(2\gamma^3 - 3\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2)^2$$

représente des courbes du sixième ordre, dont l'équation différentielle appartient au cas où $m = 2$. C'est l'intégrale XIV de l'article XIII. Pour toutes les autres valeurs de n et de p, les polynômes L, M, N seront de degrés supérieurs. Mais nous allons étudier un problème dans lequel nous pourrons faire apparaître de nouvelles courbes multiples.

Supposons que l'on considère un point M, de coordonnées x', y',

z', et une cubique représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0;$$

si l'on pose

$$(95)\quad \begin{cases} \alpha = f(x', y', z'), \\ 3\beta = xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'}, \\ 3\gamma = x'f'_{x} + y'f'_{y} + z'f'_{z}, \\ \delta = f(x, y, z), \end{cases}$$

les équations

$$I = 0, \quad J = 0, \quad K = 0$$

auront une signification géométrique bien connue. La première représentera le lieu des points qui forment une proportion équianharmonique avec les trois points de la cubique situées sur une sécante quelconque passant par M. La deuxième représente le lieu du point qui forme avec les mêmes points une proportion harmonique. Enfin la troisième est l'équation des tangentes menées du point M à la cubique. Quant à l'équation

$$(96)\qquad I^3 = CJ^2,$$

elle représente une courbe du douzième degré, lieu des points qui forment un rapport anharmonique donné avec les trois points que détermine sur la cubique la sécante variable passant par M. Il suit des remarques précédentes que l'équation différentielle des courbes (96) appartiendra au degré $m = 5$. Nous allons énumérer quelques cas dans lesquels ce degré s'abaisse.

1° Supposons que la cubique ait un point double P, et que le point M vienne se placer à la rencontre d'une des tangentes au point double et d'une tangente en un des points d'inflexion. Alors la tangente au point double devra être comptée pour trois, et deviendra une courbe triple du faisceau; la tangente au point d'inflexion sera double, et le degré m de l'équation différentielle s'abaissera à 2.

Soit

$$x^3 + y^3 + 3xyz = 0$$

l'équation de la cubique. Les coordonnées du point M seront

$$x = 0, \quad y = z = 1,$$

On aura ici

$$\alpha = 1, \quad \beta = x + y, \quad \gamma = y^2 + xz + xy, \quad \delta = x^3 + y^3 + 3xyz.$$

On trouvera

$$\begin{aligned} I &= (x+y-z)(y^2-x^2-xz)x,\\ J &= (x+y-z)[-2xz^2-z(6y^2+2x^2-xy)\\ &\qquad +x^3+3y^3-2xy^2-4yx^2]x^2,\\ K &= (x+y-z)^2x^3(4y-5x-4z). \end{aligned}$$

Et si l'on considère les courbes représentées par l'équation

$$\text{(XXXIX)}\quad \left\{ \begin{aligned} &(x+y-z)(y^2-x^2-xz)^2\\ &\quad = C(y^3+x^3+3xyz)^2(4y-5x-4z), \end{aligned}\right.$$

que l'on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} &x[2xz^2+z(6y^2+2x^2-xy)+4yx^2+2xy^2-x^3-3y^3]^2\\ &\quad =(4-C)(y^3+x^3+3xyz)^2(4y-5x-4z), \end{aligned}$$

on aura une nouvelle intégrale de l'équation différentielle (78) étudiée à l'article XIX, correspondant aux valeurs $a=1$, $b=3$, $c=1$ des constantes de cette équation.

2° Supposons maintenant que la cubique ait un rebroussement; son équation sera

$$y^3+3x^2z=0.$$

Prenons le point M sur la tangente au point de rebroussement. On peut toujours choisir les paramètres de référence de telle manière que les coordonnées de ce point soient

$$x=0,\quad y=1=z.$$

On aura ici

$$\begin{aligned} &\alpha=1,\quad \beta=y,\quad \gamma=y^2+x^2,\quad \delta=y^3+3x^2z,\\ &I=x^3(x^2+2y^2-3yz),\\ &J=x^2[2(x^2+y^2)(x^2+2y^2-3yz)+(y^3+3x^2z)(3z-y)],\\ &K=-x^4[4x^2+9(y-z)^2]. \end{aligned}$$

Les courbes représentées par l'équation générale

$$\text{(XL)}\qquad Cx^2(x^2+2y^2-3yz)^3=(y^3+3x^2z)^2[4x^2+9(y-z)^2],$$

ou, ce qui est la même chose, par l'équation

$$\begin{aligned} &(4-C)x^2(x^2+2y^2-3yz)^3\\ &\quad =[2(x^2+y^2)(x^2+2y^2-3yz)+(y^3+3x^2z)(3z-y)]^2, \end{aligned}$$

seront des intégrales de l'équation différentielle (83) de l'article XX.

correspondantes aux valeurs

$$a = 0, \quad b = -\frac{5}{4}, \quad c = \frac{3}{4}, \quad h = 0, \quad k = 1.$$

3° Enfin, si l'on prend le point M sur la tangente d'inflexion, les coordonnées seront

$$z = 0, \quad x = y = 1,$$

on aura

$$\alpha = 1, \quad \beta = y + z, \quad \gamma = y^2 + 2xz, \quad \delta = y^3 + 3x^2 z,$$
$$I = z(4xy^2 - 3yx^2 - y^3 + x^2 z),$$
$$J = z[-2x^3z^2 + xz(y-x)(-6y^2 + 9xy - 9x^2) - 3y^3(y-x)^2]$$
$$K = -z^2(y-x)^3(4z + 9y - 9x),$$

et l'équation

$$\text{(XLI)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & Cz(4xy^2 - 3yx^2 - y^3 + x^2 z)^3 \\ & \quad = (y - ax)^3(4z + 9r - 9x)(y^3 + 3x^2 z)^2, \end{aligned} \right.$$

que l'on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} & (C+4)z(4xy^2 - 3yx^2 - y^3 + x^2 z)^3 \\ & \quad = [-2x^3z^2 + xz(y-x)(-6y^2 + 9xy - 9x^2) - 3y^2(y-x)^2]^2, \end{aligned}$$

représentera une nouvelle forme de l'intégrale de l'équation différentielle (83) de l'article XX correspondant aux valeurs

$$a = -3, \quad b = 4, \quad c = 2, \quad k = 0, \quad h = 1.$$

On obtiendra des résultats analogues en considérant une courbe du quatrième ordre, et en supposant le point M placé sur cette courbe.

Réciproquement, toute intégrale algébrique d'une équation différentielle, qui présentera des courbes multiples pour différentes valeurs de C, conduira à une identité algébrique. Nous avons déjà donné plusieurs exemples en mettant certaines intégrales sous différentes formes. Nous signalerons ici les plus simples.

Nous avons vu que l'équation différentielle (83) peut admettre l'intégrale

$$(97) \qquad (x^4 + y^4 + 4x^2y)^3 = C(y^3 + 3x^2z)^4.$$

Il faut donc nécessairement que le faisceau représenté par l'équation précédente présente une courbe multiple différente de la cu-

bique et de la courbe du quatrième ordre qui ont servi à former l'intégrale. Cette nouvelle courbe est une droite quadruple. On trouve, en effet,

$$(x^4 + 4x^2yz + y^4)^3 - (y^3 + 3x^2z)^4 = x^4 D,$$

D étant un polynôme du huitième degré, et inversement, cette identité, étant supposée vérifiée, suffirait à montrer que l'équation différentielle des courbes représentées par l'équation (97) appartient au degré $m = 2$.

Considérons maintenant le faisceau de courbes représenté par l'équation

$$u^\alpha v^\beta w^\gamma = C,$$

où u, v, w sont du second degré. Dans l'équation différentielle de ce faisceau, le degré des polynômes L, M, N sera égal à 4. Mais ce degré pourra s'abaisser à 2 dans les différents cas suivants : s'il y a deux droites doubles, une conique double, ou une droite triple parmi les courbes du faisceau. Cherchons la condition pour qu'il y ait une droite triple, et supposons que les axes aient été choisis de telle manière que l'équation de cette droite soit

$$x = 0.$$

Nous pouvons toujours supposer qu'elle se présente pour la valeur 1 de la constante C. Alors il y aura à exprimer que l'expression

$$u^\alpha v^\beta w^\gamma - 1$$

est divisible par x^3. Ordonnons u, v, w suivant les puissances de x; on aura

$$u = a + a'x + a''x^2,$$
$$v = b + b'x + b''x^2,$$
$$w = c + c'x + c''x^2,$$

a, b, c étant du second degré en y, z; a', b', c' du premier, et a'', b'', c'' étant des constantes. La fonction

$$u^\alpha v^\beta w^\gamma - 1,$$

devant être divisible par x^3, s'annulera pour $x = 0$; on aura donc

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma - 1 = 0.$$

Or cette équation ne peut avoir lieu, α, β, γ étant quelconques et assujettis à la seule condition

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

que si l'on a

$$a = b = c;$$

c'est ce que nous supposerons. Maintenant, pour exprimer d'une manière simple que

$$u^\alpha v^\beta w^\gamma - 1$$

est divisible par x^3, nous écrirons que le développement de

$$\log u^\alpha v^\beta w^\gamma,$$

suivant les puissances de x commence au terme en x^3. On obtient ainsi les deux équations

$$\alpha a' + \beta b' + \gamma c' = 0,$$
$$\alpha a'^2 + \beta b'^2 + \gamma c'^2 + 2a(\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'') = 0.$$

Ces équations peuvent être résolues comme il suit. Posons

$$\alpha a' = q - r,$$
$$\beta b' = r - q,$$
$$\gamma c' = p - q,$$

p, q, r étant trois polynômes linéaires en y, z. La première équation sera satisfaite, et la seconde donnera

$$a = -\frac{(\alpha p + \beta q + \gamma r)^2}{2\alpha\beta\gamma(a''\alpha + b''\beta + c''\gamma)}.$$

La formule qui en résulte est, sauf la différence des notations, l'intégrale XXIII, et il est ainsi démontré qu'elle est la plus générale, toutes les fois que l'on assujettira le faisceau considéré à contenir une droite triple.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GERHARDT (C.-I.). — Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. XVII. Band. GESCHICHTE DER MATHEMATIK, VON C.-I. GERHARDT. — München, 1877. Druck und Verlag von R. Oldenbourg. — 1 vol. in-8°, XII-307 pages.

La *Commission historique* de l'Académie Royale des Sciences de Bavière compte, parmi les nombreux et importants travaux dont elle est chargée, la publication d'une collection d'Ouvrages d'Histoire, dont la tendance générale ressort du titre du Livre que nous venons de citer. Mais la plupart des auteurs auxquels a été confiée l'exécution de ce plan ont dû se ranger à l'opinion, certainement bien justifiée, qu'il est difficile, sinon impossible, de tracer l'histoire d'une science déterminée, en s'occupant exclusivement d'une seule nation, surtout d'une nation moderne; c'est ainsi, par exemple, que Peschel, Sachs, Rudolf Wolf, dans leurs Ouvrages sur la Géographie, la Botanique, l'Astronomie, n'ont pas hésité à s'émanciper des rigoureuses exigences du programme, et se sont contentés de donner une part d'attention prépondérante aux travaux des savants allemands. M. Gerhardt a compris autrement sa tâche; il a voulu suivre les prescriptions à la lettre, et s'est engagé ainsi dans une entreprise où, malgré ses consciencieux efforts, il lui était bien difficile d'éviter des inconséquences et de ne jamais altérer la vraie physionomie de l'Histoire.

L'espace dont nous pouvons disposer dans ce *Bulletin* ne nous permet pas d'insister sur les détails de la marche historique, et nous nous abstenons d'autant plus volontiers d'entrer dans de longs développements que nous devons faire paraître dans un autre Recueil ([1]) un article étendu sur le même Ouvrage. Ici nous nous occuperons surtout d'exposer les points de vue historiques généraux d'après lesquels l'auteur s'est guidé, et de faire connaître clairement au lecteur ce qu'il trouvera dans ce Livre et ce qu'il n'y trouvera pas.

M. Gerhardt a eu pour dessein « de tracer l'histoire des Mathé-

([1]) Dans le *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft.*

matiques en Allemagne sur l'arrière-plan de l'histoire générale de la civilisation allemande ». C'est là certainement une pensée juste, mais difficile à mettre en œuvre dans l'espace relativement si resserré dans lequel l'auteur s'est confiné. Il a consacré, et l'on ne peut que l'en louer, une attention toute spéciale à la peinture et à l'appréciation des hommes qui marquent en quelque sorte les étapes des progrès scientifiques, et qui tiennent une grande place dans l'histoire de la civilisation, par cela seul qu'ils ont ouvert des nouvelles voies à la vie intellectuelle de leur nation. Mais on aurait tort de prétendre que ce côté de leur action ait toujours été compris et apprécié de leurs contemporains. Loin de là, nous ne savons que trop dans quel isolement ces héros du génie ont dû errer sur leurs cimes désertes, sans qu'il leur ait été donné d'exercer aucune influence immédiate sur la vie intellectuelle et sociale de leur patrie. Des savants de deuxième ou de troisième ordre, mais qui dans leurs travaux se rapprochent davantage du courant des idées régnantes, exercent ainsi, au point de vue du progrès des lumières, une influence beaucoup plus marquée, et l'on devrait par conséquent leur reconnaître une importance supérieure. Bien plus, l'historien, poursuivant cette tendance générale, devra descendre encore plus bas; il sait bien que l'Astrologie, l'Alchimie et la Magie lui fourniront, dans cette manière de voir, des points d'attache beaucoup plus solides que les sciences dignes de ce nom. Si donc chez Gerhardt l'histoire des Mathématiques en Allemagne se concentre sur quelques noms seulement, Stifel, Kepler, Leibnitz, Gauss, Steiner [1], cela peut sembler insuffisant à celui qui ouvre le Livre dans un intérêt purement théorique; mais à celui qui s'attendrait à y trouver un développement logique du plan annoncé dans l'Introduction, un complet désappointement est réservé. Nous remarquons encore que l'auteur a oublié de considérer un point particulièrement important : l'histoire d'une branche scientifique dans les temps modernes ne peut, à notre avis, avoir une utilité vraiment pratique que lorsqu'elle tient toujours compte des rapports entre l'enseignement moyen et le haut enseignement aux différentes époques. Mais, si l'on excepte quelques documents dignes d'atten-

(1) Ces cinq noms occupent juste la moitié du volume (153 pages).

tion sur l'École de Vienne, et quelques observations sommaires sur le xve siècle, l'auteur ne nous apprend presque rien sur le développement de la pédagogie mathématique, et celui qui s'intéresse à ce genre de recherches est toujours obligé de s'en tenir à l'Ouvrage historique de Raumer, ou au Chapitre, malheureusement trop court, que contient l'excellent livre de Hankel.

Dans sa Préface, l'auteur se plaint de l'extrême disette de travaux préparatoires qui l'a contraint à se procurer ses matériaux par de pénibles recherches. Nous ne nous rendons pas bien compte de ce qu'il faut entendre par là. Nous savons pourtant que des hommes comme les Cantor, les Curtze, les Giesel, les Friedlein, les Treutlein et autres, ont étudié à fond la période même traitée par M. Gerhardt : faut-il en conclure que tous ces travaux, la plupart couronnés de succès, seraient demeurés inconnus à l'auteur d'une *Histoire des Mathématiques en Allemagne?* On serait presque tenté de le croire, si l'on s'en tenait à ce fait, qu'aucun des noms que nous venons de rappeler ne se trouve une seule fois cité dans le cours du Livre; mais il est inutile de dire qu'une supposition aussi désobligeante ne nous a jamais traversé l'esprit. Il n'y a d'autre moyen de nous expliquer ce silence systématique à l'égard de travaux de haute valeur qu'en admettant chez l'auteur la résolution de ne faire appel qu'à ses propres forces, et, du moins pour les deux premiers Chapitres, de tirer tout de ses études personnelles sur les sources originales. Quelque louable que soit ce principe en lui-même, nous n'avons pu tout d'abord nous empêcher de craindre que sa mise en œuvre rigoureuse ne dépassât de beaucoup les forces d'un seul homme, en présence surtout des occupations multiples auxquelles il est assujetti, et cette crainte ne s'est trouvée que trop justifiée par les faits. Nous ne pouvons donc qu'exprimer notre étonnement d'un tel isolement volontaire, à une époque où plus que jamais la combinaison active et consciente de toutes les énergies est nécessaire à la Science pour atteindre son but élevé.

A cette fâcheuse omission l'auteur ajoute deux exemples non moins choquants d'inconséquence à son plan, inconséquence à laquelle l'a forcément entraîné l'énoncé vicieux du problème qu'il s'était posé. Il s'agissait d'écrire une histoire des Mathématiques pures; mais celui qui connaît le caractère des travaux scientifiques, surtout pendant le moyen âge et la Renaissance, sait aussi quelle

énorme difficulté présente le partage des diverses branches de la Science. M. Gerhardt a voulu entreprendre ce partage; des travaux astronomiques d'un Peurbach, d'un Regiomontanus, il ne nous dit pas un seul mot, et c'est là ce qui explique sans doute pourquoi le géomètre Copernic, au sujet duquel il aurait pu consulter la remarquable monographie de Fasbender, n'a pas non plus trouvé grâce à ses yeux. Admettons maintenant, si l'on veut, cette ligne de démarcation; mais alors de quel droit figurent dans ce Livre le théorème de Lambert sur le calcul des orbites des comètes, et l'histoire de la réinvention de la planète Cérès par Gauss? Et si la Cartographie, qui appartient cependant pour une bonne moitié aux Mathématiques pures, est restée si complétement exclue, qu'il n'a pu être fait la moindre mention de l'invention si remarquable de la projection équivalente par Johann Werner, il n'y avait pas lieu non plus, rigoureusement parlant, à accorder une place aux découvertes de Gauss.

Un autre inconvénient grave résulte d'une application malheureuse du principe de nationalité. En prenant pour règle de ne considérer que l'Allemagne dans le sens dynastique le plus étroit, M. Gerhardt a été conduit à consacrer en tout *huit lignes* à la brillante pléiade des Bernoulli et des Euler, par la raison qu'ils étaient de nation suisse, sauf, il est vrai, à les citer à chaque instant quand l'occasion l'exigeait. D'autre part, Jost Bürgi, bien que natif de Toggenburg, obtient une mention suffisante, ce dont nous sommes loin de nous plaindre; Lambert, né sujet helvétique, a aussi son article, que nous trouvons, à la vérité, un peu trop court; l'auteur va même jusqu'à octroyer le droit de bourgeoisie au Norvégien Abel. Cette disposition aux annexions intellectuelles cadre peu avec le reproche inconsidéré qu'il adresse aux mathématiciens français, d'avoir, en vue de rabaisser les mérites de Gauss concernant la représentation géométrique des nombres complexes, publié une nouvelle édition de l'opuscule d'Argand sur le même sujet. M. Gerhardt a sans doute oublié qu'Argand n'était pas Français, mais Suisse.

Ces remarques générales étant faites, passons à un court exposé du contenu de l'Ouvrage. Le moyen âge proprement dit est traité très-brièvement, le récit suivi commence seulement à Jean de Gmunden; il rend compte avec détail des travaux géométriques et

trigonométriques de Peurbach, de Müller, de Werner et de Dürer, et s'arrête avec une complaisance marquée sur les anciens arithméticiens et algébristes allemands. Ici nous rencontrons beaucoup de précieuses additions à nos connaissances historiques; nous citerons, entre autres, les intéressants renseignements sur le Traité de Calcul de Bamberg, de 1473; les extraits importants que l'auteur a faits du codex de Ratisbonne, qu'il a trouvé le premier; la découverte, nouvelle pour nous, d'un grand mathématicien pour son temps, le moine Aquinas; et enfin le Chapitre entier qui traite de Christophe Rudolf et de Michel Stifel. Nous ne pouvons aussi qu'approuver en somme ce que l'auteur nous donne sur Reimarus Ursus, sur Kepler et sur Guldin. Enfin le résumé qui termine le premier Livre est digne d'éloges.

Le deuxième Livre, qui va « depuis le milieu du XVIIe siècle jusqu'à la fin du XVIIIe », se réduit à peu près à un Essai sur Leibnitz, auquel se rattachent accessoirement quelques remarques trop sommaires sur Tschirnhaus, Wolff, Kästner, Lambert et sur l'École combinatoire. Pour la partie principale, l'auteur se trouvait là sur son terrain de prédilection, et il était par suite à même de tracer un tableau complet et fidèle des vastes idées de l'inventeur du Calcul différentiel. On aurait pu toutefois désirer qu'il eût fait quelque mention des recherches de Giesel.

Le contenu du troisième Livre, qui embrasse l'époque moderne, est purement biographique; les découvertes de Gauss, de Jacobi, de Dirichlet, de Möbius, de Plücker, de Steiner sont esquissées à grands traits. Toutefois cette image nous fait la même impression que si les personnalités décrites se trouvaient placées en quelque sorte sans intermédiaires les unes à côté des autres; il nous manque une indication qui nous éclaire sur les causes qui ont dirigé leurs idées, et cela fait que le Livre nous semble finir trop brusquement. L'auteur termine, en effet, par ces lignes : « Vers le milieu du présent siècle, la mort a ravi les princes de la Science, les Gauss, les Jacobi, les Lejeune-Dirichlet, les Steiner auxquels les Mathématiques en Allemagne doivent leurs progrès et leur prééminence. Ce qui a été fait depuis dans ce domaine n'appartient pas encore à l'histoire ». Or nous pensons que la meilleure manière de conclure eût été d'exposer la voie qu'a suivie Riemann, sous l'influence simultanée de Gauss et de Cauchy, pour accomplir la réforme de

la théorie des fonctions, en jetant également un coup d'œil sur les travaux de Hermann Grassmann, qui se relient au fond à la même question.

Notre résumé sommaire suffira pour faire voir aux amis des recherches sur l'Histoire des Mathématiques qu'ils trouveront dans l'Ouvrage de M. Gerhardt des détails d'un intérêt varié et contenant beaucoup de faits nouveaux, mais nullement un Traité pouvant donner une connaissance complète du développement successif des Mathématiques en Allemagne. S. G.

STURM (R.). — ELEMENTI DI GEOMETRIA DESCRITTIVA. Traduits en italien par JUNG. — In-8°, 114 pages, 12 planches. Milano, 1878.

La lecture des Traités élémentaires publiés à l'étranger est éminemment intéressante pour tous ceux que préoccupe le progrès de l'enseignement en France ; bien que le *Bulletin* ne puisse rendre compte de tous les Ouvrages de cette catégorie, il convient de faire une exception pour ceux qui se distinguent par leurs qualités, et qui présentent des différences notables avec les Traités qui ont cours dans notre pays.

Les *Éléments de Géométrie descriptive* de M. Sturm, dont la traduction italienne de M. Jung doit être regardée comme une nouvelle édition revue et améliorée par l'auteur, débutent, bien qu'ils s'adressent à des commençants, par des notions très-générales : une figure est la projection d'une autre lorsque chacun de ses points correspond à un point de la seconde; l'auteur donne ensuite les principales propriétés de la projection centrale et de la projection parallèle ; ces diverses notions remplissent l'Introduction. Dans le premier Chapitre, au lieu d'introduire immédiatement les deux plans de projection, il étudie avec détail (p. 7-30) tout ce qui concerne les projections orthogonales sur un seul plan ; cette marche présente l'avantage de débarrasser singulièrement les Chapitres suivants, et de ne pas faire sortir trop brusquement l'étudiant du domaine de la Géométrie ordinaire; l'auteur ne craint pas d'introduire, dès ce Chapitre, la terminologie relative à l'infini ; il le

fait d'ailleurs avec soin et discrétion. Les cinq Chapitres suivants traitent des problèmes élémentaires sur la droite et le plan, et sur l'angle trièdre. Enfin le septième Chapitre (p. 87-114) traite des polyèdres, en particulier des polyèdres réguliers convexes, de leur représentation, de leurs sections planes, et de l'intersection d'un prisme et d'une pyramide : les démonstrations et les constructions sont aussi claires et aussi simples qu'il est possible.

GENOCCHI (A.). — SUR UN MÉMOIRE DE DAVIET DE FONCENEX ET SUR LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES. — Brochure in-4°, 42 pages et une planche de figures. (Extrait des *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin*. Série II, t. XXIX; 1877.)

Daviet de Foncenex avait cherché (*Mélanges de la Société Royale de Turin*, t. II) à établir *a priori* la loi de composition des forces concourantes, et aussi, peut-être aidé par Lagrange, celle de la composition des forces parallèles; il arrivait à une équation telle que

$$[f(x)]^2 = 2 + f(2x),$$

d'où il concluait

$$f(x) = \text{const.} = 2.$$

Laplace et d'Alembert ont signalé la fausseté de cette conclusion; mais on peut démontrer que $f(x)$ peut se représenter par la forme $2\cos hx$, h étant une constante réelle ou imaginaire, et de plus, en s'appuyant sur la loi de composition des forces concourantes, que, si α et β sont deux angles d'un triangle rectangle, x le côté opposé à l'angle β, on a

$$\cos\beta = \cos hx \sin\alpha.$$

Ces résultats sont indépendants de la théorie euclidienne des parallèles; si maintenant on suppose successivement, r étant réel,

$$h = 0, \quad h = \frac{\sqrt{-1}}{r}, \quad h = \frac{1}{r},$$

on a une formule qui suffit pour rétablir respectivement les Géométries euclidienne, hyperbolique, elliptique.

Donc, conclut M. Genocchi, le postulatum d'Archimède pour le levier peut tenir lieu du postulatum d'Euclide.

Il nous est difficile d'admettre la rigueur de cette conclusion, et, quelque intéressant que soit le rapport signalé, les deux postulata peuvent rester parfaitement distincts; la démonstration *a priori* de la loi de composition des forces concourantes repose en effet sur le *principe d'homogénéité*, et ce principe suffit d'autre part pour démontrer, dans les mêmes conditions, le postulatum d'Euclide.

Que Daviet de Foncenex l'ait appliqué avant Legendre à des propositions de Géométrie ou de Mécanique, ces applications n'en paraissent pas moins, quoi qu'en dise M. Genocchi, en butte à la même objection fondamentale.

Nous ne pouvons guère accepter davantage que réciproquement, la théorie des parallèles étant admise, le principe d'Archimède ait été démontré *en toute rigueur*. Fermat, qui l'a nié, ne serait pas sans doute embarrassé aujourd'hui pour constituer une statique non archimédienne.

M. Genocchi n'est, au reste, nullement partisan des nouvelles géométries; il consacre à leur critique la seconde Partie de son Mémoire et un appendice de 15 pages *Sur l'existence de la pseudosphère et sur l'impossibilité de démontrer le postulatum d'Euclide*. Cet appendice est rempli, en grande partie, par une polémique contre les démonstrations de cette impossibilité données par M. Hoüel [1] et M. De Tilly [2]. Toutefois, M. Genocchi avoue qu'il serait assez disposé à l'admettre, comme résultant des travaux de M. Flye Sainte-Marie [3].

Le principal argument développé dans cette polémique consiste dans l'impossibilité où l'on a été jusqu'à présent de démontrer l'existence d'une surface à courbure constante, négative, continue, indéfinie et simplement connexe, surface que M. Genocchi nommerait *pseudosphère*. Il est certain que les surfaces de révolution à courbure constante négative (surfaces *pseudosphériques* de Beltrami) ne satisfont pas à cette définition, et qu'elles ont seulement avec cette surface, jusqu'à présent seulement idéale, de la *pseu-*

---

[1] *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. VIII.

[2] *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXX et XXXVI.

[3] *Études analytiques sur la théorie des parallèles*. Paris, 1871.

dosphère, une analogie comme celle, par exemple, du cône au plan [1]. Existe-t-il une telle surface parmi celles qui ne sont pas de révolution ? Cela est très-douteux, mais l'impossibilité n'en est pas démontrée non plus.

La question est de savoir si l'emploi d'une pareille notion, supposée même purement idéale, fausse les raisonnements de MM. Hoüel et De Tilly. Pour notre part, nous ne le pensons pas; mais celui qui pose cette objection, alors qu'il finit par convenir de la conclusion, s'expose peut-être au reproche qu'il adresse à d'autres, celui de soulever des discussions byzantines.

Malgré ces critiques, nous nous plaisons à reconnaître que le Mémoire de M. Genocchi mérite d'être lu, surtout par les adversaires de ses opinions. Peut-être trouveront-ils les leurs parfois exagérées et partant plus facilement combattues; mais c'est un danger auquel tout novateur doit s'habituer; c'est aussi une sauvegarde contre les exagérations auxquelles il pourrait se laisser entraîner de lui-même, en l'absence de toute contradiction.

P. T.

PAOLIS (R. de). — Le Trasformazioni piane doppie [2].

L'auteur marche dans une voie tracée par Clebsch [*Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen* (*Math. Ann.,* t. III)].

Étant donnés deux plans P, P′, supposons qu'à un point p de P correspondent deux points p', p'_1 de P′, le seul point p correspondant d'ailleurs sur P à ces deux points; supposons en outre que, lorsque p décrit une droite, les deux points p', p'_1 décrivent sur P′ une même courbe d'ordre n : le plan P sera dit *double* et le

---

(1) Nous ferons cependant remarquer que, si l'on suppose la surface d'un cône composée, comme les surfaces de Riemann, d'un nombre indéfini de nappes enroulées, toute figure tracée sur le plan pourra être appliquée sur le cône, et réciproquement, de sorte que la Géométrie du plan peut être regardée comme identique avec celle du cône. Pourquoi n'en serait-il pas de même pour la pseudosphère et la surface de révolution engendrée par la tractoire? (J. H.)

(2) *Atti della R. Accademia dei Lincei* (1876-77). Roma, 1877; 36 p.

plan P′ *simple;* on a ainsi la transformation plane double étudiée par M. de Paolis.

Entre les deux points *conjoints* p', p'_1 existe une transformation rationnelle involutive : cette même transformation relie ensemble les deux courbes conjointes C′, C'_1 qui, sur le plan simple, correspondent à la courbe C du plan double ; à une courbe du plan double peut d'ailleurs correspondre, sur le plan simple, une courbe conjointe à elle-même ; deux courbes conjointes et une courbe correspondante du plan double sont de même *genre;* les courbes conjointes à elles-mêmes et correspondantes aux courbes rationnelles du plan double sont hyperelliptiques.

En général, il existe sur le plan double une *courbe limite,* lieu des points qui admettent, comme points correspondants sur le plan simple, deux points infiniment voisins ; le lieu correspondant sur le plan simple, lieu formé de points conjoints infiniment voisins, est la *courbe double.* La courbe limite et la courbe sont de même genre. Outre la courbe double, il peut exister sur le plan simple des *points doubles,* auxquels correspondent des *points limites* sur le plan double.

A l'ensemble des droites du point double correspond un réseau de courbes hyperelliptiques d'ordre n ; toutes ces courbes passent par les *points fondamentaux* du plan simple ; deux d'entre elles se coupent en outre en deux points conjoints.

On aperçoit là un champ étendu de recherches qui concerneront, en particulier, les singularités des courbes correspondantes des deux plans.

Le travail de M. de Paolis est divisé en trois Parties : la première comprend les propriétés générales de la transformation d'ordre n et de genre p ; dans la deuxième, l'auteur traite spécialement des cas où p est égal à zéro et à 1 ; enfin, dans la troisième, il étudie quelques cas particuliers où l'ordre et le genre ont des valeurs données.

BIANCHI (L.). — SULLE SUPERFICIE APPLICABILI. (Estratto della dissertazione di laurea dell' autore.) — In-8°, 58 pages. Pise, 1878.

Ce travail compend cinq Parties. Dans la première, l'auteur donne divers théorèmes relatifs à des surfaces applicables se déduisant simplement de deux courbes gauches; par exemple, c, c' étant deux telles courbes, si l'on considère pour chacune d'elles la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur la courbe, fait avec elle un angle constant θ et reste perpendiculaire à la normale principale, les deux surfaces seront applicables l'une sur l'autre lorsque la relation

$$\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta}{T} = \frac{\cos\theta}{R'} + \frac{\sin\theta}{T'}$$

sera satisfaite, R, T, R', T' désignant les rayons de courbure et de torsion des deux courbes. La seconde Partie concerne les surfaces de révolution; M. Bianchi démontre que, si pour une surface l'élément linéaire est donné par l'égalité

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

où E, F, G ne dépendent que d'une seule des variables u, v, cette surface est applicable sur une surface de révolution, les lignes qui correspondent à la variable qui entre dans E, F, G devenant les parallèles de la surface de révolution. Dans la troisième et dans la quatrième Partie, il s'occupe de la déformation de diverses surfaces hélicoïdes, et de diverses surfaces moulures (ayant un système de lignes de courbures situées dans des plans parallèles). Enfin la cinquième Partie est consacrée au problème suivant : « Est-il possible de déformer une surface donnée de façon qu'un système de lignes tracées sur cette surface devienne un système de lignes de courbures de la surface déformée? » M. Bianchi traite, après M. Dini, le cas où le système de lignes données est le système de génératrices d'une surface gauche; il résout encore le problème posé dans le cas où la surface donnée est de révolution, et où les lignes données admettent pour trajectoires sous un angle constant les parallèles de la surface. Citons encore ce théorème : « La surface de révolution admettant

comme courbe méridienne la courbe engendrée par le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole roulant sans glisser sur l'axe de la surface peut être déformée d'une infinité de façons, de manière à conserver la même courbure moyenne, et chaque système de trajectoires sous un angle constant des méridiens devient une fois un système de lignes de courbure de la surface déformée ».

BERTINI (E.). — RICERCHE SULLE TRASFORMAZIONI UNIVOCHE INVOLUTORIE NEL PIANO ([1]).

Les recherches de M. Bertini se rapportent au problème suivant : Trouver toutes les transformations involutives dans le plan qui sont irréductibles entre elles, c'est-à-dire qui ne peuvent point se déduire l'une de l'autre par une série de transformations quadratiques, ou, ce qui revient au même, par une transformation univoque. L'auteur admet que les points fondamentaux de la transformation puissent occuper des positions spéciales et devenir infiniment voisins, mais on ne doit point faire de suppositions analogues sur les courbes fondamentales.

M. Bertini étudie d'abord la réduction, par des transformations quadratiques, de certains systèmes linéaires à d'autres, d'ordre moindre ; puis il montre que toute courbe fondamentale L_i qui passe α_{ii} fois par le point fondamental auquel elle correspond donne naissance à un système (L) de courbes correspondantes à elles-mêmes ou se correspondant entre elles et que, dans toute transformation involutive, il existe au moins un tel système ; examinant ensuite les cas où $\alpha_{ii} = 1, 2, 3$, il prouve que, pour ces cas, les transformations involutives sont toujours réductibles aux quatre suivantes, irréductibles entre elles :

(*a*) Homologie harmonique.

(*b*) Transformations involutives (de Jonquières) d'ordre $p+2$ avec $2p+2$ points simples fondamentaux distincts, présentant

---

([1]) *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. VIII, p. 244-280. (Voir *Bulletin*, II_2, 10.)

une courbe dont tous les points coïncident avec leurs correspondants, d'ordre $p+2$, de genre $p>0$, ayant un point p^{uple} au point $p+2^{\text{uple}}$ de la transformation.

(*c*) Transformation involutive du huitième ordre avec sept points triples, présentant une courbe dont tous les points coïncident avec leurs correspondants du sixième ordre et pour laquelle les sept points sont doubles.

(*d*) Transformation involutive du dix-septième ordre avec huit points sextuples, présentant une courbe dont tous les points coïncident avec leurs correspondants du neuvième ordre, et pour laquelle les huit points sont triples.

Toutes les transformations involutives de Jonquières se ramènent aux cas (*a*), (*b*). Le cas (*c*) a été considéré par Geiser [*Ueber zwei geometrische Probleme* (*Journal de Crelle*, t. 67, p. 78)]. Il obtenait cette transformation au moyen d'un réseau de courbes du troisième ordre passant par les sept points fondamentaux : toutes celles de ces courbes qui passent par un point du plan ont un neuvième point commun, que l'on peut faire correspondre au précédent. Le cas (*d*) est nouveau; il résulte d'une propriété remarquable du système linéaire triplement infini de courbes du sixième ordre, de genre 2, qui ont en commun six points doubles : toutes celles de ces courbes (formant un réseau) qui passent par un point du plan ont en commun un autre point.

A ces quatre cas se ramènent beaucoup d'autres transformations involutives; M. Bertini estime même que toutes peuvent s'y ramener, mais il n'est point parvenu à le démontrer rigoureusement.

HARETU (Spiru). — Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires. — Paris, Gauthier-Villars, 1878, 49 pages.

La recherche des inégalités séculaires des éléments des orbites des planètes est, comme on sait, un des problèmes les plus importants de l'Astronomie. Laplace a démontré le premier, en 1773, que, si l'on néglige les quantités du second ordre par rapport aux masses, et les quantités du troisième ordre par rapport aux excentricités et

aux inclinaisons, les grands axes de ces orbites n'ont pas d'inégalités séculaires. Lagrange démontra le même théorème pour le cas où l'on conserve toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons, et Poisson établit qu'il subsiste encore quand on détermine les inégalités du second ordre par rapport aux masses. La démonstration de Poisson fut simplifiée par divers géomètres.

On sait que des formules très-simples A permettent d'exprimer les dérivées des éléments par rapport au temps en fonction des éléments eux-mêmes, et des dérivées de la fonction perturbatrice par rapport à ces éléments. La fonction perturbatrice elle-même et ses dérivées doivent être développées en séries, dont les termes sont des sinus ou des cosinus de fonctions linéaires des longitudes moyennes des divers corps célestes considérés. Si dans les seconds membres des équations A on attribue aux éléments des valeurs constantes, l'intégration devient immédiate; on obtient pour les nouveaux éléments des constantes augmentées de séries procédant suivant les sinus et les cosinus dont nous venons de parler. C'est la deuxième approximation.

Si l'on remplace dans les seconds membres des formules A les éléments par ces nouvelles valeurs, et ensuite les produits de sinus et de cosinus par des sommes, une nouvelle intégration pourra être effectuée : on aura la troisième approximation, et ainsi de suite. Il faut remarquer que dans chacune de ces approximations on doit substituer non-seulement les valeurs obtenues pour les éléments de l'orbite de la planète troublée, mais aussi celle des éléments de toutes les planètes perturbatrices.

Si le résultat de l'une de ces substitutions contient un terme constant, l'intégration donnera un terme proportionnel au temps, c'est-à-dire une inégalité séculaire.

Pour reconnaître que le grand axe de l'orbite n'est pas affecté d'inégalités séculaires, il faut donc examiner dans chaque approximation tous les termes que l'on obtient quand dans les seconds membres des formules A on introduit les valeurs des éléments fournies par l'approximation précédente. Dans la démonstration de Poisson, l'examen des termes qui proviennent de la variation des éléments de la planète troublée est relativement facile; celui des termes provenant de la variation des éléments de la planète perturbatrice est, au contraire, très-compliqué, et cela résulte de

ce que la fonction perturbatrice n'est pas la même pour les différentes planètes du système.

Dans son Mémoire sur l'élimination des nœuds, Jacobi a indiqué une transformation qui consiste à chercher le mouvement d'une des planètes autour du Soleil, celui d'une deuxième planète autour du centre de gravité du Soleil et de la première, celui d'une troisième autour du centre de gravité du Soleil et des deux premières, etc. Dans ces conditions, la fonction perturbatrice est la même pour toutes les planètes; seulement, au lieu d'être linéaire par rapport aux masses, elle en renferme toutes les puissances.

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, 21 février 1876, M. Tisserand prit cette transformation comme point de départ et en tira une démonstration très-simple de l'invariabilité des grands axes, tant que l'on ne conserve que les deuxièmes puissances des masses.

M. Haretu, dans un intéressant Mémoire, présenté comme thèse à la Faculté des Sciences de Paris, étend cette démonstration aux troisièmes puissances des masses. Poisson avait déjà essayé cette extension; mais il n'avait considéré que les termes provenant de la variation des éléments de la planète troublée. La substitution de Jacobi, utilisée par M. Haretu, le dispense en quelque sorte de distinguer la planète troublée de la planète perturbatrice; en suivant la marche indiquée par Poisson, il a donc pu faire une étude complète de la question.

Quand on s'en tient aux deuxièmes puissances des masses, on ne trouve pas d'inégalités séculaires, mais le temps apparaît hors des signes sinus et cosinus : on obtient des termes de la forme

$$A t \,{}^{\sin}_{\cos}(gt + h).$$

Ces termes donnent naissance à des inégalités séculaires du troisième ordre.

Le sujet, qui avait été étudié déjà par M. E. Mathieu dans le *Journal de Crelle* par une voie bien différente, n'est évidemment pas épuisé. Cette démonstration ne peut suffire pour décider si les grands axes des orbites doivent dans la suite des siècles s'écarter notablement de leurs valeurs actuelles. Rien ne prouve que les termes proportionnels au temps ainsi obtenus ne proviennent pas du développement de fonctions périodiques, développement qui serait dû à

l'application même de la méthode; on sait que des inégalités séculaires se présenteraient dès la deuxième approximation sans une précaution particulière destinée à faire disparaître le temps en dehors des signes sinus et cosinus. B. B.

MÉLANGES.

SUR LES POINTS D'INFLEXION DES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. ELLIOT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

1. Les coordonnées des points d'inflexion d'une courbe algébrique de degré m satisfont à une équation de degré $3(m-2)$ qu'on obtient en égalant à zéro le hessien de la courbe. Mais les coordonnées des point multiples vérifient aussi cette équation. On sait par les recherches de Plücker que la présence d'un point double diminue le nombre des points d'inflexion de six unités, et celle d'un point de rebroussement de première espèce de huit unités. Je me propose d'indiquer, dans ce qui suit, comment on peut trouver le nombre des points d'inflexion d'une courbe algébrique qui possède des singularités de nature quelconque. Je définis un point singulier par le polygone qui, d'après la méthode de M. Puiseux, fournit les termes du degré le moins élevé, ou, ce qui revient au même, par le nombre et le degré des racines infiniment petites qui se rapportent à ce point quand on y a transporté l'origine des coordonnées.

M. Brill a entrepris tout récemment [1] une recherche analogue fondée sur le système des notations symboliques. Il est arrivé, relativement à la multiplicité du hessien en un point multiple ordinaire de la courbe donnée, à un théorème qui est une conséquence facile de la méthode que j'ai adoptée.

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. XIII, p. 175-182; 1878.

I.

2. L'introduction du déterminant de Hesse, pour la recherche des points d'inflexion, se fait très-simplement par la méthode suivante, dont j'ai pris le principe dans l'Ouvrage de Clebsch (1).

Soit

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

l'équation de la courbe donnée de degré m. Si l'on appelle x_1, y_1, x, y les coordonnées de deux points M_1, M, celles d'un point quelconque de la droite qui les joint pourront être représentées par les expressions

$$\frac{x_1+\lambda x}{\lambda+1}, \quad \frac{y_1+\lambda y}{\lambda+1},$$

λ étant le rapport des distances du point dont il s'agit aux deux points M_1, M. L'équation

$$f\left(\frac{x_1+\lambda x}{\lambda+1}, \frac{y_1+\lambda y}{\lambda+1}\right)=0$$

déterminera les rapports des distances aux points M_1 et M des m points d'intersection de la courbe (1) avec la droite M_1M. Rendons homogène l'équation de la courbe, et posons

$$z^m f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=f(x,y,z);$$

l'équation qui donne λ deviendra, en adoptant des coordonnées homogènes,

$$f(x_1+\lambda x, y_1+\lambda y, z_1+\lambda z)=0,$$

ou, en développant la formule de Taylor,

$$\left\{\begin{aligned} & f(x_1,y_1,z_1)+\lambda\left(x\frac{df}{dx_1}+y\frac{df}{dy_1}+z\frac{df}{dz_1}\right)\\ & \quad+\frac{\lambda^2}{1.2}\left(x^2\frac{d^2f}{dx_1^2}+2xy\frac{d^2f}{dx_1\,dy_1}+y^2\frac{d^2f}{dy_1^2}\right.\\ & \qquad\left.+2xz\frac{d^2f}{dx_1\,dz_1}+2yz\frac{d^2f}{dy_1\,dz_1}+z^2\frac{d^2f}{dz_1^2}\right)+\ldots=0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

(1) *Vorlesungen über Geometrie*, p. 311.

Supposons que M_1 appartienne à la courbe : si l'on veut que la droite MM_1 rencontre la courbe en deux points confondus avec M_1, l'équation précédente devra avoir deux racines nulles, ce qui assujettit le point M à être sur la tangente en M_1. Supposons maintenant que M_1 soit un point d'inflexion ; si l'on prend le point M sur la tangente d'inflexion, la droite MM_1 devra rencontrer la courbe en trois points coïncidant avec M_1, et l'équation (2) aura une racine triple nulle. On aura donc

$$(3) \qquad f(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$(4) \qquad \varphi = x\frac{df}{dx_1} + y\frac{df}{dy_1} + z\frac{df}{dz_1} = 0,$$

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \psi = x^2\frac{d^2f}{dx_1^2} &+ 2xy\frac{d^2f}{dx_1\,dy_1} \\ &+ y^2\frac{d^2f}{dy_1^2} + 2xz\frac{d^2f}{dx_1\,dz_1} + 2yz\frac{d^2f}{dy_1\,dz_1} + z^2\frac{d^2f}{dz_1^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation $\psi = 0$ représente une conique qui contiendra tous les points de la droite $\varphi = 0$. La fonction ψ sera donc décomposable en deux facteurs linéaires, et par suite son discriminant sera nul. Les coordonnées des points d'inflexion annuleront donc le hessien

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2f}{dx^2} & \dfrac{d^2f}{dx\,dy} & \dfrac{d^2f}{dx\,dz} \\ \dfrac{d^2f}{dy\,dx} & \dfrac{d^2f}{dy^2} & \dfrac{d^2f}{dy\,dz} \\ \dfrac{d^2f}{dz\,dx} & \dfrac{d^2f}{dz\,dy} & \dfrac{d^2f}{dz^2} \end{vmatrix}.$$

3. Réciproquement, il faut montrer qu'un point M_1, dont les coordonnées satisfont à l'équation (1) et annulent le hessien, est un point d'inflexion ou un point multiple. Remarquons d'abord que la fonction ψ peut être représentée par

$$(6) \qquad x\frac{d\varphi}{dx_1} + y\frac{d\varphi}{dy_1} + z\frac{d\varphi}{dz_1},$$

et que l'expression

$$(7) \qquad x_1\frac{d\psi}{dx} + y_1\frac{d\psi}{dy} + z_1\frac{d\psi}{dz}$$

reproduira φ à un facteur constant près.

La première propriété est évidente. La seconde se vérifie en développant l'expression (7)

$$2x_1\left(x\frac{d^2f}{dx_1^2}+y\frac{d^2f}{dx_1dy_1}+z\frac{d^2f}{dx_1dz_1}\right),$$
$$+2y_1\left(x\frac{d^2f}{dy_1dx_1}+y\frac{d^2f}{dy_1^2}+z\frac{d^2f}{dy_1dz_1}\right),$$
$$+2z_1\left(x\frac{d^2f}{dz_1dx_1}+y\frac{d^2f}{dz_1dy_1}+z\frac{d^2f}{dz_1^2}\right).$$

Si l'on ordonne par rapport à x, y, z, en appliquant le théorème des fonctions homogènes, on trouve

$$(8)\qquad x_1\frac{d\psi}{dx}+y_1\frac{d\psi}{dy}+z_1\frac{d\psi}{dz}=2(m-1)\varphi.$$

Revenons à notre hypothèse. Puisque le hessien est nul pour les coordonnées du point M_1, la conique $\psi=0$ se décompose en deux droites. Ce système de droites contient le point M_1; car la condition (3) peut s'écrire, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$x_1^2\frac{d^2f}{dx_1^2}+2x_1y_1\frac{d^2f}{dx_1dy_2}+\ldots+z_1^2\frac{d^2f}{dz_1^2}=0.$$

Appelons P et P′ les deux facteurs de ψ, en sorte que

$$\psi=P\times P'=(Ax+By+C)(A'x+B'y+C').$$

La fonction représentée par l'expression (7) sera

$$x_1(AP'+A'P)+y_1(BP'+B'P)+z_1(CP'+C'P)$$

ou bien

$$P'(Ax_1+By_1+Cz_1)+P(A'x_1+B'y_1+C'z_1).$$

Or l'un des coefficients de P ou de P′ est nul; la fonction (7), qui, d'après l'équation (8), est égale à $2(m-1)\varphi$, ne diffère donc que par un facteur constant de l'une des fonctions P ou P′. De là résulte que, si l'on prend le point M sur la tangente à la courbe au point M_1, l'équation (2) aura une racine triple égale à zéro, et le point M_1 sera un point d'inflexion.

4. Notre raisonnement serait en défaut si le point x_1y_1 appar-

tenait à la fois aux deux droites $P = 0$, $P' = 0$. La fonction (7) serait alors identiquement nulle; il en serait de même de la fonction φ, c'est-à-dire que l'on aurait

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dy_1} = 0, \quad \frac{df}{dz_1} = 0,$$

et le point M_1 serait un point multiple.

Il peut arriver aussi que la fonction ψ soit nulle identiquement. Le théorème des fonctions homogènes montre alors que les trois premières dérivées sont encore nulles. Les points de la courbe dont les coordonnées vérifient l'équation $H = 0$ sont donc bien des points d'inflexion ou des points multiples.

II.

5. Supposons qu'on élimine y entre les deux équations

(1) $$f(x, y) = 0,$$

(2) $$H(x, y) = 0;$$

le résultant sera un polynôme en x, dont les racines seront les abscisses des points d'inflexion et celles des points multiples. Pour évaluer le degré de multiplicité de ces dernières, remarquons que, si l'on appelle $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les m valeurs de y qui satisfont à l'équation (1), le résultant pourra se mettre sous la forme

(3) $$H(x, y_1)\, H(x, y_2) \ldots H(x, y_m).$$

Soient a et b les coordonnées d'un point multiple, et posons $x = a + x'$, $y = b + y'$. Le résultant conservera une forme analogue; pour simplifier, nous garderons la forme (3), ce qui revient à supposer que le point multiple à étudier coïncide avec l'origine des coordonnées.

La question est de trouver à quel degré x entre comme facteur dans le premier membre de l'équation résultante, ou bien dans l'expression (3). Pour cela on considérera les racines infiniment petites, dont on sait calculer le développement en série, limité à un ou plusieurs termes, d'après la méthode de M. Puiseux; chacune de ces racines rend infiniment petit le facteur qui lui correspond dans l'expression (3). Nous allons voir comment on peut

évaluer le degré de ces différents facteurs, en sorte que, faisant la somme des degrés fournis par les racines infiniment petites, on aura le degré de x dans le résultant pour le point singulier étudié. Il est clair que, s'il n'y a pas d'autre point singulier sur l'axe Oy que l'origine, et s'il n'y a pas non plus de point d'inflexion, le calcul relatif à l'origine donnera le degré du facteur x dans le résultant; sinon, le degré de ce facteur sera la somme des degrés répondant aux différents points multiples ou d'inflexion que contient l'axe Oy.

6. Il est inutile, pour le calcul actuel, de substituer au hessien, tel qu'il a été trouvé, une autre forme ne contenant plus de dérivées par rapport à z. Multiplions par x, y, 1 les éléments de la première, de la deuxième et de la troisième colonne du hessien, et transformons la somme de ces produits au moyen du théorème des fonctions homogènes. On aura trois termes

$$(m-1)\frac{df}{dx},\quad (m-1)\frac{df}{dy},\quad (m-1)\frac{df}{dz},$$

qu'on pourra mettre à la place des éléments de la dernière colonne. Le hessien H deviendra

$$(m-1)\begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dx\,dy} & \frac{df}{dx} \\ \frac{d^2f}{dy\,dx} & \frac{d^2f}{dy^2} & \frac{df}{dy} \\ \frac{d^2f}{dz\,dx} & \frac{d^2f}{dz\,dy} & \frac{df}{dz} \end{vmatrix}.$$

Remplaçons de la même façon les éléments de la dernière ligne par ceux qu'on obtient en multipliant par x, y, 1 les éléments des trois lignes, et en faisant la somme, on aura

$$(m-1)^2\begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dy\,dx} & \frac{df}{dx} \\ \frac{d^2f}{dy\,dx} & \frac{d^2f}{dy^2} & \frac{df}{dy} \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & 0 \end{vmatrix}$$

ou bien

$$(4)\qquad -(m-1)^2\left[\left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2}-2\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dx\,dy}+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2f}{dy^2}\right].$$

7. Considérons une racine infiniment petite d'ordre μ entier ou fractionnaire. On pourra la représenter par $y = \mathrm{V}x^\mu$, V étant une fonction algébrique de x qui ne s'annule pas avec x. Adoptons le mode de représentation géométrique de M. Puiseux, c'est-à-dire, dans un terme $\mathrm{A}y^\alpha x^\beta$ de $f(x,y)$, regardons α comme une abscisse, β comme une coordonnée. On fait ainsi correspondre à chaque terme un point, et l'on sait que, si l'on regarde y comme un infiniment petit de l'ordre μ, les termes du moindre degré répondront à des points situés sur une même ligne droite G. Il résulte de notre représentation géométrique que, si l'on prend la dérivée de $f(x,y)$ par rapport à x ou à y, les termes du plus petit degré de cette dérivée, quand y est considéré comme de l'ordre μ, répondront à des points situés sur une ligne droite, et cette ligne droite sera la droite G qu'on aura reculée d'une unité dans la direction $\mathrm{O}\beta$ ou $\mathrm{O}\alpha$. La même remarque s'appliquera s'il s'agit des dérivées secondes de la fonction $f(x,y)$; car il suffira d'opérer un nouveau déplacement d'une unité vers les α ou les β négatifs.

Si, maintenant, nous remarquons que la forme (4) du hessien ne contient que des dérivées d'ordre un ou deux de la fonction $f(x,y)$, on voit que, pour avoir les termes du plus petit degré dans le hessien, il suffit de faire la substitution $y = \mathrm{V}x^\mu$ dans les termes des différentes dérivées qui proviennent des termes de $f(x,y)$ répondant à la droite G. Il est d'ailleurs évident qu'on pourra substituer pour y sa valeur approchée νx^μ, quand on aura pris les dérivées. La seule réserve à faire est que le coefficient de la plus petite puissance de x que l'on calcule ainsi soit différent de zéro.

8. Faisons la substitution $y = \nu x^\mu$, où ν est la valeur approchée de la fonction V. Si l'on désigne par k le plus petit exposant de x, dans les termes de $f(x,y)$ après la substitution, on aura

$$(5)\qquad f(x,y) = x^k\varphi(\nu) + \ldots.$$

Si nous voulons avoir les termes du plus petit degré des dérivées $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, ..., il suffira de tenir compte du premier terme, qui a été

seul écrit dans le second membre de l'équation précédente. Or les règles élémentaires des dérivées donneront

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= x^{k-1}\left(k\varphi - \mu v\frac{d\varphi}{dv}\right) + \ldots,\\
\frac{df}{dy} &= x^{k-\mu}\frac{d\varphi}{dv} + \ldots,\\
\frac{d^2f}{dx^2} &= x^{k-2}\left[k(k-1)\varphi + \mu v(1+\mu-2k)\frac{d\varphi}{dv} + \mu^2v^2\frac{d^2\varphi}{dv^2}\right] + \ldots,\\
\frac{d^2f}{dx\,dy} &= x^{k-\mu-1}\left[(k-\mu)\frac{d\varphi}{dv} - \mu v\frac{d^2\varphi}{dv^2}\right] + \ldots,\\
\frac{d^2f}{dy^2} &= x^{k-2\mu}\frac{d^2\varphi}{dv^2} + \ldots.
\end{aligned}\right.$$

On n'a écrit dans les seconds membres de ces formules que les termes du degré le moins élevé, et désigné simplement par φ la fonction $\varphi(v)$. Si l'on forme maintenant la quantité

$$\left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2} - 2\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dx\,dy} + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2f}{dy^2},$$

on trouve immédiatement que les termes provenant de ceux qui ont été écrits dans les formules (6) ont le même degré $3k - 2\mu - 2$, et que le coefficient en $x^{3k-2\mu-2}$ est

$$(7)\qquad k^2\varphi^2\frac{d^2\varphi}{dv^2} - k(1-2\mu+k)\varphi\frac{d\varphi^2}{dv^2} + \mu(1-\mu)v\frac{d\varphi^3}{dv^3}.$$

Si l'on regarde v comme le coefficient de x^μ dans la valeur approchée de la racine, on aura $\varphi(v) = 0$, et le coefficient se réduira à

$$\mu(1-\mu)v\frac{d\varphi^3}{dv^3}.$$

D'après la nature de la question, μ et v sont différents de zéro; notre coefficient ne pourra être nul que dans deux cas :

1° $\mu = 1$. La racine considérée est du premier degré, ou a pour valeur approchée $y = vx$.

2° $\frac{d\varphi}{dv} = 0$, c'est-à-dire que l'équation $\varphi(v) = 0$ a des racines multiples.

En écartant ces deux exceptions, on voit donc qu'il faudra cher-

cher le degré μ de chaque racine infiniment petite, le degré k de sa substitution dans $f(x, y)$, qui n'est autre que l'ordonnée à l'origine de la ligne G, et multiplier le nombre $3k - 2\mu - 2$ par le nombre des racines infiniment petites du degré μ, enfin répéter le même calcul pour les racines infiniment petites des différents degrés. Faisons l'application à quelques exemples.

9. Étudions l'influence d'un point de rebroussement de première espèce, en prenant l'axe des x parallèle à la tangente de rebroussement. En transportant l'origine en ce point, l'équation de la courbe sera

$$y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + \ldots = 0.$$

Les termes du plus petit degré sont évidemment $y^2 + ax^3$. On a deux racines infiniment petites de degré $\mu = \frac{3}{2}$; k est égal à 3, et $3k - 2\mu - 2$ a pour valeur 4. Puisqu'il y a deux racines infiniment petites, le degré total sera 8; cela s'accorde bien avec le résultat connu.

10. Considérons un point de rebroussement de deuxième espèce ayant pour tangente Ox. L'équation de la courbe aura la forme

$$y^2 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + dx^4 + \ldots = 0;$$

le terme en x^3 manque, d'après la définition de ce point. On voit très-facilement que le polygone élémentaire se réduit à une seule ligne droite répondant aux termes

$$y^2 + ax^2y + dx^4.$$

Il y a deux racines de degré $\mu = 2$; la quantité k est égale à 4, et $3k - 2\mu - 2$ a pour valeur 6. Le coefficient de x^4, quand on pose $y = vx^2$, étant $v^2 + av + d$, il faut supposer, d'après ce qui a été dit plus haut, que ce trinôme n'est pas un carré parfait. La diminution apportée par un tel point sera donc de 12 unités.

11. Considérons un point tel que les termes du plus petit degré, quand y est infiniment plus petit, se réduisent à $y^p - ax^q$. Il y aura p racines d'ordre $\mu = \frac{q}{p}$. Le nombre k sera égal à q. La quan-

tité $3k - 2\mu - 2$ aura pour valeur $3q - 2\frac{q}{p} - 2$, et, comme il y a p racines infiniment petites, la diminution sera $3pq - 2p - 2q$.

Supposons en particulier $p = 1$. On aura un point simple; mais la tangente, qui est Ox, aura avec la courbe un contact d'ordre $q - 1$, puisque le plus petit exposant de x dans l'équation donnée est q. Un pareil point compte donc pour $3q - 2 - 2q$ ou pour $q - 2$ points d'inflexion ordinaires.

III.

12. Il nous reste à examiner les deux cas d'exception où le coefficient de la plus petite puissance de x dans le hessien, après la substitution, est égal à zéro. Nous effectuerons, pour cela, dans la fonction $f(x, y)$ une transformation qui sera comprise dans la suivante, en appelant ψ et φ deux polynômes quelconques,

$$x = \psi(x'), \quad y = \varphi(x') + y'. \tag{1}$$

On aura, par cette transformation,

$$f(x, y) = \mathrm{F}(x', y'), \tag{2}$$

et les deux hessiens H et H′ seront liés par une relation que nous allons chercher. On a

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\mathrm{F}}{dx'} = \frac{df}{dx}\frac{d\psi}{dx'} + \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx'},\\
&\frac{d\mathrm{F}}{dy'} = \frac{df}{dy},\\
&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2} = \frac{d^2f}{dx^2}\frac{d\psi^2}{dx'^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{d\varphi}{dx'}\frac{d\psi}{dx'} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{d\varphi^2}{dx'^2} + \frac{df}{dx}\frac{d^2\psi}{dx'^2} + \frac{df}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx'^2},\\
&\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'} = \frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{d\psi}{dx'} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{d\varphi}{dx'},\\
&\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'^2} = \frac{d^2f}{dy^2}.
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Calculons la quantité

$$\frac{-\mathrm{H}'}{(m'-1)^2} = \frac{d\mathrm{F}^2}{dy'^2}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'^2} - 2\frac{d\mathrm{F}}{dx'}\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx'\,dy'} + \frac{d\mathrm{F}^2}{dx'^2}\frac{d^2\mathrm{F}}{dy'^2},$$

où m' désigne le degré de la fonction $F(x', y')$; on trouvera immédiatement

$$(4) \qquad \frac{H'}{(m'-1)^2} = \frac{H}{(m-1)^2}\frac{d\psi^2}{dx'^2} - \frac{df^2}{dy^2}\left(\frac{df}{dx}\frac{d^2\psi}{dx'^2} + \frac{df}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx'^2}\right).$$

Il est avantageux d'introduire, dans le second membre de l'équation (4), les dérivées $\frac{dF}{dx'}$, $\frac{dF}{dy'}$, au lieu de $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, ce qui se fera facilement au moyen des deux premières équations (3). On aura ainsi

$$\frac{H'}{(m'-1)^2} = \frac{H}{(m-1)^2}\frac{d\psi^2}{dx'^2} - \frac{dF^2}{dy'^2}\left(\frac{dF}{dx'}\frac{\frac{d^2\psi}{dx'^2}}{\frac{d\psi}{dx'}} - \frac{dF}{dy'}\frac{\frac{d\varphi}{dx'}\frac{d^2\psi}{dx'^2}}{\frac{d\psi}{dx'}} + \frac{dF}{dy'}\frac{d^2\varphi}{dx'^2}\right),$$

ou, enfin, en résolvant, par rapport à H,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{(m-1)}{(m-1)^2}\frac{H'}{\frac{d\psi^2}{dx'^2}} \\ &\quad + (m-1)^2\frac{\frac{dF^2}{dy'^2}}{\frac{d\psi^2}{dx'^2}}\left(\frac{dF}{dy'}\frac{\frac{d^2\psi}{dx'^2}}{\frac{d\psi}{dx'}} - \frac{dF}{dx'}\frac{\frac{d\varphi}{dx'}\frac{d^2\psi}{dx'^2}}{\frac{d\psi}{dx'}} + \frac{dF}{dy'}\frac{d^2\varphi}{dx'^2}\right). \end{aligned} \right.$$

13. Considérons une racine du premier degré, dont la valeur approchée est $y = \nu x$, et posons

$$x = x', \quad y - \nu x = y';$$

nous aurons un cas particulier de la transformation précédente, le polynôme $\psi(x')$ se réduisant à x', et le polynôme $\varphi(x')$ à $\nu x'$. La formule (5) se réduira ici à

$$H = H',$$

ce qui donne la propriété connue du hessien, d'être un covariant. Au lieu de substituer dans H la valeur plus approchée $y = \nu x + y'$, il suffira de substituer y' dans le hessien H'. Or y' est maintenant d'un degré supérieur à l'unité; le degré de la substitution sera donc, en désignant par μ' le degré de y', par k' le degré de la substitu-

tion dans la fonction $F(x, y') = f(x, y' + \nu x)$,

$$3k' - 2\mu' - 2,$$

en sorte qu'on n'aura nullement à calculer le hessien H'.

14. Considérons un point double ordinaire,

$$(y - ax)(y - bx) + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \ldots = 0,$$

où je supposerai que a et b sont distincts, et que la fonction homogène du troisième degré $\varphi_3(x, y)$ n'est divisible ni par $y - ax$ ni par $y - bx$. Il y a ici deux racines infiniment petites du premier ordre. Posons $y - ax = y'$, l'équation deviendra

$$y'[(a - b)x + y'] + \varphi_3(x,\ ax + y') + \ldots = 0.$$

Les termes qui répondront au polynôme élémentaire seront

$$y'^2 + (a - b)xy' + \varphi_3(1,\ a)x^3.$$

Le polynôme élémentaire se composera de deux côtés; le premier fournira, comme cela doit être, une racine du premier ordre, dont nous n'avons pas à nous occuper; le second côté fournira une racine de degré 2; le résultat de la substitution de cette racine dans le premier membre de l'équation sera de degré 3; la quantité $3k' - 2\mu' - 2$ aura donc pour valeur 3, et, puisqu'il y a deux racines infiniment petites, le degré total sera 6. Cela est bien d'accord avec la réduction indiquée par les formules de Plücker.

15. Considérons un point multiple d'ordre p, dont les tangentes sont distinctes. Quand on aura transporté l'origine en ce point, l'équation prendra la forme

$$(y - a_1x)(y - a_2x)\ldots(y - a_px) + \varphi_{p+1})(x, y) + \ldots = 0;$$

l'équation est ordonnée par rapport aux deux variables x et y. Nous supposons $a_1, a_2, \ldots, a_p$ différents, et nous admettons que la fonction homogène de degré $\mu + 1, \varphi_{p+1}(x, y)$ ne soit divisible par aucun des binômes $y - a_1x,\ y - a_2x,\ \ldots, y - a_px$. Posons $y - a_1x = y'$; l'équation deviendra

$$y'[y' + (a_1 - a_2)x][y' + (a_1 - a_3)x]\ldots$$
$$[y' + (a_1 - a_p)x] + \varphi_{p+1}(x, a_1x + y') + \ldots = 0.$$

Les termes qui répondront aux côtés du polygone élémentaire seront les termes en

$$y'^p, \quad y'^{p-1}x, \quad y'^{p-2}x^2, \quad \ldots, \quad y'x^{p-1}, \quad x^{p+1}.$$

Il n'y aura pas de terme en x^p, et le coefficient $\varphi_p(1, a_1)$ de x^{p+1} est différent de zéro, d'après l'hypothèse. Les p points répondant aux p premiers termes sont sur une même ligne droite, et fournissent des racines infiniment petites d'ordre 1, dont nous n'avons pas à nous occuper. Mais le second côté du polygone élémentaire répondant aux deux derniers termes fournit une racine d'ordre 2. Cette racine, substituée dans le premier membre de l'équation, donne le degré $k' = p + 1$. La quantité $3k' - 2\mu' - 2$ sera donc égale à $3p + 3 - 4 - 2 = 3(p - 1)$. Puisqu'il y a p racines, le degré total sera $3p(p - 1)$.

16. La même méthode s'applique encore, si l'origine est un point de rebroussement de première espèce, avec une tangente quelconque. L'équation aura la forme

$$(y - ax)^2 + \varphi_3(x, y) + \ldots = 0,$$

la fonction $\varphi_3(x, y)$ n'étant pas divisible par $y - ax$. Il y aura deux valeurs de $y' = y - ax$ de degré $\mu' = \frac{3}{2}$, et l'on aura $k' = 3$ La diminution sera donc $2(3k' - 2\mu' - 2) = 8$, comme dans le cas où la tangente était l'axe des x.

Une courbe du troisième degré a neuf points d'inflexion. On connait la propriété remarquable de ces points de se trouver trois à trois sur un système de douze lignes droites, qui est une conséquence immédiate de l'expression des coordonnées par les fonctions elliptiques. Si la courbe a un point double, il n'y aura plus que trois points d'inflexion, qui seront en ligne droite. Si la courbe a un point de rebroussement, il n'y aura plus qu'un seul point d'inflexion.

17. Il nous reste enfin à examiner le second cas d'exception, qui se présente quand l'équation $\varphi(v) = 0$ a des racines multiples d'ordre quelconque.

On sait, par la théorie des fonctions algébriques, que, si p désigne

le nombre des racines qui forment un système circulaire, et si l'on pose

$$(6) \qquad x = x'^p,$$

on aura

$$(7) \qquad y = a x'^\alpha + b x'^\beta + \ldots + l x'^\lambda + y',$$

où α, β, ..., λ sont des nombres entiers, qu'on peut supposer croissants, et où les p valeurs approchées de y' sont distinctes les unes des autres. Nous pouvons admettre, en outre, que α est différent de p; autrement, y serait en x du premier degré, et la substitution $y' = y - ax$ nous débarrasserait de ce cas. La transformation exprimée par les formules (6) et (7) est un cas particulier de celle qui a été examinée dans le nº 12. On aura ici

$$\psi(x') = x'^p, \quad \varphi(x') = a x'^\alpha + b x'^\beta + \ldots + l x'^\lambda.$$

Au lieu de substituer dans H la racine y, représentée par la formule (7), il est clair qu'ayant fait la substitution dans la fonction donnée, qui fournira l'identité

$$f(x, y) = \mathrm{F}(x', y'),$$

il suffira de substituer y' dans le second membre de l'identité (5) du nº 12, qui ne contient que des résultats relatifs à x' et y', ou, si l'on veut, à la fonction $\mathrm{F}(x', y')$. Cette identité deviendra, en remarquant que

$$\frac{d\psi}{dx'} = p x'^{p-1}, \quad \frac{d^2\psi}{dx'^2} = p(\mu - 1) x'^{p-2},$$

$$(8) \quad \begin{cases} \mathrm{H} = \dfrac{(m-1)^2}{(m'-1)^2} \dfrac{\mathrm{H}'}{p^2 x'^{2p-2}} \\ \quad + \dfrac{(m-1)^2 \dfrac{d\mathrm{F}^2}{dy'^2}}{p^2 x'^{2p-2}} \left(\dfrac{p-1}{x'} \dfrac{d\mathrm{F}}{dx'} - \dfrac{p-1}{x'} \dfrac{d\mathrm{F}}{dy'} \dfrac{d\varphi}{dx'} + \dfrac{df}{dy'} \dfrac{d^2\varphi}{dy'^2} \right). \end{cases}$$

Le second membre de la formule (8) se compose de quatre termes; nous allons faire voir que les deux premiers ont le même degré, ainsi que les deux derniers, mais qu'on peut négliger les premiers comme étant d'un ordre infinitésimal supérieur à celui des autres.

Désignons toujours par μ' le degré d'une racine y', et par k' le

degré en x' de la substitution de l'expression $y' = \nu' x'^{\mu'}$ dans $F(x', y')$. Les racines y' étant d'ordre différent de l'unité, et leurs valeurs approchées étant distinctes, le degré du hessien H' sera $3k' - 2\mu' - 2$, et celui du premier terme dans le second nombre de (8) sera $3k' - 2\mu' - 2p$.

Puisque F est du degré k' quand y' est de l'ordre μ', $\frac{dF}{dy'}$ sera de l'ordre $k' - \mu'$, et $\frac{dF}{dx'}$ de l'ordre $k' - 1$. Le degré du deuxième terme sera donc

$$2k' - 2\mu' + k' - 1 - 2p + 2 - 1 = 3k' - 2\mu' - 2p.$$

Le polynôme $\varphi(x')$ est du degré α. Le degré du troisième terme sera donc, comme celui du quatrième,

$$3k' - 3\mu' - 2p + \alpha.$$

Je dis que l'on a

$$3k' - 3\mu' - 2p + \alpha < 3k' - 2\mu' - 2p;$$

cela revient, en effet, à $\alpha < \mu'$, ce qui est évident par la définition de la formule (7).

18. Réunissons les deux derniers termes, afin de voir dans quel cas le coefficient pourrait être nul. On trouvera

$$\frac{(m-1)^2 \frac{df^3}{dy'^3}}{p^2 x'^{2p-2}} \left(\frac{d^2\varphi}{dx'^2} - \frac{p-1}{x'} \frac{d\varphi}{dx'} \right) = \frac{(m-1)^2 \frac{dF^3}{dy'^3}}{p^2 x'^{p-1}} \frac{d}{dx'} \left(\frac{\frac{d\varphi}{dx'}}{x'^{p-1}} \right).$$

Le coefficient de la plus petite puissance de x' dans l'expression $\frac{dF}{dy'}$ est différent de zéro, puisque les valeurs approchées de y' sont toutes distinctes. La fonction $\frac{\frac{d\varphi}{dx'}}{x'^{p-1}}$ a pour expression

$$a\alpha x'^{\alpha-p} + b\beta x'^{\beta-p} + \ldots + l\lambda x'^{\lambda-p}.$$

La dérivée

$$a\alpha(\alpha - p) x'^{\alpha-p-1} + \ldots$$

sera donc bien du degré $\alpha - p - 1$, à moins que $\alpha = p$, hypothèse qu'on a pu écarter dès le début.

Ainsi le degré de substitution de notre racine dans le hessien H sera

$$3k' - 3\mu' - 2p + \alpha,$$

où les quantités k', μ', p, α seront connues quand on aura fait les calculs nécessaires pour développer en série la racine en question avec assez de termes pour qu'elle se distingue des autres. Il faudra seulement avoir soin d'observer que l'on a posé $x = x'^p$, et qu'il faudra diviser par p pour revenir au degré relatif à l'infiniment petit principal x.

19. J'indiquerai enfin comment la méthode qui a été développée conduit au théorème de M. Brill.

Admettons que la courbe $f(x,y) = 0$ ait un point multiple d'ordre p. Transportons-y l'origine, et coupons la courbe par une droite arbitraire $y = vx$. Le calcul du n° 8 montre que l'équation en x, obtenue par l'élimination de y entre $y = ux$ et $f(x,y) = 0$, admet une racine nulle d'ordre $3p - 4$. La courbe hessienne a donc à l'origine un point multiple de l'ordre $3p - 4$. Les tangentes en ce point s'obtiendront en égalant à zéro le coefficient de x^{3p-4}, c'est-à-dire, puisque $\mu = 1$,

$$p^2 \varphi^2 \frac{d^2\varphi}{dv^2} - p(p-1)\frac{d\varphi^2}{dv^2};$$

on trouve d'abord $\varphi = 0$, ce qui prouve que p des tangentes coïncident avec les p tangentes au point multiple de la courbe donnée. Il est aisé de vérifier que les autres tangentes, dont les coefficients angulaires sont fournis par l'équation

$$p\varphi \frac{d^2\varphi}{dv^2} - (p-1)\frac{d\varphi^2}{dv^2} = 0,$$

correspondent au hessien de la fonction φ, c'est-à-dire, en rendant homogène cette fonction par rapport à deux variables x et y, à l'expression

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx^2} & \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} \\ \frac{d^2\varphi}{dy\,dx} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \end{vmatrix}.$$

Le théorème des fonctions homogènes donne

$$x\frac{d^2\varphi}{dx^2}+y\frac{d^2\varphi}{dy^2}=(p-1)\frac{d\varphi}{dx};$$

on en conclut que, quand on aura remplacé x par v et y par 1, l'expression $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ deviendra

$$(p-1)\frac{d\varphi}{dv}-v\frac{d^2\varphi}{dv^2}.$$

On a de même les identités

$$x\frac{d^2\varphi}{dy\,dx}+y\frac{d^2\varphi}{dy^2}=(p-1)\frac{d\varphi}{dy},$$

$$x\frac{d\varphi}{dx}+y\frac{d\varphi}{dy}=p\varphi,$$

dont la seconde montre que $\frac{d\varphi}{dy}$ doit être remplacé par

$$p\varphi-v\frac{d\varphi}{dv}.$$

La première montre alors que $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ doit être remplacé par

$$p(p-1)\varphi-2(p-1)v\frac{d\varphi}{dv}+v^2\frac{d^2\varphi}{dv^2}.$$

En substituant à $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$, $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ dans la forme hessienne les expressions que nous venons de trouver, elle se réduit à

$$(p-1)\left[p\varphi\frac{d^2\varphi}{dv^2}-(p-1)\frac{d\varphi^2}{dv^2}\right],$$

qui est bien, à un facteur constant près, le quotient par φ du coefficient de x^{3p-4}. Ainsi :

En un point multiple d'ordre p de la courbe proposée, la courbe hessienne a un point multiple d'ordre $3p-4$; p des tangentes sont les mêmes que celles de la courbe donnée et, pour avoir les autres, il suffit d'égaler à zéro le hessien répondant aux p tangentes communes.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CELORIA (G.). — SOPRA ALCUNI SCANDAGLI DEL CIELO E SULLA DISTRIBUZIONE GENERALE DELLE STELLE NELLO SPAZIO. — Milan, 1878. — Br. in-folio, V, 48 pages (¹).

Le Mémoire de M. Celoria est le résumé d'observations entreprises en 1873 dans le but d'étudier, d'une façon plus méthodique que ne l'a fait Herschel dans les célèbres sondages du ciel, la distribution des étoiles comprises dans une zone limitée par les parallèles de zéro et 6 degrés de déclinaison nord. L'instrument qui a servi à ces recherches est un équatorial de Plössl, qui n'a guère que 10 centimètres d'ouverture, mais dont l'objectif, d'une singulière transparence, montre facilement les étoiles de 11e grandeur, c'est-à-dire des astres un peu plus faibles que ceux qu'a énumérés Argelander dans la *Durchmusterung*. D'ailleurs M. Celoria s'est imposé l'obligation de compter, sans distinction d'éclat, toutes les étoiles comprises dans la zone précédemment indiquée; pour cela, après avoir pris note du nombre des astres compris dans le rectangle des fils de son micromètre, il déplaçait la lunette à la main de manière à faire coïncider avec le fil de gauche les étoiles primitivement cachées par le fil de droite. Avec la distance des fils verticaux de la lunette de Plössl, neuf de ces déplacements font parcourir à l'instrument 10 minutes d'ascension droite.

Les sondages consécutifs d'une même zone offrent naturellement une grande diversité, tenant à la répartition inégale des étoiles dans le ciel, mais on obtient déjà une variation presque régulière en prenant la moyenne des nombres qui répondent à une même ascension droite, et une peréquation facile conduit ensuite à une continuité très-satisfaisante. Les chiffres ainsi calculés montrent que la densité stellaire est à peu près constante de zéro à 4 heures d'ascension droite; elle augmente ensuite de manière à atteindre un premier maximum à $5^{h}10^{m}$, puis diminue jusqu'à $5^{h}40^{m}$, aug-

(¹) Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera in Milano, n° XIII.

mente de nouveau et présente un maximum plus considérable que le précédent à $6^h 50^m$. Après cela la densité diminue et devient presque constante de $8^h 30^m$ à $15^h 5^m$; elle augmente alors, et présente deux maxima successifs à 18 heures et $19^h 40^m$, séparés par un minimum à $18^h 45^m$. Ici encore le second maximum est plus grand que le premier, et la comparaison des courbes dans les régions de 6 heures et de 18 heures montre qu'en ces deux points la distribution des étoiles est tout à fait analogue, sinon identique.

Les régions de densité stellaire considérable répondent au passage de l'équateur dans la voie lactée, et comme les maxima sont par couples, il en résulte que, dans ces deux points, la voie lactée est divisée en deux branches. L'existence de deux branches entre 5 et 6 heures d'ascension droite était connue; mais les observations d'Argelander, pas plus que l'examen à l'œil nu, n'indiquaient l'existence d'une double branche par 18 heures d'ascension droite; M. Celoria montre d'ailleurs que l'indication de cette dernière bifurcation disparaît si l'on ne considère que les étoiles brillantes, et qu'elle s'accuse de plus en plus à mesure que l'on tient compte d'astres plus faibles.

La voie lactée, dit M. Celoria, doit donc être regardée comme composée de deux branches, de deux anneaux distincts, continus sur tout leur contour. L'un de ces anneaux est formé par la traînée ininterrompue qui traverse notre ciel boréal en passant par la Licorne, le Cocher, la Girafe, le Renard, Cassiopée et l'Aigle; l'autre commence dans les brillantes étoiles d'Orion et traverse successivement les Hyades, les Pléiades, Persée, le Cygne pour finir dans Ophiuchus. Les deux anneaux se croisent et forment un système unique dans Cassiopée : ils se séparent dans Persée et dans le Cygne et font entre eux un angle qui, d'après les observations de Milan, est d'environ 19 degrés.

Herschel (*Results of observations at the Cape of Good Hope*) dit, d'un autre côté, « que dans l'intervalle entre η d'Argo et α de la Croix, le cercle lacté, ou la ligne médiane de la voie lactée, est coupé par une zone de brillantes étoiles qui s'étend d'Orion au Grand Chien, à Argo, à la Croix du Sud, au Centaure, au Loup et au Scorpion. Un grand cercle passant par ε Orion et α de la Croix serait l'axe de cette zone, dont l'inclinaison sur la voie lactée serait ainsi de 20 degrés environ, et nous sommes ainsi amenés à penser

que les astres les plus voisins de notre système font partie d'une couche secondaire dont le plan principal serait incliné de 20 degrés sur celui de l'amas général, dont la projection sur le ciel forme la voie lactée. »

M. Celoria rapproche cette citation du fait que ses observations particulières lui ont indiqué, et il en conclut que la branche de la voie lactée qui traverse sans interruption le ciel boréal se retrouve avec le même caractère de continuité dans le ciel austral. La seconde branche, qui, dans notre ciel, part d'Ophiuchus pour s'arrêter aux Hyades, se continue dans l'autre hémisphère par la zone des étoiles brillantes de Herschel, traverse la constellation de la Croix, diamétralement opposée à Cassiopée, et vient par le Scorpion rejoindre la constellation d'Ophiuchus.

On peut d'ailleurs se faire une idée plus nette de la nature de ces deux anneaux; il suffit pour cela de remarquer que les deux maxima absolus de la densité des étoiles sont vers $6^h 50^m$ et $19^h 20^m$ d'ascension droite, et que c'est dans la première région que se trouvent les étoiles les plus lumineuses. Si d'ailleurs on admet, ce qui paraît vrai d'une manière générale, que la différence d'éclat des étoiles tient à une différence de distance de ces astres, on est alors conduit à cette conséquence inévitable que vers 6 heures d'ascension droite se trouvent accumulées les étoiles les plus voisines de notre système solaire, et que, vers 19 heures d'ascension droite sont placées celles qui sont le plus loin de nous. Si d'ailleurs on tient compte de ce que, dans les régions de la voie lactée, la courbe de la densité stellaire offre deux ondulations, dont la première est la plus faible, on sera conduit à admettre que la branche de la voie lactée qui se présente la première au méridien est celle qui renferme les étoiles les plus voisines.

La voie lactée est donc formée, dit en terminant M. Celoria, de deux anneaux, inclinés l'un sur l'autre d'environ 20 degrés, s'enveloppant mutuellement, et le Soleil se trouve un peu en dehors de leurs plans. G. R.

BEN ALHUSEIN ALKHARKHI (ABU BEKR MUHAMMED). — HAFÎ FÎL HISÂB (Genügendes über Arithmetik) nach der auf der herzoglich gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift bearbeitet von Dr ADOLF HOCHHEIM, Professor. I. Halle a. S., Verlag von Louis Nebert; 1878, v-246 pages.

C'est probablement dans les dix premières années du XIe siècle que l'Arabe Alkharkhî composa un Traité étendu sur la partie arithmétique des Mathématiques. De cet Ouvrage, la seconde Partie (la partie algébrique), le *Fakhrî,* qui, d'après Hankel, témoigne, chez l'auteur, d'une étude approfondie de Diophante, fut révélée de nouveau au monde savant par Woepcke, tandis que l'Introduction élémentaire, le *Háfí fîl Hisáb*, est restée jusqu'ici ignorée. Le professeur Hochheim, déjà connu du public par de nombreux travaux sur des problèmes de la Géométrie nouvelle, et aussi par un excellent Mémoire historique sur Otto de Guericke, a eu la bonne fortune de rencontrer un manuscrit non exempt d'incorrections, mais suffisamment lisible, de ce Traité de Logistique, et il nous offre ici la première Partie traduite en allemand, avec de nombreuses remarques explicatives.

Nous relèverons dans le contenu de cet Ouvrage quelques points particulièrement intéressants pour l'Histoire des Mathématiques. Dans la définition de la multiplication, nous voyons reparaître la vieille discussion qui a duré pendant tout le moyen âge, sur la question de savoir si l'unité, en tant qu'unité, peut être divisée. On y trouve, de plus, à propos de la multiplication, une série de curieux artifices pour le calcul avec des nombres déterminés, que l'on ne rencontre avec cette étendue chez aucun autre des anciens arithméticiens. Par exemple, le produit $123a$ s'obtient de la manière suivante :

$$123a = 125a - 2a = 1000\,\frac{a}{8} - 2a.$$

La preuve par 9, ainsi que la préoccupation de ramener les calculs à des opérations avec des fractions simples (de numérateur = 1), se retrouvent ici, comme on pouvait s'y attendre. Quant au Chapitre, très-développé, sur le calcul des fractions, les matériaux qu'il contient ne diffèrent pas, au fond, de ceux du Chapitre analogue de l'*Essence de l'art du Calcul* de Beha Eddin. Par contre,

nous ne connaissons jusqu'ici aucun autre auteur où se trouve la distinction, introduite à propos de la définition de la notion de rapport, des nombres en *premiers, seconds* et *concordants*. La division par 60, qui est attribuée aux anciens, est l'objet d'une grande attention, comme étant, au dire de l'auteur, le fondement de toutes les transformations de nombres qui se présentent dans la vie ordinaire. Par exemple, l'Irâk (Mésopotamie) se sert d'une double division de l'unité en *habba* et *aschîr*, telle que

1 aschîr : 1 habba = 48 : 60.

La partie du texte publiée jusqu'ici se termine par le calcul de la division du cercle, que les astronomes du moyen âge avaient l'habitude de pousser jusqu'à la minime fraction de $\frac{1}{60^9}$ d'une seconde d'arc.

Nous attendons avec impatience la suite de cet important travail.

S. GUNTHER.

CATALAN (E.). — NOTES D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE [1].

I. *Sur les dérivées de la fonction* $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

II. *Sommation d'une série. Intégration d'une équation.*

Si l'on fait

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{1.2.z(z+1)} + \frac{a^3}{1.2.3.z(z+1)(z+2)} + \ldots,$$

on a

$$\psi(z) = \frac{a}{z}\,\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} = \cfrac{a}{z + \cfrac{a}{z + 1 + \cfrac{a}{z + 2 + \cfrac{a}{z + 3 + \ldots}}}}$$

(LEGENDRE, *Note IV* des *Éléments de Géométrie*).

---

[1] Extrait du tome XLII des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Belgique*, 32 p.

M. Catalan montre que, en faisant $a = x$, $z = k$, $y = \varphi(k)$, y satisfait à l'équation linéaire du second ordre

$$xy'' + ky' - y = 0.$$

Pour $k = \frac{1}{2}$, cette équation admet la solution

$$y = A e^{2\sqrt{x}} + B e^{-2\sqrt{x}}.$$

III. *Une formule combinatoire.*

IV. *Une intégrale double*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(x+y)^{2q} - (x-y)^{2q}}{(e^{2\pi x} - 1)(e^{2\pi y} - 1)} dx\,dy = (-1)^q \frac{2q+3}{4(q+1)(2q+1)} B_{2q+1},$$

B_{2q+1} étant un nombre de Bernoulli.

V. *Une décomposition de fraction rationnelle.*

L'auteur s'occupe de la fraction $\frac{1}{(x-a)^n (x-b)^n}$, et déduit diverses identités de la formule de décomposition.

VI. *Sur une fonction transcendante.*

Il s'agit de la fonction

$$F(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + \ldots.$$

$a, b, c, \ldots$ désignant les nombres premiers impairs, on a

$$F(q) = \frac{q}{1-q} - \sum \frac{q^a}{1-q^a} + \sum \frac{q^{ab}}{1-q^{ab}} - \sum \frac{q^{abc}}{1-q^{abc}} + \ldots.$$

On a aussi

$$-\log(1-q) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \int_0^q \frac{dq}{q} F(q^i).$$

VII. *Sur la série harmonique.*

La formule suivante permet d'abréger le calcul des n premiers termes :

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} \frac{2^{\alpha+2} - 1}{2^\alpha}.$$

VIII. *Sur l'équation d'Euler*

$$y(c+nx)dx - (y+a+bx+nx^2)dy = 0.$$

M. Catalan donne un procédé très-simple pour intégrer cette équation.

On peut d'ailleurs observer qu'elle est contenue comme cas particulier dans l'équation traitée par Jacobi

$$(ax+by+c)dy-(a'x+b'y+c')dx+(a''x+b''y+c'')(ydx-xdy)=0,$$

équation qui, en remplaçant x et y par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, devient

$$\begin{vmatrix} ax+by+cz & x & dx \\ a'x+b'y+c'z & y & dy \\ a''x+b''y+c''z & z & dz \end{vmatrix} = 0,$$

et qui, par conséquent, sera satisfaite par les solutions du système d'*équations linéaires à coefficients constants*

$$\frac{dx}{dt} = ax+by+cz,$$

$$\frac{dy}{dt} = a'x+b'y+c'z,$$

$$\frac{dz}{dt} = a''x+b''y+c''z.$$

IX. *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler.*

En faisant

$$\tang x = G_1\frac{x}{1} + G_3\frac{x^3}{1.2.3} + G_5\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + G_2\frac{x^2}{1.2} + G_4\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

on a

$$G_{i+1} = \frac{1}{2}(G_i + C_{i,1}G_1G_{i-1} + C_{i,2}G_2G_{i-2} + \ldots + G_{i,1}G_{i-1}G_1 + G_i),$$

ou, symboliquement,

$$G_{i+1} = \frac{1}{2}(G+G)^i.$$

M. Catalan donne plusieurs autres relations analogues.

X. *Sur l'addition des fonctions elliptiques.*

Ainsi que l'auteur l'a déjà observé (*Comptes rendus,* 25 mai 1874), l'expression

$$\left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)}\right]\varphi(\lambda),$$

dans laquelle

$$\lambda = \frac{\Delta(x)\,\Delta(y) - c^2 \sin x \sin y \cos x \cos y}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y},$$

où c est le module, est, quelle que soit la fonction φ, une différentielle exacte dV; il en résulte que l'on peut prendre

$$V = \text{const.},$$

pour l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} = 0;$$

il fait aujourd'hui plusieurs applications de cette remarque, en donnant diverses valeurs à la fonction $\varphi(\lambda)$.

MAILLY (E.). — ESSAI SUR LA VIE ET LES OUVRAGES DE L.-A.-J. QUETELET. — In-16, 291 pages. Bruxelles, 1875.

La biographie de Quetelet peut intéresser plus d'un lecteur : ce savant n'eut point de spécialité. Cela, aujourd'hui, suffirait à assurer une place presque unique à un homme qui ne serait point universellement médiocre, et Quetelet n'est mort qu'en 1871. Il commença à se faire remarquer, à seize ans, par un dessin exposé à Gand, en 1812; trois ans plus tard, il était nommé professeur de Mathématiques au Collége de cette ville et il écrivait, avec Dandelin, le libretto d'un opéra « *en un acte, en prose et à grand spectacle* »; il composa des vers, qu'il fit imprimer :

J'essayais de plier aux lois de l'harmonie
Les vers que de mon sein arrachaient mes douleurs,
Et qui, plus doucement, coulaient avec mes pleurs.

Cette tristesse-là, qui rappelle un peu André Chénier, n'est pas

sans quelque charme; mais on se figure malaisément un mathématicien de nos jours se laissant aller ainsi à la mélancolie, et ne le cachant point; d'ailleurs ce n'est pas le seul mode sur lequel Quetelet ait chanté : il ne manquait pas d'esprit, il y en a dans ses épitres, de celui qui ne blesse point.

Ceux au milieu desquels il vivait et travaillait n'étaient pas scandalisés de rencontrer parfois un poète dans le jeune mathématicien ; bien plus, ses découvertes mathématiques elles-mêmes étaient célébrées en vers par ses amis :

> Par le compas enfin, que guide ta pensée,
> Sur le papier savant, une courbe est tracée ;
> Pascal est attentif, et son œil étonné
> Admire un résultat qu'il avait soupçonné.

Cela a été écrit, à propos de la *focale,* il y a un demi-siècle. Quel contraste entre cette époque, si pleine de jeunesse, et la nôtre, où l'étude d'une science prend l'homme tout entier, en lui défendant tout loisir, et quel poète les découvertes de l'Algèbre moderne échaufferaient-elles aujourd'hui?

L'étude de la *focale* fut l'objet principal de la thèse que Quetelet soutint, en 1819, pour obtenir le grade de docteur : cette courbe, dont M. Chasles disait qu'elle « mérite d'être étudiée à fond, d'autant plus que la plupart des propriétés qu'on lui trouve peuvent être transportées à toutes les courbes du troisième degré qui ont un point double ou conjugué », est, comme on sait, le lieu des foyers des sections faites dans un cône droit par un plan passant par un point fixe situé sur la surface du cône. Dans ce premier travail, l'auteur donne les propriétés qui concernent les tangentes, les normales, la courbure. Un autre Mémoire, présenté en 1820 à l'Académie de Bruxelles, dont il avait été nommé membre la même année, traite *des sections coniques considérées dans le solide* et contient diverses propriétés relatives à la fois au cône droit et à ses sections planes. Les recherches de Quetelet servirent de point de départ à celles de son ami Dandelin (*Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique*). C'est dans ce Mémoire qu'est établi le théorème si connu sur les sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan sécant en des points qui sont les foyers de la section. Quelques années plus tard (1825-1829), Quetelet communique à l'Académie ses belles recherches sur les causti-

ques par réflexion et par réfraction, les caustiques secondaires et les lignes aplanétiques. Dans le même intervalle il publia divers autres Mémoires de Géométrie, fonda avec Garnier (1825) la *Correspondance mathématique et physique,* dont il continua d'être un des principaux rédacteurs, déploya une extrême activité pour la création d'un Observatoire à Bruxelles, et en fut nommé directeur en 1828 : il faut lire dans le Livre de M. Mailly le détail des ennuis que cet Observatoire, dont la construction ne s'achevait jamais, dut causer à Quetelet; mais celui-ci ne se rebutait pas aisément.

S'il conserva toujours son goût pour les beaux-arts et pour la Géométrie, c'est surtout à l'Astronomie, à la Météorologie et à la Statistique qu'il consacra le reste de sa vie. Déjà, en 1825, il avait communiqué à l'Académie de Bruxelles un *Mémoire sur les lois des naissances et de la mortalité à Bruxelles*. La première édition de son *Essai de Physique sociale,* qui résume tous ses travaux antérieurs, est de 1835 : la théorie de l'*homme moyen* est maintenant bien connue.

Le lecteur trouvera dans le Livre de M. Mailly des détails intéressants sur la suite des travaux d'Astronomie et de Statistique de Quetelet, détails qui ne peuvent trouver de place ici. Ce Livre, dont la lecture est facile et agréable, est un juste hommage à la mémoire d'un homme qui, par la variété de ses connaissances, par l'étendue et la fécondité de son esprit, par son talent de professeur, par sa prodigieuse activité en toutes choses, par le désintéressement de sa vie, honore la Belgique, à l'histoire scientifique de laquelle son nom restera attaché. J. T.

DOSTOR (G.). — ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS. 1 vol. in-8°, 352 p. Paris, 1877.

Le Livre de M. Dostor ne sera pas inutile aux élèves de la classe de Mathématiques spéciales, ni même aux professeurs : on sait, en effet, de quel prix sont, pour les uns et pour les autres, les exercices d'une partie quelconque du cours; les travaux antérieurs de M. Dostor le mettaient à même de fournir un grand nombre de tels

exercices, comme en témoignent les renvois multiples qu'il a faits à ses propres publications. Les applications offrent, au point de vue de l'enseignement, une telle importance, qu'on serait presque tenté de ne pas reprocher à l'auteur de leur avoir un peu sacrifié la théorie. Toutefois dans un livre, où les commençants peuvent, s'ils le veulent, sauter les pages écrites en petit texte, on peut, ce semble, craindre un peu moins d'être complet. Pourquoi les relations entre un déterminant et les mineurs des divers ordres sont-elles si légèrement esquissées? Pourquoi la proportionnalité entre les mineurs correspondants de deux lignes, dans le cas où le déterminant est nul, n'est-elle pas indiquée? Pourquoi les propriétés des déterminants symétriques gauches sont-elles laissées de côté? Pourquoi la démonstration du théorème sur la multiplication des déterminants, surtout dans le cas des déterminants multiples, est-elle si écourtée, quand ce théorème est d'un usage si fréquent? Il semble aussi que M. Dostor eût pu traiter avec plus de détails la discussion de n équations du premier degré à n inconnues dans le cas où le déterminant des coefficients est nul; qu'il eût pu démontrer que les diverses méthodes d'élimination qu'il indique, pour deux équations entières à une inconnue, donnent non-seulement la condition nécessaire, mais encore la condition suffisante pour que ces deux équations aient une racine commune; qu'il aurait pu insister davantage sur le cas où les deux équations ont deux, trois, ... racines communes et sur l'évanouissement des mineurs du premier, du second, ... ordre du déterminant de Bézout ou de Sylvester.

Mais c'est trop s'appesantir sur ce qui n'est pas dans le Livre de M. Dostor; il serait plus juste de parler de ce qui s'y trouve. Après tout, un auteur est juge de l'étendue avec laquelle il veut traiter son sujet; il est libre de diminuer en nombre, pour les rendre meilleurs, les services qu'il rendra à ceux qui le liront.

Le premier Livre contient les propriétés fondamentales, exposées avec soin, sous une forme accessible aux commençants.

Le deuxième Livre est consacré aux applications à l'Algèbre et à la Trigonométrie, à la résolution de diverses équations algébriques mises sous forme de déterminants égalés à zéro, à la résolution des équations linéaires, aux diverses méthodes d'élimination, parmi lesquelles on notera une intéressante modification apportée par le P. Joubert à la méthode de Cayley; à la résolution de l'équation

du troisième degré, au discriminant d'une équation entière, à la résolution des deux équations à deux inconnues, enfin à diverses questions de Trigonométrie.

Le troisième Livre contient un assez grand nombre d'applications à la Géométrie analytique, concernant la droite, le cercle, le plan, la sphère, la surface ou le volume du triangle et du tétraèdre dans des conditions diverses, les courbes et les surfaces du second ordre. Les principales propriétés de la forme adjointe à une forme quadratique, si intimement liées à la théorie des équations tangentielles, auraient peut-être pu y trouver place.

Le quatrième Livre a pour titre : *Les discriminants et les invariants;* l'auteur se borne d'ailleurs à peu près à ce qui concerne les courbes et les surfaces du second degré.

On doit savoir gré à M. Dostor des indications historiques et bibliographiques qu'il fournit à ses lecteurs, contrairement à un usage trop répandu.

GILBERT (Ph.). — Cours d'Analyse infinitésimale. — Partie élémentaire. 2e édition. Paris-Louvain, 1878. 1 vol. in-8°, 475 pages.

L'auteur, dans sa préface, semble presque disposé à regretter le succès de la première édition de son Livre, enlevée pendant qu'il s'occupait de faire paraître son *Cours de Mécanique,* en sorte qu'il s'est trouvé obligé de publier la seconde édition de la première partie du *Cours d'Analyse infinitésimale* avant d'avoir pu donner la seconde Partie, où devront être traités les sujets d'un ordre plus élevé, tels que la théorie des intégrales définies et des fonctions elliptiques. Cette nouvelle édition, que M. Gilbert, sacrifiant ses préférences personnelles, n'a point osé, peut-être avec raison, enrichir et grossir en y introduisant les résultats et les méthodes dus à l'emploi des variables imaginaires et aux progrès récents de l'Algèbre et de la Géométrie, ne peut guère manquer de trouver, auprès du public auquel elle s'adresse, l'accueil favorable qu'a rencontré la première édition, à laquelle elle est à peu près conforme. Ceux qui sont surtout préoccupés des applications usuelles du Calcul

intégral à des problèmes d'ordre pratique et qui n'ont point de temps à donner aux théories purement abstraites, ceux aussi qui veulent commencer l'étude de l'Analyse infinitésimale, en se rendant compte de l'ensemble des questions qu'elle aborde, et en se familiarisant avec les procédés de calcul les plus fréquemment employés, trouveront dans le *Cours* de M. Gilbert les qualités d'ordre et de clarté qu'on est, aujourd'hui, en droit d'exiger d'un Traité sur cette matière.

La division suit l'ordre habituel. Une introduction (p. 1-50) renferme les propositions les plus importantes relatives aux quantités imaginaires, aux séries, aux limites, aux infiniment petits des divers ordres. Le Livre I (p. 51-113) est consacré aux méthodes de différentiation. Il y aurait mauvaise grâce à reprocher à l'auteur sa définition de la continuité, quand, dans une Note insérée à la fin du volume, il résume le Mémoire de M. Darboux sur les fonctions discontinues, et donne les raisons qui doivent faire rejeter cette définition. Peut-être aussi, en donnant les règles qui permettent d'obtenir la dérivée d'une fonction implicite, aurait-il pu insister davantage sur la définition précise d'une telle fonction : il y a là une difficulté réelle qui embarrasse habituellement les commençants. Les Livres II et III (p. 114-159-265) se rapportent aux applications analytiques et géométriques du Calcul différentiel. La définition de la longueur de l'arc d'une courbe plane paraît laisser un peu à désirer : l'auteur affirme que, lorsque les côtés du polygone [inscrit dans l'arc de courbe] tendent vers zéro, le périmètre de ce polygone *croît sans cesse* sans pouvoir devenir infini, ce qui est loin d'être évident. Le Livre IV (p. 269-383) traite des procédés d'intégration, des intégrales définies, des applications du Calcul intégral à la quadrature des surfaces et à la cubature des solides ; il se termine par l'exposition de la méthode de Simpson pour le calcul approché des intégrales définies. Le Livre V et dernier est consacré aux équations différentielles ordinaires. L'auteur établit l'existence d'une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

se réduisant à y_0 pour $x=x_0$, lorsque, pour toutes les valeurs de x comprises de x_0 à x_1, et pour toutes les valeurs possibles de y,

les fonctions $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ restent continues, à détermination simple, et numériquement inférieures à des quantités données. Deux Notes terminent le volume : la seconde, dont nous avons déjà parlé, est consacrée à l'analyse d'un Mémoire de M. Darboux ; la première concerne les séries à termes positifs.

Enfin, chaque Livre est suivi d'un assez grand nombre d'exercices.

MÉLANGES.

SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES INDÉFINIES;

Par M. ANDRÉIEWSKY,

Professeur à l'Université de Varsovie.

1. Euler a indiqué, dans son *Traité de Calcul intégral* (1), une méthode pour réduire une intégrale de la forme $\int \frac{M\,dx}{N^{p+1}}$, où M et N désignent des fonctions de x, p un nombre entier ou fractionnaire, à une autre intégrale de la forme $\int \frac{M_1\,dx}{N^p}$. Pour cela, il considère la différentielle

$$d\frac{R}{N^p} = \frac{NR' - pRN'}{N^{p+1}}\,dx$$

(R désignant une fonction arbitraire de x, R′ et N′ les dérivées de R et N par rapport à x); d'où, en posant

$$y = \int \frac{M\,dx}{N^{p+1}},$$

on déduit

$$y + \frac{R}{N^p} = \int \frac{M + NR' - pRN'}{N^{p+1}}\,dx.$$

Si l'on détermine, maintenant, la fonction R, de manière que $M + NR' - pRN'$ soit divisible par N, ou que l'on ait

(1) $$M - pRN' = NT.$$

---

(1) *Institutionum Calculi integralis tomus I*, p. 72. Editio tertia.

l'équation précédente donnera

$$(2) \qquad \mathcal{J} = \int \frac{M\,dx}{N^{p+1}} = -\frac{R}{N^p} + \int \frac{M_1\,dx}{N^p},$$

où

$$(3) \qquad M_1 = R' + T.$$

2. Ces formules d'Euler peuvent être présentées sous une autre forme, qui sera, dans plusieurs cas, plus commode pour les applications.

D'après le n° 1, pour ramener l'intégrale $\mathcal{J}$ (2) à une autre intégrale plus simple, il faudra trouver deux fonctions R et T satisfaisant à l'équation (1) et pour lesquelles la fonction M_1 (3) ne soit pas plus compliquée que M.

En introduisant, au lieu de R et T, deux autres fonctions A et B, liées aux premières par les relations

$$pR = -MA, \quad T = MB,$$

on pourra écrire l'équation (1) sous la forme

$$(4) \qquad BN - AN' = 1,$$

et les équations (2), (3) deviendront

$$(5) \qquad \int \frac{M\,dx}{N^{p+1}} = \frac{AM}{pN^p} + \int \frac{M_1\,dx}{N^p},$$

$$(6) \qquad M_1 = \frac{1}{p}[(Bp - A')M - AM'],$$

où A et B désignent deux fonctions quelconques satisfaisant à l'équation (4). Or, si A, B remplissent la condition (4), il en sera de même des fonctions $A - \frac{K}{M}N$, $B - \frac{K}{M}N'$, K étant une fonction arbitraire de x. Par conséquent, on pourra remplacer la formule (5) par cette autre, plus générale,

$$(7) \qquad \int \frac{M\,dx}{N^{p+1}} = \frac{AM - NK}{pN^p} + \int \frac{L\,dx}{N^p},$$

où

$$(8) \qquad L = \frac{1}{p}[(Bp - A')M - AM' - (p-1)KN' + NK'].$$

3. On trouve, dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite ([1]), une application très-élégante de la formule (7) à la recherche de la partie algébrique de l'intégrale $\int \frac{M\,dx}{N^{p+1}}$, où M et N sont deux polynômes, et p un nombre entier et positif.

Le succès de cette application dépend de ce qu'on peut toujours déterminer deux polynômes A, B satisfaisant à l'équation (4), si le polynôme N est premier avec sa dérivée N', en effectuant sur N et N' la recherche du plus grand commun diviseur.

Je dois établir, maintenant, au moyen des formules (5), (7), en observant qu'elles subsistent quels que soient les fonctions M, N et l'exposant p, excepté $p = 0$, plusieurs autres formules pour la réduction des intégrales de certaines différentielles algébriques et transcendantes.

4. Posons d'abord

$$N = x^2 + rx + s.$$

En divisant N par sa dérivée $N' = 2x + r$, on trouve le quotient $\frac{x}{2} + \frac{r}{4}$ avec le reste $s - \frac{r^2}{4}$, ce qui fournit, dans ce cas, les solutions suivantes de l'équation (4) :

$$A = \frac{x + \frac{r}{2}}{2\left(s - \frac{r^2}{4}\right)}, \quad B = \frac{1}{s - \frac{r^2}{4}}.$$

La substitution de ces valeurs de N, A, B dans les formules (7), (8) donne

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{M\,dx}{(x^2 + rx + s)^{p+1}} \\ &= \frac{\left(x + \frac{r}{2}\right) M - (x^2 + rx + s) K}{2p\left(s - \frac{r^2}{4}\right)(x^2 + rx + s)^p} + \int \frac{L\,dx}{(x^2 + rx + s)^p}, \end{aligned} \right.$$

([1]) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 1873. Première Partie, p. 267.

où

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2p\left(s - \frac{r^2}{4}\right)}\left[(2p-1)\mathrm{M} - \left(x + \frac{r}{2}\right)\mathrm{M}' - (p-1)(2x+r)\mathrm{K} + (x^2+rx+s)\mathrm{K}'\right].$$

Si $\mathrm{M} = x^n$, n désignant un nombre entier et positif, on pourra disposer de la fonction arbitraire K de manière que le degré de L soit inférieur à n. Pour cela, faisons $\mathrm{K} = \alpha x^{n-1}$; alors, en annulant le terme en x^n de L, nous trouverons $\alpha = 1$; ainsi, dans le cas de $\mathrm{M} = x^n$, $\mathrm{K} = x^{n-1}$, l'équation (9) devient

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{x^n\,dx}{(x^2+rx+s)^{p+1}} &= -\frac{\frac{r}{2}x^n + s x^{n-1}}{2p\left(s-\frac{r^2}{4}\right)(x^2+rx+s)^p} \\ &\quad + \frac{1}{2p\left(s-\frac{r^2}{4}\right)}\int \frac{\left(\frac{n}{2}-p\right)rx^{n-1} + (n-1)s x^{n-2}}{(x^2+rx+s)^p}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Cette formule ramène l'intégration de la différentielle

$$\frac{x^n\,dx}{(x^2+rx+s)^{p+1}}$$

à l'intégration d'une autre différentielle du même genre, dans laquelle l'exposant du trinôme sera diminué d'une unité, et le numérateur renfermera les termes en x^{n-1}, x^{n-2}, et sera, par conséquent, d'un degré inférieur à n.

Lorsque M est une fonction transcendante, ayant une dérivée algébrique, on pourra, d'après la formule (9), réduire l'intégrale $\int \frac{\mathrm{M}\,dx}{(x^2+rx+s)^{p+1}}$, où p est un nombre entier et positif, à

$$\int \frac{\mathrm{M}\,dx}{x^2+rx+s}$$

et à une suite d'intégrales de différentielles algébriques.

Les formules (9), (10) deviennent illusoires si l'on a $p = 1$, ou

$s - \frac{r^2}{4} = 0$. Changeons maintenant p en $-p$ dans l'équation (9), où nous supposerons $K = 0$, et résolvons-la ensuite par rapport à l'intégrale $\int M(x^2 + rx + s)^p\, dx$, qui sera contenue dans son second membre; il viendra

$$\begin{aligned}\int M(x^2 + rx + s)^p\, dx = {} & \frac{M}{2p+1}\left(x + \frac{r}{2}\right)(x^2 + rx + s)^p \\ & - \frac{1}{2p+1}\int M'\left(x + \frac{r}{2}\right)(x^2 + rx + s)^p\, dx \\ & + \frac{2p}{2p+1}\left(s - \frac{r^2}{4}\right)\int M(x^2 + rx + s)^{p+1}\, dx.\end{aligned}$$

Au moyen de cette formule on peut ramener l'intégrale $\int M(x^2 + rx + s)^p\, dx$, où M est une fonction transcendante ayant une dérivée algébrique, et p un exposant entier et positif, à $\int M\, dx$ et à des intégrales de différentielles algébriques.

5. Reprenons l'équation (4) et supposons qu'on ait

$$N = \varphi + \psi^m, \tag{11}$$

φ et ψ désignant deux fonctions rationnelles de x, m un exposant quelconque; si m est fractionnaire, ψ^m sera irrationnelle; mais on peut facilement satisfaire à l'équation (4) par des valeurs rationnelles de A, B.

Il suffit, pour cela, de remplacer dans l'équation (4) N par son expression (11), et N' par $\varphi' + \frac{m\psi^m}{\psi}\psi'$, et d'égaler ensuite les parties rationnelles et les coefficients de ψ^m dans les deux membres.

On trouve ainsi

$$A = \frac{\psi}{m\varphi\psi' - \psi\varphi'}, \quad B = \frac{m\psi'}{m\varphi\psi' - \psi\varphi'}. \tag{12}$$

Par conséquent, d'après les formules (5), (6), (12), l'intégrale $\int \frac{M\, dx}{(\varphi + \psi^m)^{p+1}}$ peut être ramenée à $\int \frac{M_1\, dx}{(\varphi + \psi^m)^p}$, où le numérateur M_1

ne contiendra pas d'autres quantités irrationnelles que celles qui figurent dans M.

6. Soit, par exemple,

$$N = a + x^m, \quad \varphi = a, \quad \psi = x.$$

Les équations (12) donneront

$$A = \frac{x}{ma}, \quad B = \frac{1}{a},$$

et, par suite, des formules (5), (6) on déduira

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{M\,dx}{(x^m + a)^{p+1}} &= \frac{xM}{map(x^m + a)^p} \\ &\quad + \frac{1}{map}\int \frac{(mp-1)M - xM'}{(x^m + a)^p}\,dx. \end{aligned} \right.$$

En changeant dans cette équation p en $-p$, et en la résolvant ensuite par rapport à l'intégrale $\int M(x^m + a)^p\,dx$, on a

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int M(x^m + a)^p\,dx \\ &\quad = \frac{Mx(x^m + a)^p}{mp+1} - \frac{1}{mp+1}\int M'x(x^m + a)^p\,dx \\ &\quad\quad + \frac{map}{mp+1}\int M(x^m + a)^{p-1}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Ces formules comprennent, comme cas particuliers, la formule connue pour la réduction de l'exposant d'une différentielle binôme.

Lorsque M est une fonction transcendante ayant une dérivée algébrique, les formules (13), (14) réduisent les intégrales $\int \frac{M\,dx}{(x^m + a)^{p+1}}$, $\int M(x^m + a)^p\,dx$, où p désigne un nombre entier et positif, respectivement à $\int \frac{M\,dx}{x^m + a}$, $\int M\,dx$, et à des intégrales de différentielles algébriques.

7. Si l'on fait, dans les équations (11), (12),

$$\varphi = cx, \quad \psi = ax^n + b, \quad m = \frac{1}{n},$$

n désignant un nombre entier et positif, on aura

$$N = cx + \sqrt[n]{ax^n + b}, \quad A = -\frac{1}{bc}(ax^n + b), \quad B = -\frac{ax^{n-1}}{bc}.$$

En substituant ces fonctions à N, A, B dans les équations (5), (6), il viendra

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{M\,dx}{(cx + \sqrt[n]{ax^n + b})^{p+1}} \\ &\quad = -\frac{(ax^n + b)M}{pbc(cx + \sqrt[n]{ax^n + b})^p} \\ &\qquad + \frac{1}{pbc}\int \frac{a(n-p)x^{n+1}M + (ax^n + b)M'}{(cx + \sqrt[n]{ax^n + b})^p}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients de M, M′ du numérateur sous le signe d'intégration du second membre étant des fonctions entières, l'intégrale $\int \frac{M\,dx}{(cx + \sqrt[n]{ax^n + b})^{p+1}}$, où M est une fonction entière et p un nombre entier et positif, se réduit, au moyen de la formule (15), à $\int \frac{Q\,dx}{cx + \sqrt[n]{ax^n + b}}$, où Q sera aussi une fonction entière.

8. Les formules de réduction démontrées dans les numéros précédents (4 à 7) se rapportaient aux cas où N est une fonction algébrique. Nous allons appliquer maintenant les formules du n° 2 à la réduction des intégrales $\int \frac{M\,dx}{N^{p+1}}$ pour certaines formes transcendantes de la fonction N.

Soit d'abord

$$(16)\qquad N = \varphi + e^x,$$

où φ est une fonction quelconque, que nous supposerons indépendante de l'exponentielle e^x.

Dans ce cas, l'équation (4) peut être facilement vérifiée par des valeurs de A, B, qui seront aussi indépendantes de e^x.

En effet, si l'on écrit l'équation (4) pour la fonction (16), et que l'on égale ensuite dans les deux membres les coefficients de e^x et les termes indépendants de e^x, on obtiendra deux équations qui

donneront

$$(17)\qquad A = B = \frac{1}{\varphi - \varphi'}.$$

En remplaçant, dans les équations (5), (6), N, A, B par les expressions (16), (17), on a

$$(18)\qquad \int \frac{M\,dx}{(\varphi + e^x)^{p+1}} = \frac{M}{p(\varphi - \varphi')(\varphi + e^x)^p} + \int \frac{M_1\,dx}{(\varphi + e^x)^p},$$

où

$$(19)\qquad M_1 = \frac{1}{p(\varphi - \varphi')}\left[\left(p + \frac{\varphi' - \varphi''}{\varphi - \varphi'}\right) M - M'\right].$$

La formule (18) devient illusoire si $p = 0$, ou $\varphi = e^x$.

Supposons que M renferme le facteur $\varphi - \varphi'$ élevé à une certaine puissance, c'est-à-dire que l'on ait

$$M = (\varphi - \varphi')^n \psi,$$

ψ désignant aussi une fonction de x.

Alors les équations (18), (19) pourront être remplacées par celles-ci

$$(20)\qquad \int \frac{(\varphi - \varphi')^n \psi\,dx}{(\varphi + e^x)^{p+1}} = \frac{(\varphi - \varphi')^{n-1}\psi}{p(\varphi - e^x)^p} + \frac{1}{p}\int \frac{(\varphi - \varphi')^{n-2}\psi_1\,dx}{(\varphi + e^x)^p},$$

$$(21)\qquad \psi_1 = (\varphi - \varphi')(p\psi - \psi') + (1 - n)(\varphi' - \varphi'')\psi.$$

9. Quand φ et ψ seront des fonctions entières respectivement des degrés g et h, le numérateur $(\varphi - \varphi')^n\psi$ sera du degré $gn + h$, ψ_1 de degré $g + h$, et $(\varphi - \varphi')^{n-2}\psi_1$ du degré $g(n - 1) + h$.

La formule (20) permet donc de ramener l'intégration de la différentielle $\frac{(\varphi - \varphi')^n \psi\,dx}{(\varphi + e^x)^{p+1}}$ à l'intégration d'une autre différentielle de même forme, mais dans laquelle le degré du numérateur sera abaissé de g unités, et l'exposant $p + 1$ d'une unité.

Faisons, par exemple, dans les équations (20), (21)

$$\varphi = x^g, \quad \psi = x^h, \quad h = m - ng + n,$$

Il viendra

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{x^m (x - g)^n\,dx}{(x^g + e^x)^{p+1}} &= \frac{x^{m-g+1}(x - g)^{n-1}}{p(x^g + e^x)^p} \\ &+ \frac{1}{p}\int \frac{x^{m-g}(x - g)^{n-2}\left[px^2 - (pg + m + n - g)x + g(m - g + 1)\right]dx}{(x^g + e^x)^p}. \end{aligned} \right.$$

Le numérateur de la différentielle du premier membre de cette équation est du degré $m+n$, et le numérateur de la différentielle du second membre est du degré $m+n-g$.

La formule (22) subsistant pour toutes les valeurs des constantes m, n, g, nous considérerons un cas particulier, en déterminant m et n par la condition

$$px^2-(pg+m+n-g)x+g(m-g+1)=p(x-g)^2,$$

d'où

$$m=(p+1)g-1, \quad n=1.$$

Pour ces valeurs de m, n, la formule (22) devient

$$\int\frac{x^{(p+1)g-1}(x-g)\,dx}{(x^g+e^x)^{p+1}}=\frac{x^{pg}}{p(x^g+e^x)^p}+\int\frac{x^{pg-1}(x-g)\,dx}{(x^g+e^x)^p},$$

ou, en changeant g en $-g$,

$$(23)\qquad \int\frac{\left(1+\frac{g}{x}\right)dx}{(1+x^g e^x)^{p+1}}=\frac{1}{p(1+x^g e^x)^p}+\int\frac{\left(1+\frac{g}{x}\right)dx}{(1+x^g e^x)^p}.$$

D'après cette équation, l'intégrale du premier membre se réduit à une autre, qui ne diffère de la première que parce que p est remplacé par $p-1$. Conséquemment, l'application répétée de la formule (23) ramène l'intégrale $\int\frac{\left(1+\frac{g}{x}\right)dx}{(1+x^g e^x)^{p+1}}$, où p est supposé entier et positif, à $\int\frac{\left(1+\frac{g}{x}\right)dx}{1+x^g e^x}$, quel que soit g.

En remplaçant p par $-p$ dans l'équation (23), et en la résolvant ensuite par rapport à l'intégrale du second membre, on trouve la relation

$$\int\left(1+\frac{g}{x}\right)(1+x^g e^x)^p\,dx=\frac{(1+x^g e^x)^p}{p}-\int\left(1+\frac{g}{x}\right)(1+x^g e^x)^{p-1}\,dx,$$

qui permet d'évaluer facilement l'intégrale

$$\int\left(1+\frac{g}{x}\right)(1+x^g e^x)^p\,dx,$$

où p est entier et positif et g quelconque, en la réduisant à

$$\int\left(1+\frac{g}{x}\right)dx = x + \log x^g + C.$$

10. Si l'on pose, dans les équations (20), (21),

$$\varphi = \alpha \sin x + \beta \cos x, \quad \psi = \sin^g x \cos^h x,$$

on obtient

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{[(\beta+\alpha)\sin x + (\beta-\alpha)\cos x]^n \sin^g x \cos^h x}{(\alpha \sin x + \beta \cos x + e^x)^{p+1}}\,dx \\ &\quad = \frac{[(\beta+\alpha)\sin x + (\beta-\alpha)\cos x]^{n-1} \sin^g x \cos^h x}{p(\alpha \sin x + \beta \cos x + e^x)^p} \\ &\quad + \frac{1}{p}\int \frac{[(\beta+\alpha)\sin x + (\beta-\alpha)\cos x]^{n-2}\psi_1}{(\alpha \sin x + \beta \cos x + e^x)^p}\,dx, \end{aligned}\right.$$

où

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \psi = {} & [\alpha(p-h-n+1) + \beta(p+h+n-1)] \sin^{g+1} x \cos^h x \\ & + [\beta(p-g-n+1) - \alpha(p+g+n-1)] \sin^g x \cos^{h+1} x \\ & + h(\beta+\alpha)\sin^{g+1} x \cos^{h-1} x - g(\beta-\alpha)\sin^{g-1} x \cos^{h+2} x. \end{aligned}\right.$$

Le numérateur de la différentielle du premier membre de l'équation (24) est du degré $g+h+n$ par rapport à $\sin x$, $\cos x$, et le numérateur de la différentielle du second membre est du degré $g+h+n-1$ par rapport à $\sin x$, $\cos x$.

Pour $\alpha = \beta = \frac{1}{\mu}$, $g = k - n$, les équations (24), (25) donnent

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sin^k x \cos^h x\,dx}{(\sin x + \cos x + \mu e^x)^{p+1}} \\ &= \frac{\sin^{k-1} x \cos^h x}{2p(\sin x + \cos x + \mu e^x)^p} \\ &\quad + \frac{1}{2p}\int \frac{p\sin^{k-1} x \cos^h x - (k-1)\sin^{k-2} x \cos^{h+1} x + h \sin^k x \cos^{h-1} x}{(\sin x + \cos x + \mu e^x)^p}\,dx. \end{aligned}$$

On peut facilement généraliser cette formule de réduction, en la différentiant m fois par rapport à μ; il viendra

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^k x \cos^h x\, e^{mx}\,dx}{(\sin x + \cos x + \mu e^x)^{p+1}} &= \frac{\sin^{k-1} x \cos^h x\, e^{mx}}{2p(\sin x + \cos x + \mu e^x)^p} \\ &\quad + \frac{1}{2p}\int \frac{Q e^{mx}\,dx}{(\sin x + \cos x + \mu e^x)^p}, \end{aligned}$$

où

$$Q = (p - m + 1)\sin^{k-1}x\cos^h x - (k - 1)\sin^{k-2}x\cos^{h+1}x + h\sin^k x\cos^{h-1}x.$$

11. Considérons encore les formes trigonométriques de la fonction N; soit

$$N = a + b\cos x. \tag{26}$$

Dans ce cas, l'équation (4) se présentera ainsi

$$B(a + b\cos x) + Ab\sin x = 1. \tag{27}$$

Pour déterminer les valeurs de A, B, nous poserons

$$A = -hb\sin x, \quad B = h(a - b\cos x);$$

alors l'équation (27) donnera

$$h = \frac{1}{a^2 - b^2}$$

et, par suite,

$$A = -\frac{b\sin x}{a^2 - b^2}, \quad B = \frac{a - b\cos x}{a^2 - b^2}. \tag{28}$$

Substituant, dans les équations (7), (8), à N, A, B leurs valeurs (26), (28), on trouve

$$\left\{\begin{aligned}\int\frac{M\,dx}{(a + b\cos x)^{p+1}} = &-\frac{bM\sin x + (a + b\cos x)K}{p(a^2 - b^2)(a + b\cos x)^p}\\ &+ \frac{1}{p(a^2 - b^2)}\int\frac{L\,dx}{(a + b\cos x)^p},\end{aligned}\right. \tag{29}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}L = {} & [ap - b(p - 1)\cos x]M\\ & + (a + b\cos x)K' + b\sin x[M' + (p - 1)K],\end{aligned}\right. \tag{30}$$

K désignant une fonction arbitraire de x.

La formule (29), qui subsiste quelle que soit la fonction M, comprend, comme cas particulier, la formule connue [1] pour la réduction de l'intégrale $\int\frac{(f + g\cos x)\,dx}{(a + b\cos x)^{p+1}}$.

---

[1] EULER, *Institutionum Calculi integralis tomus I*, p. 150.

En effet, si dans les équations (29), (30), on a $M = f + g\cos x$, on pourra disposer de la fonction arbitraire K, de manière à rendre L aussi linéaire par rapport à $\cos x$.

Pour cela, faisons $K = \mu \sin x$, μ désignant un coefficient indéterminé; après la substitution de ces fonctions à M et K, et le remplacement de $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, l'expression (30) de L devient

$$\begin{aligned} L = {} & apf - bg + (p-1)b\mu \\ & + [apg - (p-1)bf + a\mu]\cos x - (p-2)(\mu + g)b\cos^2 x, \end{aligned}$$

et, en égalant à zéro le coefficient de $\cos^2 x$, on trouve $\mu = -g$.

Par conséquent, pour $M = f + g\cos x$, $K = -g\sin x$, les équations (29), (30) donnent la formule

$$\begin{aligned} \int \frac{(f + g\cos x)\,dx}{(a + b\cos x)^{p+1}} = {} & \frac{(ag - bf)\sin x}{p(a^2 - b^2)(a + b\cos x)^p} \\ & + \frac{1}{p(a^2 - b^2)} \int \frac{p(af - bg) + (p-1)(ag - bf)\cos x}{(a + b\cos x)^p}\,dx. \end{aligned}$$

12. Si la fonction N est de la forme

$$N = \sin x + \alpha \cos x,$$

on satisfait à l'équation (4) en posant

$$A = -\cos x, \quad B = \sin x.$$

Pour ces valeurs de N, A, B, les équations (7), (8) deviennent

$$(31) \quad \int \frac{M\,dx}{(\sin x + \alpha\cos x)^{p+1}} = -\frac{M\cos x + K(\sin x + \alpha\cos x)}{p(\sin x + \alpha\cos x)^p} + \int \frac{L\,dx}{(\sin x + \alpha\cos x)^p},$$

$$(32) \quad L = \frac{1}{p}\left\{ \begin{aligned} & [(p-1)M\sin x + M'\cos x \\ & + (\sin x + \alpha\cos x)K' - (p-1)(\cos x - \alpha\sin x)K] \end{aligned} \right\}.$$

13. Posons maintenant

$$(33) \qquad M = x^m e^{\beta x}, \quad K = e^{\beta x}(\gamma x^m + \delta x^{m-1}),$$

γ et δ étant deux coefficients indéterminés.

Remplaçant M et K par ces valeurs dans l'équation (32), nous

aurons

$$(34)\quad L = \frac{e^{\beta x}}{p}\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l}[(p-1)(1+\alpha\gamma)+\beta\gamma]x^m \\ \quad +[(\beta\delta+m\gamma+(p-1)\alpha\delta]x^{m-1}+(m-1)\delta x^{m-2}\end{array}\right\}\sin x \\ +\left\{\begin{array}{l}[\beta(1+\alpha\gamma)-(p-1)]x^m \\ \quad +[m+\alpha(\beta\delta+m\gamma)-(p-1)\delta]x^{m-1} \\ \quad +(m-1)\alpha\delta x^{m-2}\end{array}\right\}\cos x\end{array}\right\}.$$

En disposant des coefficients indéterminés γ, δ, on peut réduire cette expression de L à la forme

$$L = \frac{e^{\beta x}}{p}(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2})(\sin x + \alpha\cos x).$$

Il suffit, pour cela, de prendre pour γ, δ les valeurs satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} \beta-(p-1)\gamma &= \alpha(p-1)(1+\alpha\gamma), \\ m-(p-1)\delta &= (p-1)\alpha^2\delta, \end{aligned}$$

d'où

$$\gamma = \frac{\beta-\alpha(p-1)}{(p-1)(1+\alpha^2)},\quad \delta = \frac{m}{(p-1)(1+\alpha^2)}.$$

En portant ces valeurs de γ, δ dans les équations (33), (34), il vient

$$K = \frac{e^{\beta x}}{(p-1)(1+\alpha^2)}\{[\beta-\alpha(p-1)]x^m + mx^{m-1}\},$$

$$L = \frac{e^{\beta x}}{p(p-1)(1+\alpha^2)}\left\{\begin{array}{l}[(p-1)^2+\beta^2]x^m \\ \quad +2m\beta x^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}\end{array}\right\}(\sin x+\alpha\cos x);$$

puis, en substituant les expressions de K et L dans l'équation (31) et en y remplaçant ensuite p par $p+1$, on obtient la formule de réduction

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{x^m e^{\beta x}\,dx}{(\sin x+\alpha\cos x)^{p+2}} \\ \displaystyle\quad = -\frac{e^{\beta x}\{[(\beta-\alpha p)x^m+mx^{m-1}]\sin x+[(p+\alpha\beta)x^m+m\alpha x^{m-1}]\cos x\}}{(p+1)p(1+\alpha^2)(\sin x+\alpha\cos x)^{p+1}} \\ \displaystyle\quad + \frac{1}{(p+1)p(1+\alpha^2)}\int\frac{[(\beta^2+p^2)x^m+2m\beta x^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}]e^{\beta x}}{(\sin x+\alpha\cos x)^p}\,dx.\end{array}\right.$$

Changeons, dans cette équation, p en $-p$ et résolvons-la ensuite par rapport à $\int x^m e^{\beta x}(\sin x + \alpha\cos x)^p\,dx$; il viendra

(36)
$$\left\{\begin{aligned}
&\int x^m e^{\beta x}(\sin x + \alpha\cos x)^p\,dx\\
&\quad = \frac{e^{\beta x}(\sin x + \alpha\cos x)}{\beta^2+p^2}\left\{\begin{aligned}&[(\beta+\alpha p)x^m + m x^{m-1}]\sin x\\ &+[(\alpha\beta - p)x^m + m\alpha x^{m-1}]\cos x\end{aligned}\right\}\\
&\quad + \frac{p(p-1)(1+\alpha^2)}{\beta^2+p^2}\int x^m e^{\beta x}(\sin x + \alpha\cos x)^{p-2}\,dx\\
&\quad - \frac{2m\beta}{\beta^2+p^2}\int x^{m-1} e^{\beta x}(\sin x + \alpha\cos x)^p\,dx\\
&\quad - \frac{m(m-1)}{\beta^2+p^2}\int x^{m-2} e^{\beta x}(\sin x + \alpha\cos x)^p\,dx.
\end{aligned}\right.$$

Cette formule ramène l'intégration de la différentielle

$$x^m e^{\beta x}(\sin x + \alpha\cos x)^p\,dx$$

à l'intégration de trois autres différentielles de même forme, qui n'en diffèrent qn'en ce que, dans l'une d'elles, l'exposant p est remplacé par $p-2$, dans la deuxième, m par $m-1$, et dans la troisième, m par $m-3$.

Pour $m=0$, les formules (35), (36) se simplifient considérablement; elles deviennent

(37)
$$\left\{\begin{aligned}
\int \frac{e^{\beta x}\,dx}{(\sin x + \alpha\cos x)^{p+2}} = &-\frac{e^{\beta x}[(\beta-\alpha p)\sin x + (\alpha\beta + p)\cos x]}{(p+1)p(1+\alpha^2)(\sin x + \alpha\cos x)^{p+1}}\\
&+\frac{\beta^2+p^2}{(p+1)p(1+\alpha^2)}\int\frac{e^{\beta x}\,dx}{(\sin x + \alpha\cos x)^p},
\end{aligned}\right.$$

(38)
$$\left\{\begin{aligned}
&\int e^{\beta x}(\sin x + \alpha\cos x)^p\,dx\\
&\quad = \frac{e^{\beta x}[(\beta+\alpha p)\sin x + (\alpha\beta - p)\cos x]}{\beta^2+p^2}(\sin x + \alpha\cos x)^{p-1}\\
&\quad + \frac{p(p-1)(1+\alpha^2)}{\beta^2+p^2}\int e^{\beta x}(\sin x + \alpha\cos x)^{p-2}\,dx.
\end{aligned}\right.$$

Si p est un nombre entier et positif, la première de ces formules réduit la recherche de $\int\frac{e^{\beta x}\,dx}{(\sin x + \alpha\cos x)^{p+2}}$ à $\int\frac{e^{\beta x}}{(\sin x + \alpha\cos x)^2}$, ou à

$\int \frac{e^{\beta x}}{\sin x + \alpha \cos x}$ selon que p est un nombre pair ou impair; la seconde formule réduit la recherche de $\int e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)^p dx$ à $\int e^{\beta x} dx = \frac{e^{\beta x}}{\beta} + C$, ou à

$$\int e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)\, dx = \frac{e^{\beta x}[(\beta + \alpha)\sin x + (\alpha\beta - 1)\cos x]}{1 + \beta^2},$$

selon que p est pair ou impair.

14. On déduit de l'équation (38) une autre formule de réduction si, en faisant usage de la formule du binôme, on égale les coefficients d'une certaine puissance α^n dans les deux membres; en posant $p - n = m$, on obtient ainsi

$$\int e^{\beta x} \sin x^m \cos x^n \, dx$$

$$= \frac{e^{\beta x}}{\beta^2 + (m+n)^2} \left\{ \begin{array}{l} m\left(\frac{\beta}{m+n}\sin x - \cos x\right)\sin^{m-1} x \cos^n x \\ \quad + n\left(\sin x + \frac{\beta}{m+n}\cos x\right)\sin^m x \cos^{n-1} x \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{\beta^2 + (m+n)^2}\int e^{\beta x}\sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

$$+ \frac{n(n-1)}{\beta^2 + (m+n)^2}\int e^{\beta x}\sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Quand $m = 0$, ou $n = 0$, cette formule rentre dans celles qu'on trouve dans le *Traité du Calcul intégral* d'Euler [1].

---

(1) *Institutionum Calculi integralis tomus I*, p. 151. — *Voir* aussi BERTRAND, *Calcul intégral*, p. 70.

SUR LA MÉTHODE DE HANSEN POUR LA DÉTERMINATION DES PERTURBATIONS ABSOLUES DES PETITES PLANÈTES;

Par M. BAILLAUD.

Dans sa méthode pour la détermination des perturbations absolues des petites planètes ([1]), Hansen utilise trois conceptions différentes.

1° Il détermine les coordonnées de l'astre par rapport à des axes mobiles OX, OY, OZ, tellement choisis, que ces coordonnées et leurs dérivées par rapport au temps soient représentées par les mêmes fonctions du temps et des éléments dans le mouvement troublé que dans le mouvement elliptique. Il nomme ces coordonnées *coordonnées idéales*.

2° Il remarque que toute fonction de coordonnées idéales dépend du temps de deux manières : le temps s'introduit explicitement, quand on exprime ces coordonnées idéales, au moyen des formules du mouvement elliptique, en partant de l'équation de Kepler; il entre aussi implicitement dans les éléments variables de l'orbite. Hansen désigne par τ le temps dans l'équation de Kepler, sauf à remplacer à la fin des calculs τ par t. Il a cru nécessaire, dans le cas où il s'est placé à ce point de vue, de changer toutes les lettres qui représentent des fonctions du temps. Il semble que ce changement, en multipliant beaucoup les symboles employés, rende les démonstrations moins faciles à suivre. Nous nous bornerons ici à représenter les dérivées partielles relatives à τ par la caractéristique $\frac{\partial}{\partial\tau}$, réservant $\frac{d}{dt}$ pour les dérivées complètes. Si L est une coordonnée idéale ou une fonction de coordonnées idéales ne renfermant pas explicitement les éléments variables, on a

$$\frac{\partial L}{\partial\tau} = \frac{dL}{dt}.$$

([1]) *Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten.* (Erste Abhandlung.)

3° Hansen dispose les formules de manière à substituer partout aux éléments variables leurs valeurs initiales ou leurs valeurs moyennes, sauf à introduire de très-petites quantités variables qui correspondent à la variation de ces éléments.

Soit, à un instant quelconque, a le demi-grand axe de l'orbite, n le moyen mouvement, $e = \sin\varphi$ l'excentricité, ϖ l'angle de la direction du périhélie fait avec OX, c l'anomalie moyenne de l'époque. Représentons par les mêmes lettres, affectées de l'indice zéro, les valeurs des mêmes quantités à l'origine du temps; par u l'anomalie excentrique, par f l'anomalie vraie, par r le rayon vecteur, par v l'angle qu'il fait avec OX, par k la constante de Gauss.

On a entre toutes ces quantités les formules bien connues du mouvement elliptique, parmi lesquelles nous noterons les suivantes :

$$v = f + \varpi,$$

$$r = \frac{a\cos^2\varphi}{1 + e\cos f},$$

$$r^2\frac{dv}{dt} = na^2\cos\varphi,$$

$$n^2a^3 = k^2(1 + m).$$

Hansen désigne par u_1, f_1, r_1 des quantités voisines de u, f et r, satisfaisant aux équations

$$n_0 z = u_1 - e_0\sin u_1,$$

$$r_1\cos f_1 = a_0\cos u_1 - a_0 e_0,$$

$$r_1\sin f_1 = a_0\cos\varphi_0\sin f_1,$$

$$r_1 = \frac{a_0\cos^2\varphi_0}{1 + e_0\cos f_1},$$

$$v = f_1 + \varpi_0,$$

$$r^2\frac{df_1}{dz} = n_0 a_0^2\cos\varphi_0,$$

$$r = r_1(1 + \lambda).$$

Pourvu que z et λ soient des fonctions du temps convenablement choisies, ces formules représenteront le mouvement troublé; r_1 et f_1 seront des coordonnées idéales; on peut appeler z et λ des coordonnées, et elles sont aussi *idéales*.

Hansen parvient, par des calculs très-compliqués, à deux for-

mules très-simples; d'où il déduit facilement z et λ en fonction de forces perturbatrices. M. Dupuy, dans son étude sur la méthode de Hansen, a très-notablement simplifié la démonstration de l'une de ces équations; elles deviennent toutes deux intuitives de la manière suivante : on a

$$\frac{1}{1+\lambda}=\frac{r_1}{r}=\frac{r_1+er_1\cos(f_1-\varpi+\varpi_0)}{a\cos^2\varphi}.$$

Posons avec Hansen

$$e\cos(\varpi-\varpi_0)=e_0+\xi\cos^2\varphi_0,$$
$$e\sin(\varpi-\varpi_0)=\eta\cos^2\varphi_0;$$

nous aurons

$$\frac{1}{1+\lambda}=\frac{n^{\frac{2}{3}}\cos^2\varphi_0}{n_0^{\frac{2}{3}}\cos^2\varphi}\left(1+\frac{\xi}{a_0}r_1\cos f_1+\frac{\eta}{a_0}r_1\sin f_1\right).$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{n^{\frac{1}{3}}\cos\varphi_0}{n_0^{\frac{1}{3}}\cos\varphi}=\frac{h}{h_0},$$

on a

(1) $$\frac{1}{1+\lambda}=\frac{h^2}{h_0^2}\left(1+\frac{\xi}{a_0}r_1\cos f_1+\frac{\eta}{a_0}r_1\sin f_1\right).$$

On a, d'autre part,

$$\frac{dv}{dt}=\frac{df_1}{dz}\frac{dz}{dt},$$

d'où

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial\tau}=\frac{h_0}{h}\frac{r_1^2}{r^2}=\frac{h_0}{h}\frac{1}{(1+\lambda)^2}.$$

Il est utile, et entièrement conforme à l'esprit de la méthode de Hansen, de séparer les termes du deuxième ordre. A cet effet, on a

$$\frac{\partial z}{\partial\tau}=\frac{h_0}{h}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{h_0}{h}\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$
$$=1+W+\frac{h_0}{h}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2},$$

en posant

$$W = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2\frac{h}{h_0}\frac{\xi}{a_0}r_1\cos f_1 + 2\frac{h}{h_0}\frac{\eta}{a_0}r_1\sin f_1;$$

on en tire

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + \int\left[W + \frac{h_0}{h}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\right]dt;$$

c'est la formule (37) [1] de Hansen.

La valeur de λ, donnée par l'équation (1), n'est pas commode à cause des dénominateurs. On la transforme ainsi :

On a, en regardant τ comme seule variable,

$$W = \text{const.} + 2\frac{h_0}{h}\frac{1}{1+\lambda},$$

par suite,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -2\frac{h_0}{h}\frac{1}{(1+\lambda)^2}\frac{\partial \lambda}{\partial z} = -2\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau} = -2\frac{\partial \lambda}{\partial \tau};$$

d'où

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial z} \quad \text{et} \quad \lambda = \text{const.} - \frac{1}{2}\int\frac{\partial W}{\partial z};$$

c'est la formule (36) du Chapitre cité.

Il faut avoir soin de ne regarder W comme fonction de z que par suite de l'emploi des formules du mouvement elliptique, et de ne pas regarder les éléments comme fonctions de z pour la différentiation.

---

(1) *Voir* Mémoire cité, art. 18 à 23.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BRUNS (Dr. Heinrich), a. o. Professor der Mathematik an der Universität Berlin. Publication des Königl. Preussischen Geodätischen Institutes. — Die Figur der Erde. Ein Beitrag zur europäischen Gradmessung. — Berlin, 1878. In-4°, 49 pages.

Dans un article publié au *Journal des Savants* (novembre 1874) et réimprimé au tome IX du *Bulletin*, M. Bertrand a signalé les différents points de vue qui ont présidé aux travaux des géodésistes occupés à mesurer le globe terrestre et à en déterminer la forme définitive; on y trouve un abrégé de l'histoire du problème et les différents résultats obtenus jusqu'à nos jours. Après avoir indiqué, à la fin du Mémoire, combien de difficultés la Science aura encore à vaincre, l'illustre savant termine l'article par ces paroles : « Les mesures géodésiques pourront conduire un jour à de telles déterminations; mais, si nombreuses et si exactes qu'elles soient, elles laisseront aux géomètres un problème des plus difficiles, qui certainement aujourd'hui dépasse de bien loin les ressources de la Science, et nous pouvons, après soixante ans de travaux incessants et dignes des plus grands éloges, répéter les paroles que Delambre écrivait en 1806 : « Les deux questions de la grandeur et de la figure » de la Terre, qui exercent depuis longtemps les astronomes et les » géomètres, paraissent de nature à n'être jamais épuisées ».

Le travail dont nous venons de transcrire le titre paraît comme une amplification des idées de M. Bertrand : désireux d'apprendre si les moyens nécessaires et suffisants pour une solution exacte du problème sont réellement fournis par les mesures effectives exécutées par nos astronomes et géodésistes, M. Bruns étudie et approfondit la question de toute part et parvient ainsi à une conclusion très-satisfaisante pour la théorie : c'est qu'il n'est pas nécessaire de compléter les diverses classes des mesures effectives par d'autres nouvelles, mais qu'il n'est pas non plus permis d'en négliger aucune.

La définition de la surface de la Terre ne se restreint à aucune surface idéale de Géométrie; M. Bruns n'insiste que sur les données de la Terre telle qu'elle est en vérité : comme l'existence d'un po-

tentiel de la Terre est incontestable, il appelle, d'après M. Listing, *géoïde* une quelconque des surfaces de niveau et en fait ressortir la thèse que le problème à résoudre ne consiste pas à déterminer un géoïde particulier passant par un certain point fixe (qui serait toujours assujetti à un choix arbitraire), mais qu'il faut plutôt déterminer en définitive l'ensemble de tous les géoïdes quand on veut parvenir à une connaissance exacte de la figure de la Terre. Nous ajouterons les paroles de l'auteur qui servent d'introduction au Mémoire et qui révèlent ses idées fondamentales :

« Les recherches faites jusqu'à présent sur la figure mathématique de la Terre, à moins qu'elles ne soient d'une nature purement géométrique, sont fondées sur les résultats des mesures de degrés et sur ceux des observations du pendule. A cet effet, on a établi pour point de départ l'hypothèse : 1° que la surface des océans peut être regardée comme partie d'une seule surface analytique fermée, assujettie à une simple loi de formation ; 2° que les normales de cette surface coïncident avec la direction de la pesanteur dans tous les points qui entrent en considération pour les mesures. En général, on a adopté un ellipsoïde de rotation pour cette surface, qui est désignée alors comme la figure mathématique cherchée de la Terre ; cependant il faut remarquer que le choix d'une autre surface assujettie à une loi assez simple de génération ne ferait que changer les préceptes du calcul, mais qu'il n'altérerait point l'idée fondamentale essentielle de toute la méthode ; d'où il résulte que le problème de la Géodésie scientifique se réduirait à déterminer les constantes ou paramètres qui entrent dans l'équation de cette surface, à un point tel que les mesures soient satisfaites rigoureusement ou, quand il y en a un nombre excédant, du moins avec le plus haut degré d'approximation. On connaît le résultat obtenu par les différents travaux qui, en reposant sur ces idées, ont combiné l'effectif des observations disponibles, résultat que l'on peut énoncer succinctement comme il suit : « 1° L'ellipsoïde de rotation est une première approximation suffisamment exacte pour la plupart des cas ; 2° les contradictions qu'il y a entre l'hypothèse et la mesure, quoique toujours minimes, sont dans bien des cas telles qu'elles ne permettent plus qu'on les attribue aux fautes d'observation, c'est-à-dire que les fautes de l'hypothèse sont mensurables. »

Ce dernier résultat pouvait bien être soupçonné, même avant que, dans son Mémoire connu, Walbeck eût fait la première tentative pour déterminer la forme de la Terre, en faisant usage de l'ensemble des mesures appropriées au calcul qui existaient alors ; car la surface des océans et sa continuation idéale au-dessous des continents ne saurait appartenir en toute rigueur à aucune surface assujettie à une simple loi de formation, proposition qui résultait déjà avec la plus grande probabilité de la composition irrégulière de la partie accessible de la croûte terrestre ; et, de plus, il s'ensuivrait que les déviations de la verticale causées par ces irrégularités se prêtent, dans quelques cas, à une mesure exacte ; car les tentatives pour se servir de ces mêmes déviations pour évaluer la densité moyenne de la Terre avaient une heureuse issue. Les expériences faites depuis nous ont même montré qu'on peut généraliser ce résultat en disant que les déviations perceptibles du fil à plomb seront d'autant moins l'exception et d'autant plus la règle, que nos observations seront devenues plus délicates.

Or la détermination de la figure de la Terre n'a pas, jusqu'à nos jours, mis à profit ces déviations de la verticale ; on les a traitées en fautes accidentelles, et l'on s'est contenté d'en constater l'existence et la petitesse. Le géodésiste s'y était placé, à peu de chose près, comme un astronome chargé de discuter des observations actuelles de planètes à l'aide des théories des perturbations empruntées à la période antérieure à Laplace. Les solutions du problème de la Géodésie qu'on a données jusqu'à présent sont aussi incomplètes, vu qu'elles n'épuisent pas l'effectif du matériel numérique et qu'elles renoncent à démêler les contradictions entre l'hypothèse et l'expérience. Reste à constater si ce défaut est seulement accidentel ou s'il est nécessaire. Évidemment il serait purement accidentel si, en résolvant le problème, on pouvait se passer de toute supposition hypothétique et assujettie à une vérification *a posteriori ;* de l'autre côté, il serait nécessaire, quand, sans être complétées par des hypothèses additionnelles, les données empiriques en elles-mêmes seraient insuffisantes pour en faire ressortir la solution. La discussion de cette question fait l'objet du Mémoire actuel et conduit au résultat suivant : les données empiriques des mesures de degrés, définitivement terminées jusqu'à présent, ne suffisent pas, en effet, pour en tirer, abstraction faite de toute hypothèse

auxiliaire, la figure de la Terre, soit en entier, soit en partie. Cependant la mesure des degrés européens dispose en vérité de tous les moyens qu'il faut à la théorie pour découvrir, indépendamment de toute supposition hypothétique sur la loi de formation de la figure mathématique de la Terre, la surface géométrique du globe dans l'étendue de l'aire recouverte par ses réseaux. Ces moyens sont fournis par les classes suivantes de mesures :

1° Déterminations astronomiques de points sur la Terre (hauteurs du pôle, longitudes, azimuts);

2° Triangulation (angles horizontaux, bases);

3° Nivellement trigonométrique (mesures de distances zénithales);

4° Nivellement géométrique;

5° Déterminations de l'intensité de la pesanteur.

L'ensemble de ces classes de données est non-seulement suffisant pour la solution du problème libre de toute hypothèse, mais encore nécessaire, c'est-à-dire que, en supprimant une seule de ces classes de données numériques, on est obligé, pour combler la lacune, de recourir à des hypothèses sur la loi de génération de la surface en question, parce que des données d'une autre nature que celles que nous venons de signaler, et qui pourraient leur être substituées, ne se prêtent pas pour le moment à une mesure couronnée de succès.

Parmi les différentes parties du Mémoire, les premières ont pour but de définir la figure mathématique de la Terre et d'en tirer les conséquences nécessaires. Celles qui viennent ensuite s'occupent du rôle que jouent les diverses classes des données empiriques pour la solution rigoureuse du problème, considérées soit en elles-mêmes, soit dans leur ensemble; la dernière enfin discute la question de savoir jusqu'à quel point on peut envisager, comme réalisable par la pratique, la solution dont la possibilité a été démontrée.

§ 1. La définition de la figure mathématique de la Terre. — § 2. Propriétés générales des géoïdes. — § 3. Les déviations des verticales. — § 4. Résultats possibles d'opérations géodésiques. — § 5. Les mesures astronomiques et trigonométriques. — § 6. Le nivellement géométrique. — § 7. Les mesures de la pesanteur. — § 8. La solution rigoureuse du problème. E. L.

HALL (ASAPH). — OBSERVATIONS ET ORBITES DES DEUX SATELLITES DE MARS AVEC LES DONNÉES POUR LES ÉPHÉMÉRIDES EN 1879. Washington, imprimerie du Gouvernement, 1878. In-4°, 46 pages.

On se rappelle l'impression que causa, au mois d'août de l'année dernière, l'annonce, par l'amiral Rodgers, de la découverte de deux satellites de Mars; aussitôt les érudits cherchèrent dans les Ouvrages récents ou anciens si quelque astronome avait reconnu et admis la probabilité de la découverte de ces satellites, et il se trouva, chose singulière, que les auteurs les plus affirmatifs sur ce sujet étaient totalement étrangers à l'Astronomie. On rappela le passage de Swift où Gulliver décrit son arrivée à Laputa, le goût exagéré des Laputiens pour les Mathématiques et la Musique, la découverte qu'ils ont faite de deux satellites de Mars; on reproduisit surtout le passage de Micromégas où Voltaire dit : « Mais revenons à nos voyageurs. En sortant de Jupiter, ils traversèrent un espace d'environ cent millions de lieues, et ils côtoyèrent la planète Mars qui, comme on sait, est cinq fois plus petite que notre petit globe; ils virent deux Lunes qui servent à cette planète, et qui ont échappé aux regards de nos astronomes. Je sais bien que le P. Castel écrira, et même plaisamment, contre l'existence de ces deux Lunes ; mais je m'en rapporte à ceux qui raisonnent par analogie. Ces bons philosophes-là savent combien il serait difficile que Mars, qui est si loin du Soleil, se passât à moins de deux Lunes. » L'auteur qui cite ce passage, ainsi que celui des voyages de Gulliver, reproduit aussi un fragment d'une lettre de Kepler à un de ses amis, Wachenfels, écrite un peu après la découverte par Galilée des satellites de Jupiter, et alors que l'on émettait des doutes sur la réalité de cette découverte : « Je suis si convaincu de l'existence des quatre planètes entourant Jupiter qu'il me tarde d'avoir un télescope pour vous précéder, s'il est possible, dans la découverte de deux satellites de Mars et peut-être d'un pour Mercure et Vénus ».

Le Mémoire de M. Asaph Hall auquel nous empruntons ces citations contient une partie beaucoup plus étendue et beaucoup plus importante. L'auteur reproduit les observations des deux satellites; il calcule les éléments de leurs orbites, et aussi, après une comparaison détaillée de différents groupes d'observations, la masse de la

planète Mars, et il termine la partie scientifique de son important travail en faisant connaître les données numériques qui permettront de retrouver en 1879 les deux astres auxquels il a donné les noms de *Deimos* et *Phobos*, Phobos étant le plus rapproché de la planète.

MATTHIESSEN (L.). — Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. — Leipzig, 1878. 1 vol. in-8°, 1001 pages.

Les recherches des géomètres sur chaque point des Mathématiques vont en s'accumulant d'une façon qui commence à rendre nécessaire la publication de monographies analogues à celle que M. Matthiessen vient de donner. Elle se rapporte presque uniquement aux équations des quatre premiers degrés, et forme un volume de plus de mille pages; on peut espérer qu'elle est à peu près complète. L'étendue avec laquelle est traité un sujet aussi restreint étonnera sans doute quelques lecteurs, disposés à reconnaître à quelques-unes des méthodes entassées dans le Livre de M. Matthiessen une grande valeur, soit historique, soit analytique, mais persuadés que, en Mathématiques comme ailleurs, certains travaux, qui ont été utiles, sont cependant destinés à l'oubli, et portés peut-être à regretter que le soin de faire eux-mêmes le choix judicieux des méthodes qui sont vraiment dignes d'être conservées leur ait été laissé : ils devront toutefois reconnaître que ce dernier travail leur est singulièrement facilité par celui que M. Matthiessen a su accomplir. Il y a, en outre, un défaut inhérent à la nature de l'Ouvrage : c'est uniquement sur le but commun vers lequel tendent toutes les méthodes exposées qu'est attirée l'attention du lecteur, non sur les points de départ, ni sur les voies qui les rattachent aux autres parties de la Science et, en quelque sorte, à des sommets plus élevés, d'où la vue s'étend sur un horizon plus large. Quoi qu'il en soit, l'extrême richesse des renseignements historiques et bibliographiques rendront ce Livre éminemment utile et commode à consulter.

Il est divisé en huit Sections. Les deux premières (p. 1-24-154) contiennent les théories générales et sont relativement peu développées : l'existence des racines, la démonstration de la continuité

des fonctions algébriques, la décomposition en facteurs, la règle de Descartes ou de Harriot, la transformation des équations, la théorie des fonctions symétriques, les équations aux sommes, aux quotients, aux différences, etc. des racines, les diverses méthodes d'élimination, les notions les plus essentielles relatives aux invariants et covariants y sont rapidement exposées ou étudiées.

La troisième Section (p. 154-236) concerne la résolution directe d'équations particulières, telles que les équations réciproques, binômes, à racines égales ou commensurables, ou telles que leurs racines aient entre elles certaines relations; on y trouvera les belles recherches de Gauss sur l'équation binôme.

Les Sections IV et V (p. 237-789-878) sont les plus développées : elles contiennent à peu près toutes les méthodes connues pour la résolution directe des équations du premier, du deuxième, du troisième et du quatrième degré, fondées soit sur la substitution d'une certaine fonction à l'inconnue, soit sur l'étude de combinaisons formées avec les racines, combinaisons qui se trouvent être les racines d'équations qu'on sait résoudre (*Directe Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden durch Substitution, durch Combination*). On acquerra l'idée de l'étendue des renseignements qu'on trouve dans le Livre de M. Matthiessen, en consultant simplement la liste des auteurs auxquels est attribuée l'invention des méthodes exposées.

Premier degré : Job ben Salomon, Ibn Albanna.

Deuxième degré : Brahmegupta, Bhascara, Diophante, Mohammed ben Musa, Omar Alkhayyami, Viète, Grunert, Job, Clebsch, Hulbe, Sommer, Mallet, Heilermann, Dickmann, Cayley, Laplace, Haminger, Lagrange, Vandermonde.

Troisième degré : Scipione Ferro, Nicolò Tartaglia, Cardan, Viète, Hudde, Lacroix, Landen, Hulbe, Tschirnhausen, Euler, Bézout, Guglielmini, Lockhart, Cayley, Lagrange, Mallet, Cockle, Arndt, Bretschneider, Schlesicke, Grunert, Sommer, Faure, Heilermann, Spitz, Blerzy, Tortolini, Clebsch, Eisenstein, Laplace, Vandermonde, Blomstrand.

Quatrième degré : Ludovico Ferrari, Viète, Descartes, Schooten, Euler, Lagrange, Waring, Bézout, Mossbrugger, Hulbe, Le Besgue, Tschirnhausen, Bring, Francœur, Jourdain, Pratt, Mallet, Sommer, Ball, Grunert, Cayley, Hesse, Hermite, Aronhold, Jerrard,

Simpson, Lacroix, Bardey, Heilermann, Eisenstein, Clebsch, Blerzy, Roberts, Salmon, Laplace, Terquem, Darboux, Ampère, Lacroix, Blomstrand, Job, Ley, Hunrath, Wilson.

A peine est-il utile de dire que, parmi ces géomètres, plusieurs ont donné plus d'une méthode, et que bon nombre des méthodes développées par M. Matthiessen sont anonymes.

La sixième Section (p. 879-920) est consacrée aux méthodes trigonométriques, et la septième (p. 921-963) aux méthodes géométriques : on relèvera dans la première les noms de Fürstemann, Grunert, Fischer, Terquem, Viète, Girard, Schooten, Landen, Colson, Moivre, Eytelwein, Könitzer, Heis, Björling, et, dans la seconde, de Ibn Albanna, Euclide, Omar ben Ibrahim, Francœur, Koppe, Heis, Eschweiler, Platon, Eutocius, Almahani, Descartes, Schooten, Newton, Colson, Spitz.

Enfin la dernière Section (p. 964-1001) est consacrée à la bibliographie et à l'histoire : on y trouvera des renseignements sur les travaux des Chinois, des Égyptiens, des Indiens, des Grecs, des Arabes et des Persans, la liste des travaux de l'ancienne école italienne (1100-1600) et des différents peuples occidentaux depuis le XVII[e] siècle, enfin le catalogue des écrits sur les méthodes d'approximation, sur la résolution des équations algébriques par les fonctions circulaires et elliptiques et, spécialement, sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

PETERSEN (J.). — Beweis eines Lehrsatzes betreffend die Integration algebraischer Differentialausdrücke, beziehungsweise algebraischer Differentialgleichungen unter geschlossener Form ([1]).

Étant donnée une équation de la forme

$$dy = P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_k\,dx_k, \tag{1}$$

où les quantités P sont des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots,$

([1]) *Nachrichten v. d. königl. Gesellschaft der Wissenschaften u. d. G.-A.-Universität zu Göttingen*, février 1878, p. 67-88.

x_k et y, satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, l'auteur s'occupe de l'intégrer, sous forme finie, au moyen de fonctions algébriques et de transcendantes d'une espèce donnée. Il convient d'abord de dire quelques mots de la classification de ces transcendantes.

Une équation

$$(2) \qquad d\omega + N_1\, dv_1 + N_2\, dv_2 + \ldots + N_n\, dv_n = 0,$$

où $N_1, N_2, \ldots, N_n$ sont encore des fonctions algébriques de v_1, $v_2, \ldots, v_n$, ω, satisfaisant, bien entendu, aux conditions d'intégrabilité, définit en général la fonction ω des variables v comme une fonction *transcendante* de ces dernières; toutefois, si ω n'entre pas dans les N, ω sera dite une fonction *hyperalgébrique* des v; si maintenant on substitue aux v d'autres variables w, liées algébriquement aux premières, la fonction ω sera dite, en général, une fonction *simplement transcendante* (*Transcendente erster Stufe*), ou, dans le cas particulier, *simplement hyperalgébrique,* des variables w; si actuellement les variables w sont des fonctions simplement transcendantes d'autres variables, ω sera une fonction *doublement transcendante* (*zweiter Stufe*) de ces dernières. On passera de même aux fonctions *triplement* transcendantes, etc. Il est entendu qu'on doit supposer l'ordre de transcendance le moins élevé possible, en sorte qu'une équation algébrique entre une fonction transcendante et des fonctions transcendantes d'un ordre moins élevé se réduise nécessairement à une identité.

Cela posé, soit

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y;\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) = \text{const.} = c$$

l'intégrale de l'équation (1), f étant une fonction algébrique de $x_1, x_2, \ldots, y, \omega_1, \omega_2, \ldots$, et les quantités $\omega_1, \omega_2, \ldots$ étant des fonctions transcendantes d'ordre quelconque de $x_1, x_2, \ldots, y$; si l'on met en évidence une des transcendantes ω de l'ordre le plus élevé, M. Petersen établit qu'en désignant par φ un facteur intégrant de l'équation différentielle (2), qui est supposée définir cette transcendante, l'équation

$$\frac{du}{d\omega} = c\varphi,$$

où la dérivée partielle est prise par rapport à ω en tant que cette

fonction entre explicitement dans u, se réduit à une identité ou bien est une nouvelle forme de l'intégrale de l'équation proposée.

L'auteur étudie ensuite spécialement le cas où l'équation différentielle (2), qui définit la transcendante ω, admet un facteur intégrant qui soit une fonction algébrique de $\omega, v_1, v_2, \ldots$, la même chose ayant lieu pour les autres transcendantes; dans ce cas u, mis sous sa forme la plus simple, doit être la somme de fonctions simplement hyperalgébriques.

Voici maintenant d'importantes conclusions particulières que M. Petersen déduit de ses recherches.

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_m$ des fonctions algébriques de x, qui ne soient point les dérivées de fonctions algébriques; introduisons les transcendantes

$$\Phi_1(x) = \int^x P_1\,dx, \quad \ldots, \quad \Phi_m(x) = \int^x P_m\,dx;$$

l'intégrale

$$\int^x P\,dx,$$

où P désigne une fonction algébrique de x, ne pourra pas être exprimée sous forme finie au moyen des fonctions Φ et des fonctions inverses, à moins qu'on ne puisse la mettre sous la forme

$$\int P\,dx = \sum_\mu \sum_\nu c_{\mu,\nu}\Phi_\mu(x_{\mu,\nu}) + X,$$

où $x_{\mu,\nu}$ et X sont des fonctions algébriques de x.

Si l'on peut intégrer une différentielle algébrique, sous forme finie, au moyen des fonctions algébriques et des transcendantes élémentaires $\log x$, a^x, $\sin x$, $\arcsin x$, ..., on pourra la mettre sous la forme

$$\int P\,dx = \Sigma c_\nu \log x_\nu + X,$$

où x_ν et X sont des fonctions algébriques.

PETERSEN (J.), Docent an der polytechnischen Schule in Kopenhagen. — Theorie der algebraischen Gleichungen. Kopenhagen, Andr.-Fred. Höst et John, 1878, in-8°, 335 pages.

Le Traité dont nous avons à rendre compte doit son origine aux leçons que M. Petersen a dû faire sur ce sujet à l'École Polytechnique de Copenhague. Dans sa Préface, l'auteur cite les Ouvrages qu'il a suivis dans quelques parties : d'abord l'Algèbre supérieure de M. Serret, dont une nouvelle édition vient de nous être donnée; ensuite l'Ouvrage de Todhunter, auquel il a emprunté une méthode d'approximation malheureusement peu connue en France et due à Horner; enfin, pour ce qui concerne la théorie des substitutions, le Traité fondamental de M. Jordan. L'Ouvrage de M. Petersen contient, condensées dans un espace relativement étroit, beaucoup de théories importantes d'Algèbre supérieure, et l'on doit savoir gré à l'auteur d'avoir fourni aux étudiants une nouvelle occasion de s'instruire et de se préparer à la lecture des Traités où les mêmes questions sont reprises avec tout le développement qu'elles comportent.

La première Section traite des équations en général, des relations entre les coefficients et les racines, de l'élimination, de la transformation des équations, du calcul des fonctions symétriques.

La deuxième Section traite de la résolution algébrique des équations. Après avoir examiné les équations du troisième et du quatrième degré, les équations binômes, l'auteur donne la démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique à partir du cinquième degré [1]. Un des Chapitres de cette Section traite des équations abéliennes.

La troisième Section est consacrée à la résolution numérique des équations. Elle contient les théorèmes de Descartes, de Budan, de Rolle, de Sturm; les méthodes d'approximation de Newton, de La-

---

[1] Il y a un point toutefois de cette démonstration qui ne nous a pas paru rigoureux. L'auteur admet que si $\sqrt[n]{p}$ est le premier radical qui se présente dans la formule qui donne une des racines, p deviendra une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite lorsqu'on remplacera dans p les coefficients des équations par leurs expressions en fonctions symétriques des racines. C'est un point qui ne peut pas être accordé, et qu'Abel, dans son Mémoire, s'est soigneusement attaché à démontrer.

grange, de Horner. Nous y avons remarqué l'emploi ingénieux que fait l'auteur du théorème de Descartes, pour trouver des limites plus resserrées du nombre des racines positives et négatives.

Enfin la quatrième Section contient une étude élémentaire des substitutions. Elle traite des substitutions en général, des groupes et des substitutions conjugués de la théorie de Galois, et elle se termine par quelques applications de cette théorie, et, en particulier, par l'étude de l'équation de Hesse.

Ces indications rapides indiqueront suffisamment quel est le but de l'Ouvrage et dans quel esprit il a été composé. G. D.

CASORATI (F.). — SUI DETERMINANTI DI FUNZIONI [1].

M. Casorati s'occupe dans cette Note du déterminant fonctionnel de $n+1$ fonctions de $n+1$ variables, c'est-à-dire du déterminant dont une ligne a pour éléments $n+1$ fonctions de n variables, les éléments des autres lignes étant les dérivées partielles de ces $n+1$ fonctions prises par rapport à une de ces variables, enfin du déterminant dont la première ligne a pour éléments $n+1$ fonctions d'une seule variable, les éléments des autres lignes étant les dérivées 1re, 2e, ..., $n^{\text{ième}}$ de ces fonctions. Ces trois déterminants jouissent de la propriété suivante : si dans l'un quelconque on substitue aux fonctions au moyen desquelles il est formé ces fonctions divisées par une même fonction θ, on reproduit les mêmes déterminants, divisés le premier par θ^{n+2}, les deux autres par θ^{n+1}.

M. Casorati déduit de là diverses conséquences; ainsi, lorsque une fonction entière de n variables est divisible par la $m^{\text{ième}}$ puissance d'une autre fonction de ces mêmes variables, le hessien de la première fonction est divisible par la $n(m-1)^{\text{ième}}$ puissance de la seconde; lorsqu'une fonction de n variables est divisible par une fonction de μ de ces variables, son hessien est divisible par la $(n-2\mu)^{\text{ième}}$ puissance de cette dernière fonction; lorsqu'une fonction linéaire de n variables admet un facteur fonction linéaire

---

(1) *Memorie del Reale Istituto Lombardo*, t. XIII (3e série, t. IV). Milan, 1875, in-4°, 7 p.

de ces mêmes variables, son hessien admet $n-2$ fois ce facteur.

L'auteur étudie ensuite plus particulièrement le second des trois déterminants dont nous avons parlé et en fait une théorie analogue à celle du déterminant fonctionnel.

GENOCCHI (A.). — INTORNO ALL' EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL MOLTIPLICATORE.

Jacobi a remarqué qu'en éliminant λ entre les deux équations

$$M^2 = \frac{(\lambda - \lambda^3)\,d\lambda}{n(k-k^3)\,dk},$$

$$M\left[(k-k^3)\frac{d^2M}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{dM}{dk} - kM\right] + \frac{\lambda\,d\lambda}{n\,dk} = 0,$$

qui relient le multiplicateur M, les modules primitif et transformé λ et k, et l'ordre n de la transformation, on tombait sur une équation, entre k et $f = \sqrt{n}\,.M$, du troisième ordre, indépendante de l'ordre n. M. Genocchi rectifie une erreur dans les équations de Jacobi, erreur reproduite dans les *Mathematische Werke*, t. II, p. 21-36, et dans la traduction publiée dans le *Journal de Liouville*, 1846 (t. XIV, p. 181-200); ces équations rectifiées sont

$$k_1 f^4\left(\frac{dH}{dk_1}\right)^2 = H^2 + 4H^3,$$

$$4k_1^2 f^3\frac{d^2f}{dk_1^2} + 4k_1 f^3\frac{df}{dk_1} - \frac{k_1 f^4}{(1+k_1)^2} = H,$$

où

$$k_1 = \frac{k^2}{1-k^2};$$

en éliminant H entre ces équations, on trouve l'équation cherchée, à propos de laquelle M. Genocchi rappelle certaines remarques faites par lui dans un Mémoire publié antérieurement (*Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, t. XXIII, p. 246, 1866).

(1) *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*. Série II, t. X, fasc. XVII.

CATALAN (E.). — Sur quelques formules relatives aux intégrales eulériennes. In-4°, 20 pages.

On remarquera dans ce travail les deux formules suivantes :

$$\lim \frac{B(n+\alpha, \gamma)}{B(an+\beta+1, \gamma)} = a^{\gamma} \text{ pour } n = \infty ;$$

$$\frac{B(p, m)}{B(q, m)} = \sum_{i=0}^{i=\infty} C_{m,i} \frac{(q-p)(q-p-1)\ldots(q-p+1-i)}{p(p+1)\ldots(p-1+i)}.$$

Dans cette dernière formule, dont l'auteur tire diverses conséquences, p, q, m sont des quantités positives, $C_{m,i}$ est le $(i+1)^{\text{ième}}$ coefficient numérique de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un binôme.

DARBOUX (G.). — Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes appliquées en des points déterminés d'un corps solide, quand ce corps change de direction dans l'espace. Paris, 1877, Gauthier-Villars. 1 vol. in-8°, 68 pages [1].

Dans ce petit opuscule de Statique géométrique, l'auteur a développé la solution d'un problème qui a été abordé pour la première fois dans la *Statique* de Möbius. On sait que l'étude des forces parallèles appliquées en des points déterminés d'un corps solide a conduit à la notion du centre des forces parallèles, point d'application d'une force unique, ayant même direction que les forces considérées, égale à leur somme algébrique et qui peut toujours les remplacer lorsque le corps change de situation dans l'espace.

Il était naturel de chercher à étendre aux systèmes composés de forces quelconques les propriétés du centre des forces parallèles, c'est-à-dire d'examiner comment varie l'effet, c'est-à-dire la résultante générale et le couple résultant d'un système quelconque de

(1) Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. II, 2e série, IIe cahier.

forces appliquées en des points déterminés du corps solide, soit lorsque, leur grandeur et leur direction demeurant les mêmes, l'orientation du corps vient à changer, soit, ce qui est la même chose, lorsque, le corps demeurant en repos, les forces conservent leurs points d'application, mais changent de direction de manière à conserver entre elles les mêmes angles.

On peut demander, par exemple, quelles sont les conditions nécessaires pour qu'elles se fassent équilibre dans toutes les positions du corps. On dit alors que le corps est en équilibre astatique. Möbius, nous l'avons dit, avait déjà commencé cette étude dans sa *Statique*; Minding, dans le tome XV du *Journal de Crelle*, a donné sur le même sujet un théorème des plus remarquables, et il a prouvé que, toutes les fois que le corps est ramené par une rotation convenable dans une situation où le système des forces a une résultante unique, cette résultante unique rencontre deux courbes ayant une position fixe dans le corps, qui sont une ellipse et une hyperbole, focales l'une de l'autre.

Les études de Möbius et de Minding ont été développées dans la *Mécanique* de M. Broch. M. l'abbé Moigno les a résumées d'après l'Ouvrage de M. Broch dans deux Chapitres de sa *Statique*. La théorie trouve d'ailleurs des applications pratiques intéressantes dans l'étude de plusieurs appareils de Physique qui peuvent être assimilés à des corps solides soumis à plusieurs systèmes de forces, de natures différentes. Nous citerons les boussoles, par exemple, sur lesquelles agissent à la fois les forces magnétiques et celles qui sont dues à la pesanteur.

Dans le travail actuel, M. Darboux démontre les propositions connues et en ajoute plusieurs qui sont nouvelles.

L'auteur cherche d'abord la condition pour que des forces appliquées à un corps solide se fassent équilibre, non-seulement dans la position actuelle du corps, mais encore lorsque le corps tournera d'un angle quelconque autour d'un axe fixe, et il en déduit les conditions pour que l'équilibre subsiste dans toutes les positions du corps, c'est-à-dire soit astatique. Ces conditions, comme on sait, équivalent à douze équations. Il montre ensuite que, dans le cas général, on peut toujours remplacer les forces, en nombre quelconque, appliquées au corps par une résultante unique appliquée en un point quelconque et par trois couples dont les forces ont des points

d'application déterminés. L'étude des différentes réductions de ce genre et leur comparaison sont beaucoup simplifiées quand on emploie un ellipsoïde central relatif à chaque point de l'espace, analogue à celui que l'on rencontre dans la théorie des moments d'inertie. Sans entrer dans de plus grands détails, nous indiquerons les résultats suivants :

1° Étant donné un corps soumis à l'action d'un système de forces dont la résultante générale est nulle, Möbius croyait que, si l'équilibre subsiste dans quatre orientations du corps, il se maintient dans toutes les autres. M. Darboux montre, au contraire, qu'il y a toujours quatre positions du corps pour lesquelles les forces se font équilibre et qu'il peut y en avoir un plus grand nombre. Ces différentes positions sont étudiées et définies.

2° Par l'emploi de l'ellipsoïde central dont il a déjà été question plus haut, le beau théorème de Minding cesse d'être un résultat de calcul et est démontré géométriquement. L'auteur le complète en montrant que, si l'on considère, dans toutes les positions d'un système de forces, l'axe central des moments de Poinsot, cet axe appartiendra à un complexe remarquable du second ordre, dont les droites sont l'intersection de deux plans rectangulaires assujettis à être tangents respectivement aux deux focales de Minding.

3° Möbius avait introduit la notion des axes principaux de rotation, qu'il définissait par la propriété mécanique suivante : « Si le corps tourne autour d'un tel axe, le système de toutes les forces peut toujours être remplacé, dans toutes les positions que prend ainsi le corps, par deux forces appliquées en deux points fixes de l'axe. » Quand le corps tourne, l'axe est donc toujours pressé de la même manière, ce qui constitue en un sens une généralisation de la propriété du centre des forces parallèles ; car, si le corps est fixé en ce centre, il exercera dans toutes les positions qu'il pourra prendre la même pression sur l'appui qui assure la fixité de ce point. Möbius avait établi qu'un système de forces a en général deux axes principaux. M. Darboux cherche le lieu de ces axes quand l'orientation des forces change, et il démontre qu'ils sont les génératrices rectilignes d'une famille de surfaces homofocales du second degré.

En terminant, nous signalerons l'emploi que fait l'auteur, pour présenter les énoncés et les résultats de calcul sous une forme intuitive, des notions généralisées d'angles et de distances, telles que

M. Cayley les a introduites en substituant, aux deux points imaginaires à l'infini sur le cercle, une conique quelconque réelle ou imaginaire.

PELLET (A.-E.). — Thèses présentées a la Faculté des Sciences de Paris (14 mars 1878). Clermont-Ferrand, Ferdinand Thibaud, libraire. — In-4°, 50 pages.

Première thèse. — Sur la théorie des équations algébriques.

Seconde thèse. — Sur la théorie des surfaces.

Galois, dans son célèbre Mémoire sur les *Conditions de résolubilité des équations par radicaux* (*Journal de Liouville*, t. XI), a montré la relation intime qui existe entre la théorie algébrique des équations et la théorie des groupes de substitutions, relation qui est telle qu'on peut dire que les deux théories sont corrélatives. La corrélation des deux théories étant établie, Galois cherche à développer la théorie des groupes de substitutions, et s'il s'adresse parfois à la théorie algébrique des équations, ce n'est que d'une manière subsidiaire. M. Camille Jordan a repris la théorie de Galois, et l'a développée avec une ampleur incomparable dans son *Traité des Substitutions et des équations algébriques*, en y ajoutant un grand nombre de résultats nouveaux. Mais, devant la complication de cette théorie, on peut se demander s'il ne serait pas plus avantageux de développer directement la théorie algébrique des équations. C'est le but que l'auteur s'est proposé dans la première des thèses qu'il a présentées à la Faculté des Sciences de Paris. Sa méthode repose sur le théorème suivant :

$\theta(x)$ étant une fonction rationnelle de x, soit μ le nombre de valeurs distinctes qu'elle acquiert lorsqu'on remplace x successivement par les m racines de l'équation $f(x) = 0$, irréductible et de degré m; μ est un diviseur de m, et ces μ valeurs sont racines d'une équation irréductible.

M. Pellet donne quelques applications de ce théorème à la réduction des équations en général; mais la partie importante de sa thèse consiste dans l'application qu'il en fait aux équations qu'il appelle

holodromes, c'est-à-dire aux équations irréductibles dont toutes les racines peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une d'elles. On sait que Lagrange a ramené l'étude d'une équation quelconque à celle d'une équation jouissant de cette propriété, et qu'il appelle l'équation *résolvante* de la proposée ; de sorte que la théorie des équations holodromes renferme implicitement celle de toutes les équations.

Comme M. Jordan, l'auteur dit que deux équations dont les coefficients sont formés avec les mêmes irrationnelles sont *équivalentes* lorsque les racines de l'une peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des racines de l'autre, qu'une équation holodrome est *simple* lorsqu'elle ne peut se réduire qu'à l'aide d'une équation holodrome équivalente ; et il arrive assez rapidement au théorème suivant, qui résume à peu près la théorie :

Une équation holodrome $F(x) = 0$ *se réduit à l'aide d'une suite d'équations simples : cette suite n'est pas entièrement déterminée, mais la suite des degrés de ces équations simples l'est, abstraction faite de l'ordre, et le produit de ces degrés est égal à celui de* $F(x)$.

Abel a fait une étude semblable, mais en se bornant à des cas particuliers.

La thèse se termine par quelques applications aux équations quelconques de cette théorie générale, et en particulier par une démonstration nouvelle de ce théorème :

Si m *est supérieur à* 4, *le groupe alterné de* m *lettres, d'ordre* $\frac{1.2\ldots m}{2}$, *est simple, et il conduit immédiatement à ce théorème de M. Bertrand : Le nombre des valeurs distinctes d'une fonction de* m *variables ne peut s'abaisser au-dessous de* n *sans se réduire à* 1 *ou à* 2, *le cas de* $m = 4$ *étant seul excepté.*

Cette première thèse est suivie d'une Note, où l'auteur étend le théorème qui en est le fondement à la théorie des fonctions irréductibles suivant un module premier, et il en déduit immédiatement les deux suivants :

Soient $F(x)$ *et* $F_1(x)$ *deux fonctions irréductibles suivant le*

module p, de degrés V *et* V_1, *premiers entre eux; l'élimination de i et i_1 entre les trois congruences*

$$F(i) \equiv 0, \quad F_1(i_1) \equiv 0, \quad I \equiv i i_1 \pmod{p},$$

donnera une congruence $\mathfrak{F}(I) \equiv 0$, *irréductible* (mod. *p*), *et de degré* VV_1.

Soit F(*x*) *une fonction irréductible* (mod. *p*.), *de degré* V, *et telle que le coefficient du terme de degré* V — 1 *ne soit pas congru à* o (mod. *p*); *la fonction* $F(x^p - x)$, *obtenue en remplaçant x par* $x^p - x$ *dans la première, est irréductible.*

Le premier est nouveau; quant au second, l'auteur l'a démontré pour la première fois, avec cette généralité, dans une Note présentée par M. Serret à l'Académie des Sciences, en février 1878, mais en s'appuyant sur une théorie un peu différente; antérieurement M. Serret l'avait démontré dans le cas de V = 1 (*Algèbre supérieure*).

La seconde thèse roule sur la théorie des surfaces.

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

étant le carré de la distance de deux points infiniment voisins sur une surface, celle-ci est applicable sur un plan, s'il existe deux fonctions de *u* et de *v*, *x* et *y*, telles que l'expression précédente soit égale à $dx^2 + dy^2$ identiquement; *x* et *y* sont développés suivant les puissances croissantes de *u* et de *v*, entre de petites limites de ces variables, suivant la formule de Taylor, et, en opérant cette identification, on en déduit l'équation différentielle qui doit avoir lieu entre les fonctions E, F, G. Le même procédé donne l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. Un résultat mérite d'être signalé : c'est l'expression de la courbure géodésique d'une courbe en fonction des variables *u* et *v*. On a, en désignant par $\frac{1}{\rho}$ cette courbure géodésique,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{[(EG - F^2)v'' + \varphi_1.(E + v'F) - \varphi.(F + v'G)]^2}{(EG - F^2)(E + 2v'F + v'^2G)^3},$$

où v', v'' désignent les dérivées de *v* par rapport à *u*, et φ et φ_1 les

polynômes

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial E}{\partial u}+2v'\frac{\partial E}{\partial v}+v'^2\left(2\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right],$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(2\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial v}\right)+2v'\frac{\partial G}{\partial u}+v'^2\frac{\partial G}{\partial v}\right].$$

On voit que la méthode employée dans ce travail revient essentiellement à supposer que les fonctions inconnues, qui doivent satisfaire à une certaine équation différentielle, sont développables par la formule de Taylor, ainsi que celles qui sont données, et à appliquer la méthode des coefficients indéterminés, après avoir substitué aux fonctions leurs développements. M. Pellet applique cette méthode avec succès, non-seulement à la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, mais encore à la théorie des systèmes de coordonnées curvilignes dans l'espace, et des familles de surfaces pouvant faire partie d'un système triple orthogonal. Nous ferons observer, toutefois, que M. Puiseux a déjà appliqué la méthode en question à cette dernière théorie (*Journal de Liouville*, t. VIII, 2ᵉ série).

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PAR LES SÉRIES.

(A propos d'un travail de M. Starkof, intitulé : *Zur Frage über die Integration linearer Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten*);

Par M. SABININE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

Dans le Mémoire de Cauchy intitulé : *Sur l'intégration des équations différentielles* [1], il y a (p. 339 et 340, théorème III) une méthode d'intégration d'un système d'équations différentielles

[1] Ce Mémoire, comme l'on sait, est inséré dans le tome Iᵉʳ des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*.

par les séries. Le point de départ de cette méthode de Cauchy consiste dans l'application de la méthode des substitutions successives à l'intégration d'un système d'équations différentielles : d'après cela, un moyen d'intégration d'un *certain* système d'équations différentielles par les séries, qui a le même point de départ, et qui, en même temps, ne contient pas d'autre procédé qu'une suite de substitutions. Ce moyen ne renferme que les opérations qui découlent *directement* du point de départ de la méthode de Cauchy [1]; par conséquent, ce moyen, sans doute, n'est pas autre chose que la méthode de Cauchy simplifiée, parce que, conformément à un *certain* système d'équations différentielles, le procédé qui consiste seulement dans une suite de substitutions est mis à la place de l'autre méthode de Cauchy [2], dont le point de départ consiste dans la réduction de l'intégration d'un système d'équations différentielles à l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, et qui, en même temps, sert à établir l'application de la méthode des substitutions successives à l'intégration d'un système d'équations différentielles. Cela étant donné, nous allons exposer la méthode de Cauchy que nous avons indiquée tout d'abord, conformément au système suivant d'équations différentielles :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + Q_1 z_1 = 0, \quad \frac{dz_1}{dx} + Q_2 z_2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dx} + Q_n y = r,$$

x étant la variable indépendante, y, z_1, z_2, ..., z_{n-1} étant des fonctions inconnues de x, et Q_1, Q_2, ..., Q_n et r des fonctions connues de x.

Admettons que toutes les quantités Q, ainsi que r, restent finies et continues pour $x = x_1$, $x = x_0$, et pour toute valeur de x entre x_0 et x_1; supposons en même temps que x croisse d'une manière continue depuis x_0 jusqu'à x_1.

Proposons-nous d'obtenir la série qui exprimerait la valeur d'une des variables principales des n équations différentielles simultanées (1).

---

[1] C'est-à-dire la méthode qui est constatée par le théorème III signalé par nous dans le même Mémoire de Cauchy, p. 339 et 340.

[2] Cette méthode, comme l'on sait, est insérée dans le même Mémoire de Cauchy.

Ces équations (1) donnent

$$(2)\quad \begin{cases} y = -\int_{x_0}^{x} Q_1 z_1\, dx + c_1, \quad z_1 = -\int_{x_0}^{x} Q_2 z_2\, dx + c_2, \quad \ldots, \\ z_{n-1} = -\int_{x_0}^{x} Q_n y\, dx + c_n + \int_{x_0}^{x} r\, dx, \end{cases}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes arbitraires, et la limite x de chacune des intégrales étant une valeur quelconque de la variable indépendante prise entre x_0 et x_1.

Si, dans chacune des équations (2), nous substituons à z sa valeur, que donne l'équation qui suit celle dans laquelle nous faisons la substitution, alors nous aurons

$$(3)\qquad y = u + \nabla y,$$

où

$$(4)\quad \begin{cases} u = c_1 - c_2 \int_{x_0}^{x} Q_1\, dx + c_3 \int_{x_0}^{x} Q_1\, dx \int_{x_0}^{x} Q_2\, dx \\ \quad - c_4 \int_{x_0}^{x} Q_1\, dx \int_{x_0}^{x} Q_2\, dx \int_{x_0}^{x} Q_3\, dx + \ldots \\ \quad + (-1)^{n-1} c_n \int_{x_0}^{x} Q_1\, dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_{n-1}\, dx \\ \quad + (-1)^{n-1} \int_{x_0}^{x} Q_1\, dx \int_{x_0}^{x} Q_2\, dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_{n-1}\, dx \int_{x_0}^{x} r\, dx, \end{cases}$$

et

$$(5)\qquad \nabla y = (-1)^n \int_{x_0}^{x} Q_1\, dx \int_{x_0}^{x} Q_2\, dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\, y\, dx.$$

Si, dans le second membre de l'équation (3), on substitue une ou plusieurs fois de suite à la fonction y sa valeur tirée de cette équation même, en écrivant alors, pour abréger,

$$\nabla^2 y, \ \nabla^3 y, \ \ldots$$

au lieu de

$$\nabla\nabla y, \ \nabla\nabla\nabla y, \ \ldots,$$

on trouvera

$$y = u + \nabla u + \nabla^2 y = u + \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 y = \ldots.$$

et généralement

(6) $$y = u + \nabla u + \nabla^2 u + \ldots + \nabla^{p-1} u + \nabla^p y,$$

p étant un nombre entier quelconque.

Si, dans l'équation (6), nous remplaçons u par sa valeur (4), nous aurons

(7) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + R + \nabla^p y,$$

où

(8) $$C_1 = c_1, \quad C_2 = -c_2, \quad C_3 = c_3, \quad \ldots, \quad C_n = (-1)^{n-1} c_n,$$

(9) $$\left\{\begin{aligned} y_1 &= 1 + (-1)^n \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx \\ &\quad + (-1)^{2n} \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx + \ldots, \\ y_2 &= \int_{x_0}^x Q_1\,dx + (-1)^n \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx \int_{x_0}^x Q_1\,dx \\ &\quad + (-1)^{2n} \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx \int_{x_0}^x Q_1\,dx + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_{n-1}\,dx + (-1)^n \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_{n-1}\,dx \\ &\quad + (-1)^{2n} \int_{x}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_{n-1}\,dx + \ldots, \end{aligned}\right.$$

(10) $$\left\{\begin{aligned} R = (-1)^{n-1} \Bigg(&\int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_{n-1}\,dx \int_{x_0}^x dr x \\ &+ (-1)^n \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_{n-2}\,dx \int_{x_0}^x r\,dx + \ldots \Bigg), \end{aligned}\right.$$

(11) $$\nabla^p y = (-1)^{np} \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^x Q_n y\,dx.$$

De la manière connue, il est facile de démontrer que chacune des séries (9) et (10) est convergente pour toute valeur de x, pour laquelle les fonctions données Q et z restent finies et continues entre x_0 et x_1.

Cela posé, et en désignant par K la somme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + R,$$

l'équation (7) se représentera ainsi :

$$(12) \qquad y = K + \nabla^p y,$$

K étant une quantité finie.

Cette équation (12) sert à établir que le terme $\nabla^p y$ tend vers zéro à mesure que le nombre p augmente pour toute valeur de x, pour laquelle les fonctions données Q et r restent finies et continues entre x_0 et x_1. C'est, en effet, ce qui arrive quand y_0, valeur maximum de y, ne devient pas infinie dans l'intervalle où l'on fait varier x. Pour le démontrer, supposons que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ soient les valeurs maxima de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, et que M soit plus grande que chacune des valeurs de $m_1, m_2, \ldots, m_n$; alors, d'après l'équation (11), il est évident que, en valeur absolue,

$$\nabla^p y < \frac{y_0 M^{np} (x - x_0)^{np}}{1.2\ldots(np-1)np}.$$

Or, la quantité M étant finie, le coefficient de y_0 peut devenir moindre que toute valeur donnée α, quand n est suffisamment grand; donc

$$\nabla^p y < \alpha y_0.$$

En vertu de cela, au lieu de l'équation (12), nous aurons l'inégalité suivante :

$$y < K + \alpha y_0.$$

Cette inégalité ayant lieu pour toute valeur de x comprise entre x_0 et x_1, on peut remplacer y par sa valeur maximum y_0, et l'on aura

$$y_0 < K + \alpha y, \quad \text{d'où} \quad y_0 < \frac{K}{1-\alpha}.$$

Ainsi y_0 ne peut pas devenir infini, et, par suite, le terme $\nabla^p y$, qui est moindre que αy_0, tend vers zéro. C. Q. F. D.

Si, dans l'équation (7), le terme $\nabla^p y$ décroît indéfiniment pour les valeurs croissantes de p, cette équation (7) donnera

$$(13) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + R,$$

série qui est le résultat de la méthode de Cauchy que nous nous sommes proposé d'exposer.

Au cas de $r = 0$, les équations (1) et (13) deviendront

$$(14)\quad \frac{dy}{dx} + Q_1 z_1 = 0, \quad \frac{dz_1}{dx} + Q_2 z_2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dx} + Q_n y = 0,$$

et

$$(15)\qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

dont la seconde (15) exprime la valeur d'une des variables principales y des équations différentielles simultanées (14). En remplaçant, de la manière connue, une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles, les procédés qui constituent la méthode de Cauchy exposée s'appliquent, sans aucune difficulté, à l'intégration, par les séries, de *certaines* équations différentielles linéaires aux dérivées partielles, par exemple d'équations analogues à celle qu'on trouve dans le Mémoire de Poisson : *Sur les solutions particulières des équations différentielles et des équations aux différences* (*Journal de l'École Polytechnique*, XIII[e] Cahier, § 41, p. 111 et 112).

Nous allons maintenant indiquer comment la méthode de Cauchy exposée s'applique à l'intégration d'une équation différentielle linéaire de l'ordre n.

La forme générale d'une telle équation est

$$(16)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = U,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ et U étant des fonctions données de x, qui restent finies et continues pour $x = x_1$, $x = x_0$ et pour toute valeur de x entre x_0 et x_1.

Il est facile de montrer comment les équations différentielles telles que (1) peuvent être ramenées à l'équation différentielle (16). En effet, en différentiant $(n-1)$ fois la première des équations (1) par rapport à x, nous aurons n équations, d'où nous tirerons, pour $\frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}}$, les $(n-1)$ expressions linéaires par rapport aux $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$; en substituant à $\frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}}$ ces expressions obtenues dans les $(n-1)$ équations que nous formerons

préliminairement en différentiant $(n-2)$ fois la seconde des équations (1) par rapport à x, ces $(n-1)$ équations donneront, pour $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z_2}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-2} z_2}{dx^{n-2}}$, les $(n-2)$ expressions linéaires par rapport aux $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$. En continuant ainsi, nous obtiendrons pour $\frac{dz_{n-1}}{dx}$ l'expression linéaire par rapport aux $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$. En substituant à $\frac{dz_{n-1}}{dx}$ cette expression obtenue dans la dernière des équations (1), elle prendra la forme suivante :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^n y}{dx^n} + Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} F_1\left(Q, \frac{dQ}{dx}\right) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots \\ &\qquad + Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} F_{n-1}\left(Q, \frac{dQ}{dx}, \frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right) \frac{dy}{dx} \\ &\qquad + Q_1 Q_2 \ldots Q_n y = \pm Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} r. \end{aligned}\right.$$

En égalant les coefficients de y et de ses dérivées dans l'équation (17) aux coefficients de y et de ses dérivées dans l'équation (16), nous aurons les $(n+1)$ équations suivantes :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\pm Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} r = U, \\ &Q_1 Q_2 \ldots Q_n = P_n, \\ &Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} F_{n-1}\left(Q, \frac{dQ}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-2}Q}{dx^{n-1}}\right) = P_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} F_1\left(Q, \frac{dQ}{dx}\right) = P_1, \end{aligned}\right.$$

auxquelles on peut toujours satisfaire par r et n fonctions Q.

En remplaçant respectivement par Q et par r les résolutions des équations (18) dans l'équation (13), nous obtiendrons la série qui exprimera l'intégrale de l'équation différentielle linéaire de l'ordre n (16). Il est à remarquer que le moyen qui consiste dans l'application de la méthode de Cauchy exposée à l'intégration d'une équation différentielle linéaire par les séries n'est pas commode dans son application aux cas particuliers, parce qu'il demande la résolution des équations différentielles (18).

Voilà ce que nous croyons suffisant de dire sur l'intégration des équations différentielles par les séries, à propos du travail de

M. Starkof intitulé : *Zur Frage über die Integration linearer Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten* [1]. Dans ce travail, on trouve l'application de la méthode de Cauchy que nous venons d'indiquer. En effet, il y a un moyen dont fait usage M. Starkof pour l'intégration d'une équation différentielle linéaire par les séries, et qui consiste dans les opérations suivantes : 1° M. Starkof remplace (*voir* la proposition III) l'équation différentielle linéaire

$$(19)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + P_{1,n}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_{2,n}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-1,n}\frac{dy}{dx} + P_{n,n} y = 0$$

par le système suivant d'équations différentielles :

$$(20)\quad \frac{dy}{dx} + Q_1 z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = Q_2 v = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dt}{dx} = Q_n y = 0,$$

Q_1, Q_2, ..., Q_n étant des fonctions qui se déterminent par les équations (5) [p. 12]; 2° sans déduire des équations (12) les expressions $D_{s,n}$ (p. 31 et 32) qui sont identiques avec y_n [*voir* notre formule (9)], M. Starkof prend ces $D_{s,n}$ comme expressions données; 3° en se bornant à cette seule démonstration (p. 33 et 34) que tous ces $D_{s,n}$ satisfont à l'équation (19), M. Starkof présente immédiatement (*voir* la proposition VI) l'intégrale générale de cette équation différentielle (19) sous la forme suivante :

$$(21)\quad y = c_1 D_{1,n} + c_2 D_{2,n} + c_3 D_{3,n} + \ldots + c_{n-1} D_{n-1,n} + c_n D_{n,n},$$

c_1, c_2, ..., c_n étant des constantes arbitraires; mais ce moyen, tel qu'il est exposé par M. Starkof, a le défaut qui consiste dans ce que la démonstration de la proposition VI n'est pas rigoureuse. En effet, M. Starkof ne donne pas la démonstration de ce que les expressions $D_{s,n}$ sont indépendantes entre elles, tandis que cette démonstration est nécessaire pour établir la possibilité de former, de la manière connue, l'intégrale générale de l'équation différentielle (19), ces expressions des $D_{s,n}$ n'étant déterminées que parce que, étant prises comme expressions données, elles satisfont à l'équation différentielle (19).

---

[1]) Ce travail a été publié en allemand, à Odessa, le 25/13 avril 1878.

Dans le même travail de M. Starkof, il y a un autre moyen d'intégration d'une équation différentielle linéaire par les séries, savoir celui qui est le sujet de la première Partie du Chapitre Ier (p. 43). En général, ce moyen n'a aucun intérêt scientifique, puisque l'on peut employer la méthode de Cauchy que nous avons indiquée plus haut, et, au point de vue pratique, ce dernier moyen est plus commode que l'autre dans l'application aux cas particuliers; dans le Chapitre II du travail de M. Starkof, lui-même forme dans chaque cas particulier l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire à l'aide des expressions $D_{s,n}$; mais ce n'est pas à l'aide de cet autre moyen qui, comme nous l'avons dit, est le sujet de la première Partie du Chapitre Ier (p. 4-31); ce moyen, tel qu'il est exposé par M. Starkof, a encore le défaut de reposer principalement sur la proposition IV; or la démonstration de cette proposition n'est pas rigoureuse; car, pour constater rigoureusement cette proposition, il est nécessaire d'établir que le terme qui entre dans l'expression placée à la page 22 (commençant par la 6e ligne), et qui contient toujours la fonction inconnue y sous le signe $\int$, tend vers zéro à mesure que le nombre des termes augmente; or cette preuve n'est pas donnée par M. Starkof. Par la même raison, la démonstration de la proposition XII n'est pas rigoureuse; de plus, M. Starkof ne démontre pas que le déterminant qu'il désigne par δ (p. 24) n'est pas égal à zéro, tandis que cette démonstration est nécessaire pour constater la possibilité de déterminer $y, z, v, \ldots, t$ à l'aide des équations (10) [p. 24].

SUR UNE TRANSFORMATION TRIGONOMÉTRIQUE EMPLOYÉE PAR HANSEN DANS LA THÉORIE DES PERTURBATIONS;

PAR M. B. BAILLAUD.

On sait que la méthode de la variation des constantes arbitraires conduit à représenter les coordonnées d'une planète dans le mouvement troublé et leurs différentielles premières par les mêmes fonctions du temps et des éléments que dans le mouvement elliptique. Hansen a remarqué qu'il y a une infinité de systèmes d'axes

de coordonnées, variables avec le temps, qui jouissent de la même propriété. Il a nommé ces coordonnées *coordonnées idéales*, et il a fait de leur emploi le point de départ d'une méthode avantageuse pour le calcul des perturbations, dans laquelle il cherche le mouvement de la planète par rapport à des axes mobiles de coordonnées idéales, et le mouvement de ces axes X, Y, Z par rapport à des axes x, y, z. Il profite de l'indétermination des axes mobiles pour faire passer constamment le plan des XY par la planète elle-même.

Soient θ l'angle que fait avec Ox le nœud ascendant de XY sur xy; σ l'angle que fait OX avec ce nœud ascendant; i l'angle des deux plans; b l'angle du rayon vecteur mené de l'origine à la planète avec le plan XY; l l'angle que fait sa projection sur xy avec Ox; v l'angle du rayon vecteur avec OX. On a, entre ces diverses quantités, les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos b\,\sin(l-\theta)=\cos i\,\sin(v-\sigma),\\ \cos b\,\cos(l-\theta)=\cos(v-\sigma),\\ \qquad\qquad \sin b=\sin i\,\sin(v-\sigma),\end{cases}$$

qui servent à calculer l et b quand on connaît v. Le nombre des applications à faire de ces formules étant très-considérable, et les valeurs de θ, i, σ variant avec le temps et par suite avec v, ces formules ne seraient pas très-commodes. Hansen profite de ce que les quantités θ, i, σ varient très-peu pour introduire leurs valeurs initiales θ_0, i_0, σ_0. En outre, OX étant arbitraire dans le plan XY, il suppose $\sigma_0=\theta_0$.

On tire des formules (1) les suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos b\,\sin(l-\theta_0)=\cos i\,\sin(v-\sigma)\cos(\theta-\theta_0)\\ \qquad\qquad\qquad +\cos(v-\sigma)\sin(\theta-\theta_0),\\ \cos b\,\cos(l-\theta_0)=-\cos i\,\sin(v-\sigma)\sin(\theta-\theta_0)\\ \qquad\qquad\qquad +\cos(v-\sigma)\cos(\theta-\theta_0),\\ \qquad\qquad \sin b=\sin i\,\sin(v-\sigma).\end{cases}$$

Si l'on mettait en évidence, dans les seconds membres des formules (2), les valeurs que prennent ceux des formules (1) quand on y remplace θ, i, σ par θ_0, i_0, σ_0, les parties complémentaires seraient visiblement très-petites, puisque θ, i, σ diffèrent peu de leurs valeurs initiales. Ces parties complémentaires seraient des

fonctions de v, que nous représenterons, pour abréger, par

$$m \sin v + n \cos v,$$
$$m' \sin v + n' \cos v,$$
$$m'' \sin v + n'' \cos v,$$

m, m', m'', n, n', n'' étant indépendants de v.

Il est manifeste que toute fonction de cette forme est une fonction linéaire et homogène de deux de ces fonctions, pourvu que celles-ci ne soient pas identiques à un facteur constant près; mais il faut remarquer en outre que, si deux de ces fonctions ne différaient que par un facteur constant, la troisième ne différerait pas autrement de chacune d'elles. En effet, en désignant par P, Q, R ces fonctions, on a

$$(3)\quad \begin{cases} \cos b \sin(l - \theta) = \cos i_0 \sin(v - \sigma_0) + P, \\ \cos b \cos(l - \theta) = \cos(v - \sigma_0) + Q, \\ \sin b = \sin i_0 \sin(v - \sigma_0) + R. \end{cases}$$

La somme des carrés des premiers membres est 1, et il en est de même de la somme des carrés des premiers termes des seconds membres. Il en résulte que la valeur de $\operatorname{tang} v$, qui annulerait Q et R si ces fonctions ne différaient que par un facteur constant, annulerait aussi P.

Il résulte de ces considérations que, s'il y avait dans les fonctions P, Q, R une constante arbitraire, on pourrait en disposer pour rendre ces trois fonctions identiques à des facteurs constants près. Il suffirait même que cette constante arbitraire se trouvât dans deux d'entre elles. Or rien n'est plus facile que d'introduire une telle constante sans modifier essentiellement la forme des équations (3). Soit Γ un angle très-petit. On a, en partant des équations (2),

$$(4)\quad \begin{cases} \cos b \sin(l - \theta_0 - \Gamma) = \cos i_0 \sin(v - \theta_0) - P_1, \\ \cos b \cos(l - \theta_0 - \Gamma) = \cos(v - \theta_0) + Q_1, \\ \sin b = \sin i_0 \sin(v - \theta_0) + s, \end{cases}$$

en désignant par P_1, Q_1, s des fonctions de v ayant les valeurs suivantes :

$$P_1 = -\cos i \sin(v - \sigma) \cos x - \cos(v - \sigma) \sin x + \cos i_0 \sin(v - \theta_0),$$
$$Q_1 = -\cos i \sin(v - \sigma) \sin x + \cos(v - \sigma) \cos x - \cos(v - \theta_0),$$
$$S = \sin i \sin(v - \sigma) - \sin i_0 \sin(v - \theta_0),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$x = \theta - \theta_0 - \Gamma.$$

Si l'on met partout en évidence $v - \sigma$ et que l'on écrive que les rapports de P_1 et Q_1 à s sont respectivement égaux à des constantes arbitraires $A \cos \varpi$, $A \sin \varpi$, on trouve

$$(5) \quad \begin{cases} A \cos \varpi = \dfrac{-\cos i \cos x + \cos i_0 \cos(\sigma - \theta_0)}{\sin i - \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)} \\ \qquad\quad = \dfrac{-\sin x + \cos i_0 \sin(\sigma - \theta_0)}{-\sin i_0 \sin(\sigma - \theta_0)}, \\ A \sin \varpi = \dfrac{-\cos i \sin x + \sin(\sigma - \theta_0)}{\sin i - \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)} \\ \qquad\quad = \dfrac{\cos x - \cos(\sigma - \theta_0)}{-\sin i_0 \sin(\sigma - \theta_0)}. \end{cases}$$

On a ainsi deux équations, d'où il est aisé de tirer $\sin x$ et $\cos x$. On trouve d'abord pour dénominateur commun à $\sin x$ et $\cos x$ l'expression

$$[\sin i - \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)]^2 + \cos^2 i \sin^2 i_0 \sin^2(\sigma - \theta_0),$$

qu'il est bien aisé de mettre sous la forme

$$[1 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)]^2 - \cos^2 i \cos^2 i_0.$$

Ce dénominateur se décompose en deux facteurs, dont l'un disparaît, et si l'on pose

$$(6) \quad \varkappa = 1 + \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0),$$

on trouve

$$(7) \quad \begin{cases} \varkappa \cos x = (1 + \cos i \cos i_0) \cos(\sigma - \theta_0) - \sin(i \sin i_0), \\ \varkappa \sin x = (\cos i + \cos i_0) \sin(\sigma - \theta_0). \end{cases}$$

Il est aisé de constater que la somme des carrés des valeurs de $\sin x$ et de $\cos x$ est égale à l'unité.

On tire ensuite des formules (5)

$$(8) \quad \begin{cases} \varkappa A \cos \varpi = \sin i_0 \cos i + \cos i_0 \sin i \cos(\sigma - \theta_0), \\ \varkappa A \sin \varpi = -\sin i \sin(\sigma - \theta_0). \end{cases}$$

On en conclut

$$\varkappa^2 A^2 = 1 - [\cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)]^2;$$

d'où

$$(9)\qquad \varkappa A^2 = 1 - \cos i \cos i_0 + \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0).$$

Si l'on pose ensuite $A = \operatorname{tang} \eta$, on a

$$(10)\qquad \begin{cases} \sin^2\eta = \dfrac{1}{2}[1 - \cos i \cos i_0 + \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)], \\ \cos^2\eta = \dfrac{1}{2}[1 + \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)]. \end{cases}$$

D'autre part, le rapprochement des valeurs de $\varkappa$ et de $\varkappa \cos x$ conduit à calculer $\cos\frac{x}{2}$ et $\sin\frac{x}{2}$, et, comme $\varkappa = 2\cos^2\eta$, on trouve de suite

$$(11)\qquad \begin{cases} \cos\eta \cos\dfrac{x}{2} = \cos\dfrac{i + i_0}{2} \cos\dfrac{\sigma - \theta_0}{2}, \\ \cos\eta \sin\dfrac{x}{2} = \cos\dfrac{i - i_0}{2} \sin\dfrac{\sigma - \theta_0}{2}. \end{cases}$$

Les formules (6), (7), (8) et (10) prennent des formes très-élégantes quand on y introduit les angles qui figurent dans les seconds membres des formules (11).

On trouve sans difficulté

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\varkappa = \cos^2\dfrac{i + i_0}{2} \cos^2\dfrac{\sigma - \theta_0}{2} + \cos^2\dfrac{i - i_0}{2} \sin^2\dfrac{\sigma - \theta_0}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\varkappa \cos x = \cos^2\dfrac{i + i_0}{2} \cos^2\dfrac{\sigma - \theta_0}{2} - \cos^2\dfrac{i - i_0}{2} \sin^2\dfrac{\sigma - \theta_0}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\varkappa \sin x = 2 \cos\dfrac{i + i_0}{2} \cos\dfrac{i - i_0}{2} \sin\dfrac{\sigma - \theta_0}{2} \cos\dfrac{\sigma - \theta_0}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\varkappa A \cos\omega = \sin\dfrac{i + i_0}{2} \cos\dfrac{i + i_0}{2} \cos^2\dfrac{\sigma - \theta_0}{2} \\ \qquad - \sin\dfrac{i - i_0}{2} \cos\dfrac{i - i_0}{2} \sin^2\dfrac{\sigma - \theta_0}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\varkappa A \sin\omega = - \sin\left(\dfrac{i + i_0}{2} + \dfrac{i - i_0}{2}\right) \sin\dfrac{\sigma - \theta_0}{2} \cos\dfrac{\sigma - \theta_0}{2}, \\ \sin^2\eta = \sin^2\dfrac{i + i_0}{2} \cos^2\dfrac{\sigma - \theta_0}{2} + \sin^2\dfrac{i - i_0}{2} \sin^2\dfrac{\sigma - \theta_0}{2}, \\ \cos^2\eta = \cos^2\dfrac{i + i_0}{2} \cos^2\dfrac{\sigma - \theta_0}{2} + \cos^2\dfrac{i - i_0}{2} \sin^2\dfrac{\sigma - \theta_0}{2}. \end{cases}$$

Sur ces formules, la vérification de l'identité

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

est immédiate.

En combinant les quatre formules du groupe (12) qui suivent la première, on trouve de suite

$$(13)\quad \begin{cases} \sin\eta\cos\left(\frac{x}{2}-w\right) = \quad \sin\frac{i+i_0}{2}\cos\frac{\sigma-\theta_0}{2}, \\ \sin\eta\sin\left(\frac{x}{2}-w\right) = -\sin\frac{i-i_0}{2}\sin\frac{\sigma-\theta_0}{2}, \end{cases}$$

formules qu'il convient de rapprocher de celles du groupe (11), avec lequel elles forment un système analogue aux formules de Delambre relatives aux éléments d'un triangle sphérique.

Les quantités Γ, η, w étant ainsi déterminées, les équations (4) deviendront

$$(14)\quad \begin{cases} \cos b\sin(l-\theta_0-\Gamma) = \cos i_0\sin(v-\theta_0) - \tang\eta\cos w . s, \\ \cos b\cos(l-\theta_0-\Gamma) = \cos(v-\theta_0) + \tang\eta\sin w . s, \\ \sin b = \sin i_0\sin(v-\theta_0) + s. \end{cases}$$

La fonction s est très-petite, et elle joue un rôle essentiel dans la méthode donnée par Hansen pour le calcul des perturbations.

La cinquième des formules (12) montre que $\tang\eta\sin w$ est une quantité très-petite, de sorte que $\tang\eta\sin w . s$ est une quantité du deuxième ordre par rapport aux masses perturbatrices. La formule précédente montre que, si l'on néglige les termes de l'ordre des masses, $\tang\eta\cos w$ se réduit à $\tang i$, et que, par suite, le dernier terme du second membre de la première des équations (14) est égal à $-s\tang i_0$, si l'on néglige les termes du second ordre. Enfin l'angle Γ est lui-même du second ordre. On tire, en effet, des équations (11)

$$\cos\eta\sin\Gamma = -\cos\frac{i-i_0}{2}\sin\frac{\sigma-\theta_0}{2}\cos\frac{\theta-\theta_0}{2} + \cos\frac{i+i_0}{2}\cos\frac{\sigma-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}.$$

D'autre part, la théorie des coordonnées idéales conduit à l'équation

$$d\theta = \frac{d\sigma}{\cos i};$$

d'où l'on tire, en désignant par ε une quantité du premier ordre,

$$\sigma - \theta_0 = (\theta - \theta_0)(\cos i_0 - \varepsilon).$$

Si l'on remplace en outre les sinus des arcs très-petits par les arcs eux-mêmes, et les cosinus par l'unité, il vient, en négligeant seulement les termes du troisième ordre,

$$\cos\eta \sin\Gamma = -\frac{\sigma - \theta_0}{2} + \frac{\theta - \theta_0}{2}\cos i_0 = \varepsilon\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right).$$

Toutes les fois que les termes du second ordre seront négligeables, les formules (14) deviendront donc

$$\begin{aligned}\cos b \sin(l - \theta_0) &= \cos i_0 \sin(v - \theta_0) - s \tang i_0,\\ \cos b \cos(l - \theta_0) &= \cos(v - \theta_0),\\ \sin b &= \sin i_0 \sin(v - \theta_0) + s,\end{aligned}$$

et, comme les valeurs de s seront connues d'avance, ces formules ne laisseront rien à désirer.

Hansen résout le problème que nous venons de traiter au moyen des exponentielles imaginaires. MM. Dupuy et Périgaud, dans leurs études sur la méthode de Hansen, en ont donné des solutions géométriques. Il nous a paru utile de faire ressortir la vraie raison de cette transformation et de l'effectuer par les procédés ordinaires de la Trigonométrie. La marche que nous venons de suivre nous a d'ailleurs donné plusieurs formules élégantes, qui pourraient assurément être déduites de celles de l'illustre astronome allemand, mais qui cependant n'ont pas été signalées expressément par lui dans son Mémoire.

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

Par M. G. DARBOUX.

Considérons un polygone plan ou gauche de n côtés $A_1 A_2 \ldots A_n$. On forme un second polygone du même nombre de côtés en joignant les milieux $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ des côtés $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots, A_n A_1$ du premier. De ce deuxième polygone on en déduit un troisième par

la même loi, puis un quatrième, et, en continuant indéfiniment, on obtient ainsi une suite illimitée de polygones. Je me propose de démontrer que ces polygones deviennent de plus en plus petits, c'est-à-dire que tous les sommets du polygone de rang n de la série précédente se rapprochent d'un point fixe quand n croît indéfiniment; et, en même temps, je déterminerai la forme de ce polygone quand il devient infiniment petit.

Rapportons le polygone proposé à trois axes fixes rectangulaires ou obliques, et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les x de ses n sommets. Le succès de la méthode que nous allons suivre repose sur la transformation suivante : appelons $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, définies par la formule

$$(1)\qquad \omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}},$$

et posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \ldots + \omega_n t_n,\\
x_2 &= \omega_1^2 t_1 + \omega_2^2 t_2 + \ldots + \omega_n^2 t_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_k &= \omega_1^k t_1 + \omega_2^k t_2 + \ldots + \omega_n^k t_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_n &= \omega_1^n t_1 + \omega_2^n t_2 + \ldots + \omega_n^n t_n.
\end{aligned}\right.$$

On déduira de ces formules

$$(3)\qquad nt_k = \omega_k^{n-1} x_1 + \omega_k^{n-2} x_2 + \ldots + \omega_k x_{n-1} + x_n,$$

et en particulier

$$(4)\qquad nt_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Il résulte de la formule (3) que les quantités t_k, t_{n-k} sont imaginaires conjuguées, et l'on pourra poser

$$(5)\qquad t_k = \mathrm{R}_k e^{\alpha_k i},\quad t_{n-k} = \mathrm{R}_k e^{-\alpha_k i},$$

R_k étant le module commun de t_k et de t_{n-k}.

Supposons qu'on forme le second polygone en prenant les milieux des côtés du premier. Les x des sommets de ce nouveau polygone seront définis par les formules

$$x'_1 = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad \ldots,\quad x'_n = \frac{x_n + x_1}{2},$$

et l'on reconnaîtra aisément que ces différentes valeurs sont données par des formules semblables aux équations (2), mais où

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$$

seraient remplacées respectivement par

$$t_1\frac{1+\omega_1}{2},\quad t_2\frac{1+\omega_2}{2},\quad \ldots,\quad t_n\frac{1+\omega_n}{2}.$$

Par conséquent, au bout de p opérations semblables,

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$$

seront remplacées par

$$t_1\left(\frac{1+\omega_1}{2}\right)^p,\quad \ldots,\quad t_n\left(\frac{1+\omega_n}{2}\right)^p.$$

On aura donc, si x_k^p désigne le x du $k^{\text{ième}}$ sommet du $p+1^{\text{ième}}$ polygone de la série considérée,

$$(6)\qquad x_k^p = \omega_1^k t_1\left(\frac{\omega_1+1}{2}\right)^p + \omega_2^k t_2\left(\frac{\omega_2+1}{2}\right)^p + \cdots + \omega_n^k t_n\left(\frac{\omega_n+1}{2}\right)^p.$$

Or on a

$$\frac{\omega_h+1}{2} = e^{\frac{i\pi h}{n}}\cos\frac{\pi h}{n},$$

et par conséquent

$$\text{mod.}\,\frac{\omega_h+1}{2} < 1,$$

tant que h est différent de n.

Par suite, dans la formule (6), tous les termes, sauf le dernier, qui est constamment égal à t_n, auront leurs modules infiniment petits pour n infiniment grand. On a donc

$$\lim x_k^p = t_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Les mêmes conclusions s'appliquent aux autres coordonnées. On voit donc que les polygones successifs deviennent infiniment petits et que tous leurs sommets tendent vers un même point, le centre des moyennes distances des sommets du polygone primitif.

Supposons que ce centre ait été pris pour origine des coordon-

nées. Alors t_n sera nul, et si, dans la formule (6), on remplace les t par leurs valeurs (5), on aura, en groupant les termes imaginaires conjugués,

$$(7)\qquad x_k^p = 2\sum_\rho R_\rho \cos\left(\frac{2k+p}{n}\rho\pi + \alpha_\rho\right)\cos^p\frac{\rho\pi}{n};$$

la somme étant étendue aux valeurs 1, 2, 3, ..., $\frac{n}{2} - 1$ de ρ si n est pair, ou 1, 2, ..., $\frac{n-1}{2}$ si n est impair. On aura pour les autres coordonnées du même point des valeurs semblables :

$$(8)\qquad \begin{cases} y_k^p = 2\sum_\rho S_\rho \cos\left(\frac{2k+p}{n}\rho\pi + \beta_\rho\right)\cos^p\frac{\rho\pi}{n}, \\ z_k^p = 2\sum_\rho T_\rho \cos\left(\frac{2k+p}{n}\rho\pi + \gamma_\rho\right)\cos^p\frac{\rho\pi}{n}. \end{cases}$$

Lorsque p grandit indéfiniment, tous les termes des seconds membres de ces formules ont zéro pour limite, car ils contiennent tous un cosinus plus petit que l'unité, élevé à la puissance p. On voit donc, comme cela doit être, que tous les sommets se rapprochent de l'origine. Mais, parmi les termes du second membre de chaque formule, il y en a un par rapport auquel tous les autres deviennent infiniment petits : c'est celui qui contient, élevé à la puissance p, le cosinus le plus grand, $\cos\frac{\pi}{n}$. On pourra donc, si l'on garde ce terme unique et si l'on néglige tous les autres, écrire

$$(9)\qquad \begin{cases} x_k^p = 2R_1 \cos\left(\frac{2k+p}{n}\pi + \alpha_1\right)\cos^p\frac{\pi}{n}, \\ y_k^p = 2S_1 \cos\left(\frac{2k+p}{n}\pi + \beta_1\right)\cos^p\frac{\pi}{n}, \\ z_k^p = 2T_1 \cos\left(\frac{2k+p}{n}\pi + \gamma_1\right)\cos^p\frac{\pi}{n}, \end{cases}$$

en commettant une erreur relative d'autant plus petite que p est plus grand.

On peut encore présenter ce résultat en remarquant que, si l'on divise les seconds membres des formules (7) et (8) par $\cos^p\frac{\pi}{n}$, les

nouvelles valeurs des coordonnées conviennent à un polygone homothétique à celui qui est défini par ces formules. Tous les termes qui suivent le premier contiennent alors un facteur tel que

$$\left(\frac{\cos\frac{\rho\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^p,$$

qui tend vers zéro quand p croît sans limite, et peuvent être négligés vis-à-vis du premier terme, qui demeure fini.

Il résulte des formules (9) que tous les sommets du polygone de rang $p+1$ sont sur la courbe pour laquelle x, y, z sont des fonctions d'une variable φ, définies par les formules

$$(10)\quad \begin{cases} x = R_1\cos(\alpha_1+\varphi)\cos^p\frac{\pi}{n}, \\ y = S_1\cos(\beta_1+\varphi)\cos^p\frac{\pi}{n}, \\ z = T_1\cos(\gamma_1+\varphi)\cos^p\frac{\pi}{n}, \end{cases}$$

et correspondent aux valeurs de φ,

$$\frac{p\pi}{n}+\frac{2\pi}{n},\quad \frac{p\pi}{n}+\frac{4\pi}{n},\quad \ldots,\quad \frac{p\pi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n},\quad \frac{p\pi}{n}+2\pi,$$

La courbe représentée par les équations (10) est en général une ellipse ayant son centre à l'origine. Lorsque p grandit, cette ellipse demeure homothétique à elle-même, mais ses dimensions décroissent en progression géométrique. Quant aux valeurs de φ, comme elles sont en progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$, elles définissent un polygone semi-régulier inscrit dans l'ellipse. (On sait que, si l'on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle, tout polygone semi-régulier inscrit est par définition la projection d'un polygone régulier inscrit dans le cercle.) Il est même utile de remarquer qu'à toutes les valeurs de p ne correspondent que deux positions pour le polygone; car les valeurs de φ sont celles de la suite

$$0,\quad \frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

si p est pair, et celles de la suite

$$\frac{\pi}{n},\quad \frac{3\pi}{n},\quad \ldots,\quad \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

si p est impair.

On a donc le théorème suivant :

Si l'on considère une suite indéfinie de polygones, tels que chacun d'eux soit formé en joignant les milieux des côtés du précédent, ces polygones deviennent de plus en plus petits, et ils tendent à devenir semblables à des polygones semi-réguliers inscrits dans une ellipse.

Je laisserai de côté le cas exceptionnel où les formules (10) définiraient une droite; mais il sera bon d'examiner ce qui arriverait si R_1, S_1, T_1 étaient nuls simultanément. Alors, en supposant que R_ρ, S_ρ, T_ρ soient le premier groupe pour lequel les trois quantités R, S, T ne soient pas nulles, on sera conduit à substituer aux formules (9) les suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} x_k^p = 2R_\rho \cos\left(\dfrac{2k+p}{n}\rho\pi + \alpha_\rho\right)\cos^p\dfrac{\rho\pi}{n}, \\ y_k^p = 2S_\rho \cos\left(\dfrac{2k+p}{n}\rho\pi + \beta_\rho\right)\cos^p\dfrac{\rho\pi}{n}, \\ z_k^p = 2T_\rho \cos\left(\dfrac{2k+p}{n}\rho\pi + \gamma_\rho\right)\cos^p\dfrac{\rho\pi}{n}. \end{cases}$$

Ici encore tous les sommets du polygone seront sur une ellipse; mais les valeurs qu'il faudra donner à φ pour obtenir tous les sommets du polygone, étant représentées par la formule générale

$$\varphi = \frac{2k+p}{n}\rho\pi,$$

formeront une progression arithmétique dont la raison sera non plus $\frac{2\pi}{n}$, mais $\frac{2\rho\pi}{n}$. On aurait donc, si ρ est premier avec n, un polygone semi-régulier étoilé, obtenu en joignant de ρ en ρ les sommets du polygone convexe de n côtés, et si n et ρ ont un plus grand commun diviseur d un polygone de $\frac{n}{d}$ côtés, dont chaque sommet comptera pour d sommets distincts.

Tous ces résultats sont d'une extrême simplicité. Mais peut-être y avait-il quelque intérêt à indiquer le parti qu'on peut tirer de la transformation définie par les formules (2). Notre méthode s'appliquerait au cas où, au lieu de prendre les milieux des côtés du polygone, on diviserait ces côtés dans un rapport donné, à celui où l'on prendrait les centres de gravité des triangles formés par trois sommets consécutifs, etc.

Les formules (2) peuvent d'ailleurs nous conduire à une classification nouvelle et assez curieuse des polygones plans ou gauches. Les polygones réguliers ou semi-réguliers sont ceux pour lesquels, dans les expressions des coordonnées, subsistent seulement les termes relatifs à la racine $\omega_n = 1$ et à deux racines conjuguées ω_k, ω_{n-k}. Ces polygones formeraient une première classe. La suivante serait formée des polygones pour lesquels, aux termes précédemment indiqués, s'ajouteraient deux termes nouveaux correspondant également à deux racines nouvelles $\omega_{k'}$, $\omega_{n-k'}$. En continuant ainsi, on pourrait constituer une série de classes au nombre de $\frac{n}{2} - 1$ ou $\frac{n-1}{2}$, suivant que n serait pair ou impair, qui présenteraient tous les types intermédiaires entre le polygone régulier et le polygone le plus général.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GRUEY. — SUR LE BOLIDE DU 14 JUIN 1877. — Clermont-Ferrand, 1878. 60 pages.

On sait que les étoiles filantes sont formées de matière nébuleuse, qu'elles sont distribuées dans l'espace par essaims ayant la forme d'anneaux et appartenant à la famille des comètes; on connaît les lois de leur mouvement autour du Soleil et l'époque précise de réapparition de chacun des essaims principaux; on commence même à avoir quelques renseignements sur la distribution des étoiles filantes d'un même essaim.

Les bolides se distinguent immédiatement des étoiles filantes par leur aspect et par les circonstances de leur apparition. Quelquefois ils atteignent le sol, et alors on peut s'assurer qu'ils ne sont pas formés de matière nébuleuse, mais de roches analogues aux roches terrestres. Le plus souvent ils éclatent à une certaine hauteur au-dessus de l'horizon et disparaissent. Leur apparition étant assez rare, ils ne peuvent être observés qu'accidentellement; les observations sont généralement très-vagues, les observateurs étant surpris par l'apparition du bolide et ne pouvant que rarement rapporter avec précision le mouvement aux étoiles ou à des points fixes dont la position puisse être relevée ultérieurement.

Il serait d'une grande importance de réunir tous les renseignements un peu précis sur chaque bolide observé, et d'en déduire sa position et sa vitesse. M. Gruey l'a fait pour le bolide observé de divers points de la France le 14 juin 1877. Il a réuni huit observations faites en divers lieux dans des conditions de précision différentes, et en a déduit la trajectoire du bolide, supposée une section conique ayant le Soleil pour foyer. On commence par rapporter à l'équateur céleste les divers plans d'apparition : on en conclut le radiant, c'est-à-dire le point où se rencontrent ces divers plans; on calcule les azimuts et les hauteurs du point initial et du point final pour chaque lieu d'observation, et la vitesse du bolide pour l'un d'eux.

La vitesse relative à des axes fixes passant par le centre de la Terre, puis celle qui est relative à des axes fixes passant par le centre

du Soleil s'en déduisent facilement. La connaissance de cette dernière vitesse permet de déterminer les éléments de l'orbite décrite par le bolide autour du Soleil. M. Gruey trouve une hyperbole dont les asymptotes font un angle de $165^{\circ} 16'$. Il cite quelques calculs de bolides qui ont déjà donné des hyperboles, et indique cette conclusion que les bolides n'appartiendraient pas au système solaire.

Il serait sans doute prématuré de formuler une telle conclusion; ce résultat est cependant de nature à attirer l'attention sur les bolides, et doit encourager les astronomes à déterminer avec tout le soin possible les circonstances de leur mouvement. Le Mémoire de M. Gruey, en présentant tous les détails du calcul et de la discussion, facilitera la tâche aux calculateurs futurs, et pourra leur servir de modèle. B. B.

MÉLANGES.

SUR LES AIRES DES TRAJECTOIRES DÉCRITES DANS LE MOUVEMENT PLAN D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE;

Par M. V. LIGUINE,

Professeur à l'Université d'Odessa.

1. Dans l'étude géométrique du mouvement d'une figure plane invariable dans son plan, on s'est principalement occupé des relations qui ont lieu entre les tangentes, les normales et les rayons de courbure des trajectoires décrites par les différents points de la figure mobile, ainsi qu'entre les vitesses et les accélérations de divers ordres de ces points, et, au point de vue de ces problèmes, la théorie des mouvements plans constitue peut-être le chapitre le plus achevé de la Cinématique pure. Mais, en suivant un ordre de recherches généralement admis dans la géométrie des courbes, deux autres questions se présentent tout naturellement après celles des tangentes, des normales et des rayons de courbure des trajectoires : ce sont, d'une part, l'étude des relations qui ont lieu entre les *aires* des lignes engendrées par les différents points de la figure mobile dans un même mouvement plan, et, d'autre part, l'étude

des relations entre les *périmètres* de ces lignes. Le premier de ces deux intéressants problèmes a été, pendant les quarante dernières années, abordé à plusieurs reprises par divers savants, pour des cas plus ou moins particuliers, ce qui a conduit à un certain nombre de propriétés élégantes, mais peu répandues, relatives aux aires de quelques genres de roulettes. Tout récemment, deux géomètres anglais, MM. Leudesdorf et Kempe, ont de nouveau appelé l'attention sur cette question par la découverte de deux importants théorèmes d'un caractère plus général. Je me propose dans cette Note de résumer d'abord, dans un aperçu historique, les principaux résultats obtenus jusqu'à présent dans ce champ relativement peu cultivé de recherches, et de compléter ensuite, sous certains rapports, les travaux récents de MM. Leudesdorf et Kempe.

I.

2. Commençons par rappeler et établir quelques définitions, pour pouvoir ensuite abréger le discours.

Tout mouvement plan d'une figure invariable revient, comme on sait, à un roulement sans glissement d'une certaine ligne α, invariablement liée à la figure mobile, sur une autre ligne fixe β. Nous nommerons la première de ces deux lignes, lieu des points de la figure mobile qui coïncident successivement avec le centre instantané de rotation, le *centroïde mobile,* et la seconde, lieu des centres instantanés sur le plan fixe, le *centroïde fixe* (1). Toutes les trajectoires dans un mouvement plan peuvent donc être considérées comme engendrées par des points invariablement liés à une ligne α qui roule sur une autre ligne fixe β, et représentent par conséquent des *roulettes* dont β est la *base* et α la *courbe roulante.*

Lorsqu'un mouvement plan est tel que la figure mobile revient à la fin du déplacement à sa position primitive, je dirai que le mouvement est *fermé*. Cela peut arriver de deux manières distinctes, selon que la figure mobile accomplit un certain nombre N de révolutions complètes, ou qu'elle ne tourne que d'un angle θ moindre

(1) La dénomination concise de *centroïde* est due à M. Clifford. On dira de même *axoïdes* pour les lieux des axes instantanés dans l'espace.

que 2π et subit ensuite un mouvement de retour. Je distinguerai ces deux cas en disant que dans le premier le mouvement est *fermé continu,* et dans le second *fermé alternatif.* Il est évident que, dans tout mouvement fermé continu, les deux centroïdes α et β sont des courbes fermées et telles que leurs périmètres ont un rapport commensurable.

Enfin je dirai qu'une courbe fermée α accomplit un *roulement complet* sur une ligne β, lorsque α vient, à la fin de son roulement, toucher la ligne β par le même point par lequel il la touchait au commencement.

3. Les premières recherches sur les relations entre les aires des roulettes décrites dans le roulement relatif d'une même paire de courbes, ou, ce qui revient au même, entre les aires des trajectoires dans le mouvement plan, sont dues à Steiner et se trouvent exposées dans son admirable Mémoire *Sur le centre de gravité des courbures des courbes planes,* publié en 1840 ([1]). Le célèbre géomètre s'occupe dans ce Mémoire des trois questions principales que voici : 1° des relations entre les aires des différentes podaires Π d'une même courbe convexe α, prises par rapport aux différents points P du plan de la courbe; 2° des relations entre les aires des roulettes décrites, dans le roulement d'une courbe convexe α sur une droite fixe, par différents points invariablement liés à α; 3° des relations entre les aires des roulettes décrites, dans le roulement d'une courbe convexe α sur une courbe fixe β, par différents points liés à α. La solution de ces questions, développée par l'auteur, repose sur la considération d'un point particulier S du plan d'une courbe donnée, qui est le centre de gravité de cette courbe, lorsqu'on attribue à ses différents points des poids proportionnels aux courbures, ou inversement proportionnels aux rayons de courbure respectifs de la courbe en ces points. En vertu de cette propriété, le point en question a été nommé, par Steiner, *centre de gravité des courbures* (*Krümmungs-Schwerpunkt*) de la courbe donnée.

Je ne m'arrêterai pas sur les recherches de Steiner relatives à la première question, étrangère au sujet de cette Note, et je me bor-

---

([1]) *Von dem Krümmungs-Schwerpunkte ebener Curven.* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, herausgegeben von Crelle, t. XXI, 1840, p. 33-63, 101-133.)

nerai à en signaler seulement ce théorème élégant et bien connu : *L'aire d'une roulette décrite dans un roulement complet d'une courbe convexe et fermée* α *sur une droite fixe par un point quelconque* P *lié à* α *est double de l'aire de la podaire* Π *de* α *par rapport à* P. On doit entendre ici, ainsi que dans tous les théorèmes de Steiner, par l'aire d'une roulette l'aire comprise entre cette courbe, ses deux normales extrêmes et la ligne fixe β.

Pour ce qui concerne les deux autres questions, traitées séparément par Steiner, il suffira ici de résumer les résultats relatifs au cas général du roulement d'une courbe sur une autre courbe, puisque ceux qui se rapportent au roulement d'une courbe sur une droite n'en sont évidemment que des cas particuliers. Les deux propriétés les plus générales trouvées par Steiner relativement aux aires des roulettes peuvent être énoncées comme il suit :

1° *Si une courbe fermée et continuellement convexe* α *roule dans son plan sur une courbe quelconque fixe et convexe* β *jusqu'à ce qu'elle vienne à toucher la dernière par le même point qu'au commencement du mouvement, chaque point* P *lié invariablement à la courbe* α *décrit une figure [quadrilatère mixtiligne* (¹)*], dont l'aire* (p) *est minimum* (p_m) *quand le point décrivant coïncide avec le point* S_1 *qui représente le centre de gravité de la courbe* α*, lorsqu'on attribue à ses différents points des poids proportionnels aux sommes des angles de contingence des lignes* α *et* β *en leurs points correspondants ou proportionnels aux sommes des courbures correspondantes de ces deux lignes. Les points* P *également distants du centre de gravité* S_1*, c'est-à-dire situés sur une circonférence décrite de ce dernier point comme centre, engendrent des figures d'aire constante, et réciproquement ; l'excès de cette aire sur l'aire minimum* (p_m) *est toujours égal à l'aire du secteur circulaire qui a pour rayon la distance entre les points* P *et* S_1 *et pour angle au centre l'angle constant* φ*, formé par les normales à la courbe* β *aux extrémités de l'arc sur lequel a roulé la courbe* α*, augmenté de* 2π.

Ces propriétés découlent immédiatement des relations suivantes

---

(¹) Ce quadrilatère est formé par la trajectoire de P, ses deux normales extrêmes et la ligne β.

établies par Steiner par des considérations d'une nature tout à fait élémentaire :

$$(1)\quad \begin{cases} (p) = (\alpha) + \frac{1}{2}\Sigma\overline{P\gamma}^2(\varepsilon+\varepsilon_1) = (\alpha) + \frac{1}{2}\Sigma\overline{S_1\gamma}^2(\varepsilon+\varepsilon_1) + \frac{1}{2}(2\pi+\varphi)\overline{PS_1}^2, \\ (p_m) = (\alpha) + \frac{1}{2}\Sigma\overline{S_1\gamma}^2(\varepsilon+\varepsilon_1), \\ (p) = (p_m) + \frac{1}{2}(2\pi+\varphi)\overline{PS_1}^2, \end{cases}$$

(α) désignant l'aire de la courbe α, $P\gamma$ le rayon vecteur variable mené de P aux différents points γ de α, $S_1\gamma$ le rayon analogue pour le point S_1, ε et ε_1 les angles de contingence correspondants des lignes α et β.

Si la courbe α roule sur le côté concave de β, et si en deux points correspondants quelconques de ces deux courbes la première α a toujours une courbure plus grande que la seconde β, les relations (1) subsistent en y remplaçant seulement ε_1 et φ par $-\varepsilon_1$ et $-\varphi$. Un changement analogue rendrait ces formules applicables au cas où la courbe α, roulant toujours sur le côté concave de β, a en chaque point une courbure moindre que la base β au point correspondant.

Des propriétés semblables, mais plus générales, ont lieu quand on supprime la restriction que la courbe α soit fermée et accomplisse un roulement complet sur β.

2° *Si un arc courbe quelconque continuellement convexe $\alpha\alpha_1$ roule dans son plan sur le côté convexe d'un autre arc courbe fixe et continuellement convexe $\beta\beta_1$, chaque point P lié à $\alpha\alpha_1$ décrit une figure dont l'aire (p) est minimum et égale à (p_m), quand le point décrivant coïncide avec un point particulier S_2, qui peut être facilement construit lorsqu'on connaît la position du point S_1 du premier théorème relatif à l'arc $\alpha\alpha_1$, la corde h de cet arc $\alpha\alpha_1$, l'angle φ entre les normales à la courbe $\alpha\alpha_1$ menées en ses extrémités α et α_1, et l'angle ψ entre les normales à la ligne $\beta\beta_1$ menées en ses extrémités β et β_1. Les points P également distants du point S_2, c'est-à-dire situés sur une circonférence décrite de ce dernier point comme centre, engendrent des figures d'une aire constante, et réciproquement; cette aire surpasse l'aire minimum (p_m) de l'aire d'un secteur circulaire ayant la distance S_2P pour rayon, et dont l'angle au centre est égal à $\varphi+\psi$.*

Dans ce cas, les relations (1) sont remplacées par celles-ci :

$$(2)\quad \begin{cases} (p) = \mathrm{U} + \dfrac{1}{2}\Sigma\overline{\mathrm{P}\gamma}^2(\varepsilon+\varepsilon_1), \\ (p_m) = \mathrm{W} + \dfrac{1}{2}\Sigma\overline{\mathrm{S}\gamma}^2(\varepsilon+\varepsilon_1) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi\psi}{\varphi+\psi}\overline{\mathrm{SS}'}^2 - \dfrac{1}{4}h\left[2d + \dfrac{h}{2(\varphi+\psi)}\right], \\ (p) = (p_m) + \dfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\overline{\mathrm{PS}_2}^2, \end{cases}$$

où $\mathrm{P}\gamma$, ε, ε_1 ont la même signification que dans les formules (1); U désigne l'aire du secteur $\mathrm{P}\alpha\alpha_1\mathrm{P}$; W l'aire du segment compris entre l'arc $\alpha\alpha_1$ et sa corde; $\mathrm{S}\gamma$ le rayon vecteur variable mené aux différents points γ de $\alpha\alpha_1$ à partir du centre de gravité des courbures S relatif à l'arc $\alpha\alpha_1$; SS' la distance du point S au point S' qui représente le centre de gravité de l'arc $\alpha\alpha_1$ lorsqu'on attribue à ses différents points des poids proportionnels aux courbures de l'arc $\beta\beta_1$ aux points correspondants, et d la longueur de la perpendiculaire abaissée du point S_1 du premier théorème, pris relativement à l'arc $\alpha\alpha_1$ sur la corde $\alpha\alpha_1 = h$.

Le point particulier S_2 qui décrit la figure d'aire minimum s'obtient en prenant sur le prolongement de la perpendiculaire d, au delà de S_1, un point S_2, tel que l'on ait

$$(3)\qquad \mathrm{S}_1\mathrm{S}_3 = \frac{h}{2(\varphi+\psi)}.$$

La seule difficulté dans les applications des théorèmes I et II consistera dans la détermination du point S_1 et, plus généralement, du point S_2. Steiner signale plusieurs cas remarquables où le point S_2 peut être trouvé immédiatement. Parmi ces cas, le plus général est celui-ci :

3° *Lorsque chacune des deux courbes α, β est fermée, la courbe α est douée d'un centre, et les périmètres de ces courbes sont entre eux comme deux nombres entiers m, n premiers entre eux, m étant pair; et lorsque le roulement considéré de α sur β est un mouvement fermé continu, de manière que tous les points* P *engendrent des courbes fermées, alors le point* S_2 *coïncide avec le centre de la courbe roulante α.*

Dans ce cas, la troisième des formules (2) devient

$$(4)\qquad (p) = (p_m) + (m+n)\pi.\overline{\mathrm{PS}}_2^2.$$

Le théorème III et la formule (4) ont encore lieu quand la courbe α est une circonférence, le nombre entier m étant un nombre quelconque, pair ou impair, seulement différent de 1, les nombres m, n étant toujours premiers entre eux; ou quand, α ayant les propriétés énoncées dans le théorème III, la courbe β possède aussi un centre, et les nombres m, n sont tous deux impairs et toujours premiers entre eux.

Les théorèmes I et II se simplifient beaucoup lorsque la base β est une droite. Le point S_1 devient alors simplement le centre de gravité des courbures S de la courbe roulante, et le point S_2 s'obtient par une construction analogue à la construction exposée pour le cas général, mais en y remplaçant le point S_1 par S et la formule (3) par

$$SS_2 = \frac{h}{2\varphi}.$$

On voit ainsi que les résultats trouvés par Steiner donnent la loi cherchée de la variation des aires décrites par les différents points d'une figure plane mobile dans son plan, pour un nombre très-étendu, mais toujours limité, de mouvements plans, savoir lorsque les deux centroïdes α et β de ces mouvements sont des courbes continuellement convexes, le déplacement de la figure pouvant d'ailleurs être fermé ou quelconque. Pour résoudre la question dans toute sa généralité, il restait à étudier les cas plus complexes où les centroïdes α, β du mouvement sont arbitraires, ce qui, comme on le verra, n'a encore réussi complétement aux géomètres qui se sont occupés du sujet après Steiner que pour le cas des mouvements plans fermés.

4. C'est M. Gilbert qui paraît s'être occupé le premier, d'une manière tout à fait générale, de la question sur les aires des trajectoires dans le mouvement plan, dans une *Note sur les aires des roulettes,* qui termine son beau Mémoire intitulé : *Recherches sur les propriétés géométriques des mouvements plans* (1). Il y énonce le théorème très-simple et très-fécond que voici :

Désignons par (*p*) *l'aire comprise entre la courbe fixe* β, *la*

(1) *Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles,* t. XXX, présenté à l'Académie le 7 novembre 1857.

trajectoire d'un point P, *et deux normales à cette dernière ; par* U *le secteur compris, sur la figure mobile, entre les positions correspondantes de ces normales et la courbe roulante* α ; *par* V *enfin le secteur correspondant dans une courbe décrite en prenant pour rayon vecteur la normale variable à la trajectoire et pour angle polaire l'angle dont la figure mobile a tourné à partir de sa position primitive jusqu'à la position que l'on considère. On aura*

$$(5) \qquad (p) = \text{U} \pm \text{V},$$

suivant que la rotation de la normale dans la figure mobile et sa rotation autour du centre instantané ont lieu en sens contraire ou dans le même sens.

On voit immédiatement que la relation (5) est une généralisation de la première des formules (2) de Steiner, U ayant la même signification dans les deux équations, et V étant exprimé par

$$\frac{1}{2}\Sigma\overline{\text{P}\gamma}^2\, d\omega,$$

où $d\omega$ désigne l'angle de rotation instantanée de la figure mobile, angle qui est évidemment égal à la somme ou à la différence des angles de contingence ε, ε_1 des deux centroïdes α, β aux points correspondants.

Ajoutons que chaque fois que le centroïde mobile α est fermé et que l'on considère un roulement complet de α sur β, le secteur U est égal à l'aire totale (α) de la courbe roulante.

5. Peu après la publication du théorème de M. Gilbert, des considérations d'un tout autre ordre conduisirent un auteur anglais, M. Holditch, à un théorème très-particulier (¹), mais qui, généralisé ensuite de plus en plus par d'autres géomètres, amena récemment à des propriétés très-étendues et très-importantes, relatives aux aires des roulettes. Le théorème de M. Holditch s'énonce ainsi :

Lorsqu'une corde d'une longueur donnée et invariable se meut dans une courbe fermée en parcourant la circonférence totale de la courbe par ses extrémités A, B, *et si l'on considère la courbe*

(¹) *Lady's and Gentleman's Diary for the Year* 1858.

décrite par un point P *de cette corde qui la divise en deux parties* $AP = c_1$, $BP_2 = c_2$, *l'aire comprise entre les deux courbes fermées est égale à* $\pi c_1 c_2$.

Une première généralisation de ce théorème fut énoncée par M. Williamson dans son *Traité élémentaire de Calcul intégral* (¹). Considérons une droite invariable; soient A, B, P trois points de cette droite, tels que le point P partage la distance AB en deux parties $AP = c_1$, $PB = c_2$; soient enfin (A), (B), (P) les aires *totales* limitées par les courbes fermées, décrites respectivement par les points A, B, P dans un mouvement fermé continu de la droite (²); il existe alors, comme l'a démontré M. Williamson, la relation

$$(P) = \frac{(A)c_2 + (B)c_1}{c_1 + c_2} - \pi c_1 c_2. \tag{6}$$

En supposant que les deux points A, B décrivent une même courbe dont l'aire est (A), on retombe évidemment sur le théorème de M. Holditch.

Plus tard, M. Elliott (³) donna l'extension de la relation (6) au cas où les distances entre les points A, B, P varient pendant le mouvement, de manière que le rapport des segments AP, PB reste constant et égal à $c_1 : c_2$. La formule (6) est alors remplacée par celle-ci :

$$(P) = \frac{(A)c_2 + (B)c_1}{c_1 + c_2} - \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} k,$$

k étant l'aire décrite par AB relativement au point A, c'est-à-dire l'aire limitée par la trajectoire d'un point qui se trouve constam-

---

(¹) *An elementary Treatise on the Integral Calculus*, by Benjamin Williamson, M. A. London, Longmans, 1877, p. 200.

(²) On remarquera la différence entre ces aires et celles dont il a été question plus haut, considérées par Steiner et M. Gilbert. Pour les distinguer, nous désignons l'aire *totale* comprise dans la courbe fermée, décrite par un point P de la figure mobile pendant un mouvement fermé de cette dernière par la même majuscule ordinaire mise entre parenthèses (P), et l'aire entre la même courbe et le centroïde fixe β par la minuscule correspondante entre parenthèses (p). Il est clair, d'ailleurs, qu'il ne peut être question des aires (P) que dans le seul cas des mouvements fermés.

(³) *A theorem in areas including Holditch's, with its analogue in three dimensions*. (*The Messenger of Mathematics*, t. VII, 1878, p. 150.)

ment situé par rapport à un point fixe, comme B est situé par rapport à A.

Une généralisation d'un autre ordre et beaucoup plus importante du théorème de M. Williamson fut énoncée par M. Leudesdorf dans un Mémoire intitulé : *Theorem in Kinematics* (¹). Du moins, il paraît très-probable que ce nouveau théorème, fondamental dans la question des aires engendrées dans le mouvement plan fermé d'une figure plane invariable, a été suggéré à M. Leudesdorf par la considération de la relation (6). Soient A, B, C trois points de la figure mobile non situés en ligne droite, P un quatrième point de cette figure, X, Y, Z les coordonnées triangulaires du point P par rapport au triangle de référence ABC $\left(X = \frac{BPC}{ABC}, Y = \frac{APC}{ABC}, Z = \frac{APB}{ABC}\right)$, et BC $= a$, AC $= b$, AB $= a$; alors, si l'on désigne par (A), (B), (C), (P) les aires totales des trajectoires décrites par les points A, B, C, P dans un mouvement fermé de la figure mobile, ces aires sont liées par la relation

$$(7) \qquad (A)X + (B)Y + (C)Z = (P) + \pi(a^2YZ + b^2XZ + c^2XY)$$

ou

$$(8) \qquad (P) = (A)X + (B)Y + (C)Z + \pi t^2,$$

t^2 étant le carré de la tangente menée du point P au cercle qui passe par A, B, C. Telle est la forme sous laquelle M. Leudesdorf énonça primitivement son théorème; sa démonstration suppose que la figure mobile, pour retourner à sa position initiale, subit une révolution complète de zéro à 2π dans le plan fixe. M. Kempe fit bientôt la remarque (²) que cette restriction n'est pas nécessaire. La figure peut revenir à sa position primitive, soit en ayant subi un nombre entier quelconque N de révolutions complètes, soit en n'ayant tourné que d'un angle θ moindre que 2π et accompli ensuite un mouvement de retour. Dans le premier cas, celui d'un mouvement fermé continu, le dernier terme du second membre dans les formules (7) et (8) doit être affecté du facteur N, et dans le second, celui d'un mouvement fermé alternatif, ce terme disparaît, N étant

(¹) *The Messenger of Mathematics*, t. VII, 1877, p. 125.
(²) *Note on Mr. Leudesdorf's theorem in Kinematics.* (*Ibid.*, p. 165).

égal à zéro. On a donc définitivement

$$(9) \qquad (A)X + (B)Y + (C)Z = (P) + N\pi(a^2YZ + b^2XZ + c^2XY)$$

ou

$$(10) \qquad (A)X + (B)Y + (C)Z = (P),$$

suivant que le mouvement fermé se compose de N révolutions complètes ou d'une révolution partielle et d'un mouvement de retour, les formules (7) et (8) ayant lieu dans le seul cas de $N = 1$.

6. Le théorème de M. Leudesdorf conduit immédiatement à un corollaire très-intéressant relatif à la distribution sur le plan mobile des points qui décrivent des aires données sur le plan fixe dans un mouvement fermé quelconque, corollaire qui fut énoncé par M. Kempe ([1]), bientôt après la publication de la relation (7), dans les termes suivants : *Lorsqu'un plan qui glisse sur un autre plan fixe se meut à partir d'une position déterminée d'une manière quelconque, en faisant un certain nombre de révolutions complètes, et revient à sa position initiale, on peut trouver dans le plan mobile une circonférence dont tous les points décrivent sur le plan fixe des courbes d'aire nulle, et, si l'on prend dans le plan mobile une autre circonférence quelconque, concentrique à la première, les aires décrites par tous les points de cette nouvelle circonférence sont constantes et proportionnelles à l'aire comprise entre cette circonférence et celle des aires nulles. Dans le cas où le plan revient à sa position initiale sans avoir accompli une révolution complète, le système des circonférences concentriques est remplacé par un système de droites parallèles, l'aire décrite par un point d'une droite quelconque étant proportionnelle à la distance entre cette droite et la droite des aires nulles.* Les aires dont il s'agit ici sont toujours les aires totales embrassées par les trajectoires fermées.

Dans une Note postérieure sur le même sujet ([2]), M. Kempe a

---

([1]) *A theorem in Kinematics.* (*Ibid.*, p. 190.)

([2]) *A kinematical Theorem.* (*Nature*, t. XVIII, n° 449, année 1878, p. 148; *voir* aussi *Messenger*, t. VIII, p. 42.)

donné, pour le cas de N révolutions complètes, la formule

$$(11) \qquad (\mathrm{P}) = \mathrm{N}\pi(r^2 - q^2),$$

(P) étant l'aire décrite par un point P du plan mobile qui se trouve à une distance r du centre des circonférences concentriques, et q désignant le rayon de la circonférence dont tous les points engendrent des aires égales à zéro et que nous nommerons la *circonférence des aires nulles*. Cette formule exprime que l'aire décrite par un point P de la figure mobile est égale à N fois l'aire de l'anneau compris entre la circonférence des aires nulles et la circonférence concentrique passant par P. Il faut ajouter que, dans ces considérations, les aires des courbes analogues à la figure d'un 8, ainsi que celles des trajectoires décrites par un mouvement de va-et-vient, sont regardées comme égales à zéro; car, dans le premier cas, l'aire est composée de deux parties égales et de signes contraires, et, dans le second, une même ligne non fermée est parcourue deux fois en sens inverse.

Je ferai voir, dans la suite de ce travail, que le théorème de M. Kempe, pour être applicable à tous les cas, doit être modifié et complété sous plusieurs rapports. Toutefois ces modifications ne touchent pas à la partie relative à la distribution des points engendrant des aires égales sur des circonférences concentriques. En n'y considérant que cette partie et en la comparant aux théorèmes de Steiner énoncés plus haut, on remarquera la différence entre les résultats des deux géomètres. Le théorème de M. Kempe n'implique, relativement à la forme des deux centroïdes du mouvement, que la seule restriction que ces courbes soient toutes deux fermées et aient des périmètres dont le rapport soit commensurable. Les propriétés dues à Steiner ont lieu pour des centroïdes fermés ou non fermés, mais continuellement convexes. Ensuite les aires dont il s'agit chez les deux auteurs ne sont pas les mêmes : M. Kempe considère l'aire totale de la trajectoire fermée; Steiner n'en considère qu'une partie comprise entre cette trajectoire et le centroïde fixe β, ces deux espèces d'aires ne différant d'ailleurs entre elles que d'une quantité constante, qui est l'aire totale de la courbe β ou un multiple de cette aire.

Quoi qu'il en soit, autant qu'il s'agit des mouvements plans fermés, le théorème de M. Kempe, modifié comme on le verra plus

loin, est complétement général et du même ordre d'importance pour l'étude des aires des trajectoires dans les mouvements fermés, que les théorèmes connus sur l'existence du centre instantané de rotation, des centres des accélérations, de la circonférence des inflexions, etc., le sont pour l'étude des vitesses, des accélérations, des courbures des trajectoires, etc.

Tels sont les principaux résultats obtenus relativement aux aires des trajectoires dans les mouvements plans. J'ai l'intention, dans ce qui va suivre, d'ajouter à cette étude quelques développements dont voici une analyse succincte.

7. Je m'occupe d'abord du théorème de M. Kempe. Je développe l'équation du système des circonférences concentriques en coordonnées cartésiennes rectangulaires, et je trouve les expressions pour les coordonnées de leur centre commun Z, et pour le rayon de la circonférence dont les points engendrent des aires d'une grandeur assignée k. J'indique les limites entre lesquelles k peut varier dans un mouvement donné, et je démontre une nouvelle propriété remarquable du point Z, qui consiste en ce que ce point décrit toujours l'aire minimum. Je passe ensuite à la circonférence des aires nulles, et je fais voir que cette circonférence n'existe pas en réalité dans tout mouvement plan fermé continu, comme l'admet M. Kempe dans l'énoncé de son théorème; au contraire, dans un grand nombre de cas, il n'y a pas de points dans le plan mobile qui engendrent des aires égales à zéro, ce qui prouve en même temps que ce n'est pas à la circonférence des aires nulles, mais plutôt au point Z (existant toujours) qu'appartient le rôle principal dans l'étude des relations entre les aires des trajectoires. Je donne les conditions de l'existence réelle de la circonférence des aires nulles et je démontre que, dans les cas où elle devient imaginaire, la formule (11) de M. Kempe pour la détermination d'une aire (A) décrite par un point A, situé à une distance r de Z, subsiste en y remplaçant la différence $r^2 - q^2$ par la somme $r^2 + q^2$, q désignant maintenant le coefficient réel de l'expression que l'on trouve pour le rayon du cercle imaginaire.

Après avoir appliqué ces résultats à quelques exemples, je considère le cas $N = 0$, c'est-à-dire celui d'un mouvement fermé alternatif, et je trouve l'équation en coordonnées rectangulaires du

système des droites parallèles et celle de la droite des aires nulles, qui remplacent dans ce cas les circonférences concentriques et la circonférence des aires nulles.

Je donne ensuite une nouvelle démonstration très-simple et purement géométrique du théorème de M. Leudesdorf, fondée sur la notion du centre instantané; enfin je termine par quelques observations sur l'application pratique du théorème VI de M. Williamson à la quadrature des courbes fermées.

II.

8. Pour trouver le lieu des points P du plan mobile qui, dans un mouvement fermé continu de ce plan, engendrent des figures d'une aire constante égale à k, il faut poser $(P) = \text{const.} = k$ dans l'équation (9). La relation

$$(12)\quad N\pi(a^2YZ + b^2XZ + c^2XY) - (A)X - (B)Y - (C)Z + k = 0$$

est donc l'équation du lieu cherché en coordonnées triangulaires X, Y, Z relatives au triangle de référence ABC. Pour discuter cette équation, il est préférable d'y remplacer X, Y, Z par les coordonnées cartésiennes rectangulaires. A cet effet, remarquons d'abord qu'en posant $PA = a'$, $PB = b'$, $PC = c'$, on a [1]

$$a^2YZ + b^2XZ + c^2XY = a'^2X + b'^2Y + c'^2Z,$$

et que, par conséquent, l'équation (12) peut être mise sous la forme

$$(13)\quad N\pi(a'^2X + b'^2Y + c'^2Z) - (A)X - (B)Y - (C)Z + k = 0.$$

Soient maintenant respectivement x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées cartésiennes des points P, A, B, C, par rapport à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, pris d'une manière quelconque dans le plan mobile et invariablement liés à ce plan. En désignant par S l'aire du triangle ABC et par $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\gamma$ les aires

---

[1] *Voir* le Mémoire de M. Leudesdorf (*Messenger*, t. VII, p. 216).

des triangles OBC, OAC, OAB, ce qui revient à poser

$$(14) \qquad x_2 y_3 - x_3 y_2 = \alpha, \quad x_3 y_1 - x_1 y_3 = \beta, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 = \gamma,$$

$$(15) \qquad \alpha + \beta + \gamma = 2S,$$

on aura évidemment

$$(16) \quad \begin{cases} X = \dfrac{x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + \alpha}{2S}, \\[2mm] Y = \dfrac{x(y_3 - y_1) - y(x_3 - x_1) + \beta}{2S}, \\[2mm] Z = \dfrac{x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + \gamma}{2S}. \end{cases}$$

D'ailleurs

$$(17) \quad \begin{cases} a'^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2, \\ b'^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2, \\ c'^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2. \end{cases}$$

Enfin, soient encore

$$OA = r_1, \quad OB = r_2, \quad OC = r_3,$$

ou

$$(18) \qquad x_1^2 + y_1^2 = r_1^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = r_2^2, \quad x_3^2 + y_3^2 = r_3^2.$$

En portant les valeurs (16) et (17) dans l'équation (13), on obtient, eu égard aux relations (14), (15), (18), et toutes réductions faites, l'équation du lieu cherché en coordonnées rectangulaires x, y sous la forme

$$(19) \quad \begin{cases} 2N\pi S(x^2 + y^2) + \big\{[(A) - N\pi r_1^2](y_2 - y_3) + [(B) - N\pi r_2^2](y_3 - y_1) \\ \qquad\qquad + [(C) - N\pi r_3^2](y_1 - y_2)\big\}x \\ \quad - \big\{[(A) - N\pi r_1^2](x_2 - x_3) + [(B) - N\pi r_2^2](x_3 - x_1) \\ \qquad\qquad + [(C) - N\pi r_3^2](x_1 - x_2)\big\}y \\ \quad + [(A) - N\pi r_1^2]\alpha + [(B) - N\pi r_2^2]\beta \\ \qquad\qquad + [(C) - N\pi r_3^2]\gamma - 2kS = 0. \end{cases}$$

Ce lieu est donc une circonférence. Si l'on attribue à la constante k différentes valeurs particulières, l'équation (19) représente un système de circonférences concentriques. En d'autres termes, les points du plan mobile qui engendrent des figures d'aire constante

sont distribuées dans ce plan sur des circonférences concentriques, dont chacune correspond à une valeur déterminée de k, ce qui constitue une partie du théorème de M. Kempe. On trouve, pour les coordonnées ξ, η du centre commun Z de ces circonférences, les expressions

$$(20)\quad \begin{cases} \xi = -\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(A)-N\pi r_1^2}{N\pi S}(y_2-y_3)+\dfrac{(B)-N\pi r_2^2}{N\pi S}(y_3-y_1)+\dfrac{(C)-N\pi r_3^2}{N\pi S}(y_1-y_2)\right], \\ \eta = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(A)-N\pi r_1^2}{N\pi S}(x_2-x_3)+\dfrac{(B)-N\pi r_2^2}{N\pi S}(x_3-x_1)+\dfrac{(C)-N\pi r_3^2}{N\pi S}(x_1-x_2)\right], \end{cases}$$

et pour le rayon R de la circonférence, dont les points engendrent des figures d'une aire égale à k,

$$(21)\quad R = \sqrt{\xi^2+\eta^2-\left[\dfrac{(A)-N\pi r_1^2}{2N\pi S}\alpha+\dfrac{(B)-N\pi r_2^2}{2N\pi S}\beta+\dfrac{(C)-N\pi r_3^2}{2N\pi S}\gamma-\dfrac{k}{N\pi}\right]}.$$

9. Les formules (20) montrent que le point remarquable Z, centre des circonférences concentriques (19), existe toujours et se trouve à distance finie tant que N est différent de zéro, c'est-à-dire dans tout mouvement fermé continu, et que la détermination de ce point exige, en général, la connaissance des aires (A), (B), (C) décrites par trois points A, B, C de la figure mobile non situés en ligne droite. Ce point Z jouit encore d'une propriété importante qui sera démontrée plus loin.

Dans certains cas particuliers, le point Z peut être reconnu immédiatement sans aucune recherche. C'est ce qui arrive, par exemple, pour tout mouvement fermé continu dont les deux centroïdes sont des circonférences; car il est visible qu'alors les points de chaque circonférence concentrique au cercle roulant engendrent des courbes identiques entre elles et renfermant, par conséquent, des aires égales; donc le point Z est le centre du cercle roulant.

Pour pouvoir discuter l'expression de R (21), tâchons d'abord de la mettre sous une forme plus simple. Puisque le point Z existe toujours et se trouve à distance finie, rien n'empêche d'y transporter l'origine des axes Ox, Oy, qui a été prise dans le plan mobile d'une manière tout à fait arbitraire. Mais alors

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

et les équations (19), (21) se réduisent à

$$(22)\quad x^2+y^2=\frac{k}{N\pi}-\left[\frac{(A)-N\pi r_1^2}{2N\pi S}\alpha+\frac{(B)-N\pi r_2^2}{2N\pi S}\beta+\frac{(C)-N\pi r_3^2}{2N\pi S}\gamma\right],$$

$$(23)\quad R=\sqrt{\frac{k}{N\pi}-\left[\frac{(A)-N\pi r_1^2}{2N\pi S}\alpha+\frac{(B)-N\pi r_2^2}{2N\pi S}\beta+\frac{(C)-N\pi r_3^2}{2N\pi S}\gamma\right]},$$

r_1, r_2, r_3 désignant maintenant les distances des points A, B, C au point Z. Imaginons ces trois points A, B, C pris sur une même circonférence ayant Z pour centre et r pour rayon; dans ce cas, $r_1 = r_2 = r_3 = r$, et, d'après ce qui a été trouvé plus haut,

$$(A) = (B) = (C).$$

La formule (23) devient donc, eu égard à la relation (15),

$$(24)\quad R=\sqrt{\frac{k-[(A)-N\pi r^2]}{N\pi}},$$

où r est la distance du point A au point Z.

Cette expression n'est pas toujours réelle; elle devient imaginaire dans les cas suivants :

1° Si $(A)>0$, $(A)>N\pi r^2$ pour les valeurs de k positives et moindres que $(A)-N\pi r^2$, et pour les valeurs de k négatives et quelconques;

2° Si $(A)>0$, $(A)<N\pi r^2$, pour les valeurs de k négatives et numériquement plus grandes que $N\pi r^2-(A)$;

3° Si $(A)<0$, pour les valeurs de k négatives et numériquement plus grandes que $N\pi r^2-(A)$, une aire quelconque (A) étant regardée comme positive ou comme négative, suivant qu'elle est décrite dans un sens identique ou contraire à celui du mouvement considéré de la figure mobile.

Cette discussion conduit facilement aux conclusions suivantes :

Quand on prend à volonté, parmi les différentes aires engendrées dans un mouvement fermé continu déterminé, composé de N révolutions complètes, une aire (A) décrite par un point A du plan mobile situé à une distance r du point Z, alors : 1° si $(A)>0$ et $(A)>N\pi r^2$, c'est-à-dire si l'aire (A) est positive et plus grande que N fois l'aire du cercle de rayon r, les aires décrites par les différents points du plan mobile sont toutes positives et ne peuvent

pas être moindres que la différence $(A) - N\pi r^2$; 2° si $(A) > 0$ et $(A) < N\pi r^2$, ou si $(A) < 0$, c'est-à-dire si l'aire (A) est positive et moindre que N fois l'aire du cercle de rayon r, ou bien si (A) est négative et d'ailleurs quelconque, les aires décrites par les points du plan mobile sont en partie positives et en partie négatives, les aires positives pouvant être d'une grandeur quelconque et les aires négatives ne pouvant pas surpasser numériquement la différence $N\pi r^2 - (A)$. Il s'ensuit que, dans tout mouvement fermé continu, l'aire décrite minimum k_m est

(25) $$k_m = (A) - N\pi r^2.$$

En prenant pour le point A le point Z, pour lequel $r = 0$, et en désignant par (Z) l'aire engendrée par ce point, on trouve

$$(Z) = k_m.$$

En d'autres termes, le *point* Z jouit de cette remarquable propriété qu'*il décrit l'aire minimum*. La relation (25) peut encore s'écrire

(26) $$(A) = (Z) + N\pi r^2,$$

formule très-simple, qui relie les aires décrites par le point Z et par un point quelconque A de la figure; elle exprime que l'aire engendrée par un point A excède l'aire minimum engendrée par le point Z de N fois l'aire d'un cercle ayant la distance des points A et Z pour rayon.

10. Passons maintenant à la circonférence des aires nulles. On obtient le rayon R_0 de cette circonférence en posant $k = 0$ dans la formule (24), ce qui donne

(27) $$R_0 = \sqrt{\frac{N\pi r^2 - (A)}{N\pi}}.$$

Lorsque l'aire (A) est négative et quelconque, ou positive et moindre que $N\pi r^2$, cette expression a une valeur réelle q; mais, si l'aire (A) est positive et plus grande que $N\pi r^2$, on trouve pour R_0 une valeur imaginaire

(28) $$R_0 = \sqrt{-\frac{(A) - N\pi r^2}{N\pi}} = q\sqrt{-1},$$

q désignant toujours une quantité réelle; dans ce dernier cas, la circonférence des aires nulles n'existe plus. Donc il existe dans le plan mobile des points qui engendrent des aires nulles, et qui se trouvent alors sur une circonférence ayant Z pour centre et q pour rayon, lorsque, (A) étant une aire décrite par un point quelconque du plan situé à une distance r du point Z, cette aire est négative et quelconque, ou positive et moindre que N fois l'aire du cercle de rayon r; si, au contraire, l'aire (A) est positive et plus grande que N fois l'aire du cercle de rayon r, tous les points du plan engendrent des aires différentes de zéro. Enfin, si $(A) = N\pi r^2$, la formule (27) donne $R_0 = 0$; la circonférence des aires nulles se réduit au point Z.

Les formules (24) et (27) font voir que, pour pouvoir déterminer le rayon R de la circonférence, lieu des points du plan mobile décrivant des aires égales à k, et, en particulier, le rayon R_0 de la circonférence des aires nulles, si cette circonférence existe, il faut connaître l'aire (A) décrite par un point quelconque du plan.

Quand la circonférence des aires nulles a une existence réelle, on tire de (27), en désignant par q la valeur réelle de son rayon,

$$(29) \qquad (A) = N\pi(r^2 - q^2).$$

C'est la formule (11) de M. Kempe, qui exprime que l'aire décrite par un point quelconque A du plan mobile est égale à l'aire de l'anneau compris entre la circonférence des aires nulles et la circonférence concentrique qui passe par le point A. Mais, lorsque la circonférence des aires nulles est imaginaire, la formule (29) n'a plus lieu; il vient alors, d'après la formule (28),

$$(30) \qquad (A) = N\pi(r^2 + q^2),$$

q désignant maintenant le coefficient réel de l'expression imaginaire pour R_0.

L'équation (29) admet encore une autre interprétation géométrique. Pour tout point du plan mobile extérieur à la circonférence des aires nulles, (A) est positive, et la différence $r^2 - q^2$ est égale au carré de la tangente t menée du point A à cette circonférence. Pour tout point intérieur, (A) est négative, et la différence $q^2 - r^2$ représente le carré de la tangente t_1 menée à la circonférence passant par A, en ce point, jusqu'à la rencontre avec la circonférence

des aires nulles. Donc, en désignant par A, A′ deux points du plan et par t, t' ou t_1, t'_1 les tangentes correspondantes, on a, d'après (29), pour les points extérieurs,

$$(A):(A') = t^2 : t'^2,$$

et pour les points intérieurs

$$(A):(A') = t_1^2 : t_1'^2.$$

Les aires décrites par les différents points A, A′, ... du plan mobile, quand la circonférence des aires nulles existe, sont donc entre elles comme les carrés des tangentes t, t', ..., ou t_1, t'_1, ..., suivant que ces points se trouvent à l'extérieur ou dans l'intérieur de la circonférence des aires nulles.

Si l'on pose $r = 0$ dans la formule (29), on trouve la relation

$$(Z) = -N\pi q^2,$$

qui servira à déterminer l'aire minimum décrite par le point Z dans les cas où l'on connaît *a priori* le rayon de la circonférence des aires nulles.

11. Appliquons ces résultats à quelques exemples.

(*a*) *Mouvement cardioïdal.* — Supposons que le plan mobile soit entraîné dans le roulement d'une circonférence de rayon ρ sur une autre circonférence égale à la première. Dans ce cas, si l'on considère un roulement complet, $N = 2$, et, d'après une remarque faite plus haut, le point Z coïncide avec le centre du cercle roulant. L'aire minimum (Z) est donc l'aire positive du cercle de rayon 2ρ engendré par ce centre; par conséquent $(Z) = 4\pi\rho^2$. Tout point A situé sur la circonférence mobile décrit une cardioïde; la formule (26) donne pour l'aire (A) de cette courbe, en y faisant $r = \rho$,

$$(A) = 6\pi\rho^2,$$

résultat connu. L'aire (A) étant positive et plus grande que $N\pi r^2$, toutes les autres aires le sont aussi. La circonférence des aires nulles est imaginaire; le coefficient réel q de l'expression (28) est égal à $\rho\sqrt{2}$. L'aire décrite par un point A′ situé à une distance p du centre Z est donc, d'après la formule (30),

$$(A') = 2\pi(p^2 + 2\rho^2),$$

ce qu'on trouverait aussi au moyen de la formule (26).

(*b*) *Mouvement hypocycloïdal de Cardan* [1]. — Considérons le mouvement plan fermé produit par un roulement complet d'une circonférence de rayon ρ dans l'intérieur d'une circonférence de rayon double. Actuellement $N = 1$. Le point Z est de nouveau au centre du cercle roulant; l'aire minimum (Z) est donc $-\pi\rho^2$, la circonférence de cette aire étant parcourue dans un sens opposé à celui du mouvement de la figure. Un point quelconque A situé à une distance p de Z décrit une ellipse dont l'aire (A) est donnée par la formule (26); cette aire est

$$(A) = -\pi(\rho^2 - p^2) \quad \text{ou} \quad A = \pi(p^2 - \rho^2),$$

suivant que A est dans l'intérieur ou l'extérieur du cercle roulant. Dans le premier cas $(A) < 0$, et dans le second

$$(A) > 0 \quad \text{et} \quad (A) < N\pi r^2;$$

donc les points de la figure mobile engendrent des aires positives de toutes grandeurs et des aires négatives qui numériquement ne surpassent pas $\pi\rho^2$. La circonférence des aires nulles existe; on trouve pour son rayon

$$R_0 = \rho;$$

elle coïncide donc avec la circonférence roulante, ce qui était facile à reconnaître *a priori*, car on sait que tous les points de cette circonférence oscillent sur des diamètres du cercle fixe.

(*c*) *Rotation autour d'un point fixe*. — Dans ce cas, pour un tour complet, $N = 1$. Le point Z coïncide évidemment avec le point fixe, $(Z) = 0$, et pour tout autre point A, situé à une distance r de Z, $(A) = \pi r^2$. La circonférence des aires nulles se réduit au centre de rotation.

12. Il reste à examiner le cas particulier d'un mouvement fermé alternatif. Dans ce cas $N = 0$ et l'équation (12) du lieu des points du plan mobile qui engendrent des figures d'aire const. $= k$ se trouve remplacée par la plus simple

$$(A)X + (B)Y + (C)Z - k = 0. \tag{31}$$

---

[1] Pour justifier cette dénomination, on se rappellera qu'une des principales propriétés du mouvement dont il s'agit ici a été découverte par Cardan.

Pour avoir l'équation de ce lieu en coordonnées rectangulaires, il suffit de poser $N = 0$ dans l'équation (19); on trouve

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &[(A)(y_2-y_3)+(B)(y_3-y_1)+(C)(y_1-y_2)]x\\ &-[(A)(x_2-x_3)+(B)(x_3-x_1)+(C)(x_1-x_2)]y\\ &\qquad+(A)\alpha+(B)\beta+(C)\gamma-2kS=0.\end{aligned}\right.$$

Le lieu cherché est donc une droite. Si l'on attribue à la constante k différentes valeurs particulières, l'équation (32) représente un système de droites parallèles, le long desquelles se trouvent distribués dans le plan mobile les points décrivant des figures d'aires constantes. Il existe, en général, une droite à distance finie pour chaque valeur finie positive ou négative de k. Parmi ces droites il y en a une qui correspond à $k = 0$; l'équation de cette *droite des aires nulles* est

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &[(A)(y_2-y_3)+(B)(y_3-y_1)+(C)(y_1-y_2)]x\\ &-[(A)(x_2-x_3)+(B)(x_3-x_1)+(C)(x_1-x_2)]y\\ &\qquad+(A)\alpha+(B)\beta+(C)\gamma=0.\end{aligned}\right.$$

Pour pouvoir déterminer une des droites (32) ou, en particulier, la droite des aires nulles (33), il faut connaître les aires (A), (B), (C) décrites par trois points A, B, C du plan mobile non situés en ligne droite.

En désignant par τ l'angle formé par les droites (32) avec l'axe des abscisses, l'aire (P) engendrée par un point quelconque P, situé à une distance δ de la droite des aires nulles (33), est donnée par la formule

$$(P)=\frac{(A)(x_2-x_3)+(B)(x_3-x_1)+(C)(x_1-x_2)}{2S\cos\tau}\delta,$$

ou, si l'on prend l'axe des abscisses parallèle aux droites (32),

$$(34)\qquad (P)=\frac{(A)(x_2-x_3)+(B)(x_3-x_1)+(C)(x_1-x_2)}{2S}\delta.$$

L'aire (P) est donc proportionnelle à la distance δ du point décrivant P à la droite des aires nulles, ce qui est conforme à l'énoncé de M. Kempe.

Le mouvement de la bielle dans la transmission ordinaire par bielle et manivelle fournit un exemple simple du mouvement fermé

alternatif. La bielle oscille de part et d'autre de sa position moyenne, en décrivant par l'une de ses extrémités une circonférence dont l'aire est πf^2, f désignant la longueur de la manivelle, et par l'autre extrémité une droite, dont l'aire est nulle. Cette seconde extrémité est donc un des points de la droite des aires nulles, dont nous omettons ici la détermination complète. Les points de la bielle elle-même et de son prolongement au delà du bouton de la manivelle décrivent des aires positives, et les points de son prolongement au delà de l'articulation qui la relie à la tige guidée engendrent des aires négatives.

13. En résumant tout ce qui vient d'être dit sur les relations entre les aires décrites dans un mouvement fermé continu ou alternatif, on voit que le théorème de M. Kempe (n° 6) doit être remplacé par celui-ci :

Quand une figure plane se meut dans son plan à partir d'une position donnée et revient vers la fin du déplacement à sa position initiale, après avoir accompli un certain nombre N de révolutions complètes, tous les points du plan invariablement liés à la figure mobile engendrent des lignes fermées dont les aires totales varient ainsi avec la position du point décrivant :

Les points qui engendrent des lignes d'une aire constante sont situés sur une circonférence; toutes les circonférences correspondantes aux différentes valeurs des aires décrites sont concentriques, et leur centre commun Z est le point du plan qui engendre la ligne d'aire minimum. L'aire décrite par un point quelconque est égale à cette aire minimum augmentée de N fois l'aire du cercle ayant la distance du point considéré au point Z pour rayon. Dans certains cas il existe parmi les circonférences concentriques une dont les points engendrent des aires nulles; cela arrive lorsqu'une des aires décrites, prise à volonté, est négative, ou positive, mais moindre que N fois l'aire du cercle ayant pour rayon la distance du point qui décrit l'aire choisie au point Z. Quand cette circonférence des aires nulles existe, les aires décrites par les différents points du plan sont en partie positives, en partie négatives, les aires positives pouvant être d'une grandeur quelconque et les aires négatives ne pouvant surpasser la valeur numérique

de l'aire (Z). Si la circonférence des aires nulles n'existe pas, les aires décrites sont toutes positives et ne peuvent pas être moindres que (Z). Dans le cas où la circonférence des aires nulles a une existence réelle, l'aire décrite par un point quelconque est encore exprimée par N fois l'aire de l'anneau compris entre cette circonférence et une circonférence concentrique passant par le point considéré.

Lorsque la figure ne tourne que d'un angle moindre que 2π et revient ensuite à sa position initiale, les circonférences concentriques sont remplacées par un système de droites parallèles; parmi ces droites, il en existe une dont les points engendrent des aires nulles, et l'aire décrite par un point quelconque du plan mobile est proportionnelle à la distance de ce point à la droite des aires nulles.

On voit par ce théorème, ainsi que je l'ai déjà remarqué plus haut, que ce n'est pas la circonférence des aires nulles, qui dans beaucoup de cas devient imaginaire, mais plutôt le point toujours réel Z, qui joue le rôle principal dans l'étude des aires engendrées dans les mouvements fermés continus.

14. La proposition du numéro précédent n'est qu'une conséquence du théorème de M. Leudesdorf exprimé par les équations (9) et (10). On a donné plusieurs démonstrations de ce dernier théorème [1]. En voici encore une qui me semble digne d'attention par sa simplicité. Soient P et M deux points du plan mobile, P′ et M′ leurs positions infiniment voisines, γ et γ' les positions correspondantes du centre instantané, (P) et (M) les aires totales, décrites par P et M dans le mouvement fermé du plan. La figure montre que

$$MM'P'P = M\gamma P + P\gamma P' - M\gamma M' - M'\gamma P'.$$

Mais, en vertu de la définition même du centre instantané, les lignes infiniment petites MM′, PP′ peuvent être considérées comme des arcs de cercle dont le centre commun est en γ; on a donc $\gamma M = \gamma M'$, $\gamma P = \gamma P'$; d'ailleurs $PM = P'M'$, puisque ce sont deux

---

[1] Voir *Messenger*, t. VII, p. 125, 166, et t. VIII, p. 11.

positions d'une même droite invariable. Les triangles $M\gamma P$, $M'\gamma P'$ sont égaux et par suite

$$MM'P'P = P\gamma P' - M\gamma M',$$

ou

$$MM'P'P = \tfrac{1}{2}\overline{P\gamma}^2\,d\omega - \tfrac{1}{2}\overline{M\gamma}^2\,d\omega,$$

$d\omega$ étant l'angle de rotation élémentaire autour du centre instantané à l'instant considéré. Une équation analogue aura lieu pour chaque déplacement élémentaire du plan mobile. En faisant la somme de toutes ces équations pour le mouvement fermé total et en observant que la somme des premiers membres $\Sigma MM'P'P$ sera égale à la différence $(P)-(M)$, on trouve

$$(35) \qquad (P) = (M) + \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{P\gamma}^2\,d\omega - \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{M\gamma}^2\,d\omega.$$

On aura de même, pour trois autres points A, B, C du plan mobile, non situés en ligne droite,

$$(A) = (M) + \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{A\gamma}^2\,d\omega - \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{M\gamma}^2\,d\omega,$$

$$(B) = (M) + \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{B\gamma}^2\,d\omega - \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{M\gamma}^2\,d\omega,$$

$$(C) = (M) + \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{C\gamma}^2\,d\omega - \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{M\gamma}^2\,d\omega.$$

Multiplions les trois dernières équations respectivement par les coordonnées triangulaires X, Y, Z du point P relatives au triangle de référence ABC, et retranchons ensuite leur somme de l'équation (35); eu égard à la relation évidente

$$X + Y + Z = 1,$$

il vient

$$P - (A)X - (B)Y - (C)Z = \tfrac{1}{2}\Sigma\left(\overline{P\gamma}^2 - \overline{A\gamma}^2 X - \overline{B\gamma}^2 Y - \overline{C\gamma}^2 Z\right)d\omega.$$

Mais t étant la longueur de la tangente menée du point P à la circonférence circonscrite au triangle ABC, on a la relation géométrique facile à démontrer [1]

$$\overline{P\gamma}^2 - \overline{A\gamma}^2 X - \overline{B\gamma}^2 Y - \overline{C\gamma}^2 Z = t^2;$$

---

[1] Voir *Messenger*, t. VIII, p. 12.

donc, puisque t ne varie pas pendant le mouvement,

$$(P) = (A)X + (B)Y + (C)Z + \tfrac{1}{2}t^2 \Sigma d\omega,$$

suivant que le plan mobile accomplit N révolutions complètes, ou tourne d'un angle quelconque moindre que 2π et revient ensuite à sa position primitive, la somme $\Sigma d\omega$ sera égale à $2N\pi$ ou à zéro. On a donc enfin

$$(P) = (A)X + (B)Y + (C)Z + N\pi t^2,$$

ou

$$(P) = (A)X + (B)Y + (C)Z,$$

selon que le mouvement fermé est continu ou alternatif. C'est le théorème de M. Leudesdorf.

15. Dans le cas particulier où le point P est situé sur la droite AB et la partage en deux parties $AP = c_1$, $PB = c_2$, le théorème de M. Leudesdorf fournit la relation (6) de M. Williamson. En effet, dans cette hypothèse, $Z = 0$ et $X = \dfrac{c_2}{c_1 + c_2}$, $Y = \dfrac{c_1}{c_1 + c_2}$. La formule de M. Leudesdorf, prise sous la forme (9), donne donc

$$(P) = \frac{(A)c_2 + (B)c_1}{c_1 + c_2} - N\pi c_1 c_2. \tag{36}$$

Cette équation ne diffère de (6) que par la présence du coefficient N devant le dernier terme; ce coefficient manque chez M. Williamson, puisque sa démonstration suppose que la droite AB fait une seule révolution complète, restriction qui n'est pas nécessaire.

Par exemple, si l'on voulait, au moyen de la formule (36), calculer l'aire totale de la courbe fermée décrite dans un mouvement cardioïdal par le milieu d'un rayon ρ de la circonférence roulante, on pourrait considérer cette aire comme engendrée par le milieu P d'une droite rigide, dont une extrémité A décrit une circonférence de rayon 2ρ et l'autre, B, une cardioïde. Mais cette droite accomplit *deux* révolutions complètes pendant un roulement total du cercle mobile; donc, actuellement, $N = 2$. D'ailleurs $(A) = 4\pi\rho^2$, $(B) = 6\pi\rho^2$ (n° 11), $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}\rho$ et la formule (36) donne pour

l'aire cherchée

$$(P) = \frac{q}{2}\pi\rho^2,$$

résultat conforme à celui qu'on trouve par les formules ordinaires pour la quadrature des épicycloïdes.

Si le mouvement considéré de la droite AB est fermé alternatif, alors $N = 0$, et la formule (36) se réduit à

$$(37) \qquad (P) = \frac{(A)c_2 + (B)c_1}{c_1 + c_2}.$$

Au moyen de cette formule il est facile, par exemple, de déterminer l'aire engendrée par un point quelconque P d'une bielle qui transforme le mouvement de rotation d'une manivelle en un mouvement rectiligne alternatif d'une autre tige. Soient A l'extrémité de la bielle articulée à la manivelle, B l'autre extrémité unie à la tige guidée, f et l les longueurs de la manivelle et de la bielle et p la distance du point décrivant P à l'extrémité A. On a $(A) = \pi f^2$, $(B) = 0$, $c_1 = p$, $c_2 = l - p$, et la formule (37) donne

$$(P) = \frac{\pi f^2 (l - p)}{l}.$$

J'ajouterai encore deux observations relatives à l'application de la formule (36). D'abord il ne faut pas oublier que le point P, situé sur AB, peut partager la distance des points A, B dans le rapport $c_1 : c_2$ intérieurement ou extérieurement, et que, dans ce dernier cas, les formules (36) et (37) subsistent en y considérant seulement comme négative l'une des quantités c_1 ou c_2.

Ensuite, on ne doit pas perdre de vue que, lorsque la courbe dont on cherche l'aire a des nœuds, la formule (36) ne donne pas l'aire véritable, qui est égale à l'aire limitée par la courbe prise sans nœuds, augmentée de la somme des aires des nœuds, mais une aire qui excède celle qu'on cherche de la somme des aires des nœuds, de manière que cette somme entre deux fois dans (P), comme cela aurait lieu si l'on cherchait l'aire d'une courbe à nœuds par la formule de quadrature $\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$.

Ainsi, si l'on voulait déterminer l'aire totale de la *trisectrice*, courbe à un nœud décrite dans le mouvement cardioïdal par un point situé à une distance du centre du cercle roulant égale au

diamètre 2ρ de ce cercle, on trouverait par la formule (36), en y faisant $(A) = 4\pi\rho^2$, $(B) = 6\pi\rho^2$, $c_1 = 2\rho$, $c_2 = -\rho$, $N = 2$,

$$(P) = 12\pi\rho^2,$$

tandis qu'en réalité l'aire totale de la trisectrice considérée est [1]

$$8\pi\rho^2 + 6\sqrt{3}\rho^2.$$

La valeur fournie par la formule (36) excède donc l'aire cherchée de

$$4\pi\rho^2 - 6\sqrt{3}\rho^2,$$

quantité précisément égale à l'aire comprise dans le nœud de la courbe.

La même remarque s'applique aux formules (26), (27), (30), et en général à toutes les aires qui figurent dans les théorèmes de MM. Leudersdorf et Kempe.

SUR LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE INVARIABLE; PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX AIRES, AUX ARCS DES COURBES DÉCRITES ET AUX VOLUMES DES SURFACES TRAJECTOIRES;

PAR M. G. DARBOUX.

Le travail très-intéressant de M. Liguine a rappelé mon attention sur des recherches que j'ai faites, il y a assez longtemps, sur ce sujet et qui ont été communiquées, dans la séance du mercredi 5 avril 1876, à la *Société Mathématique de France*. Plusieurs des propositions qui vont suivre ont été introduites dans mon enseignement et données comme exercices aux élèves de l'École Normale. Quelques-unes ne me paraissent pas avoir été publiées par d'autres géomètres : je prends donc la liberté de les reprendre et de les développer ici [2].

---

(1) Voir, par exemple, TODHUNTER, *A Treatise on the Integral Calculus*, 4e édition, 1874, p. 163, ex. 37.

(2) Pour compléter l'historique de M. Liguine, nous signalerons deux énoncés très-remarquables, dus à M. Zeuthen et publiés dans les *Nouvelles Annales de Mathéma-*

I.

Considérons d'abord une figure plane mobile dans son plan et rapportons-la à deux axes rectangulaires Ox, Oy, liés invariablement avec elle. Soient, au contraire, $O'x_1$, $O'y_1$ deux axes rectangulaires fixes. Un point M de la figure mobile aura, par rapport aux axes Ox, Oy, des coordonnées constantes, que je désignerai par x, y, et par rapport aux axes $O'x_1$, $O'y_1$, des coordonnées variables, que je désignerai par x_1, y_1. On aura entre x, y, x_1, y_1 des relations de la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = (x-\alpha)\cos\omega - (y-\beta)\sin\omega, \\ y_1 = (x-\alpha)\sin\omega + (y-\beta)\cos\omega, \end{array} \right.$$

α, β, ω étant des fonctions d'une même variable. On peut considérer, si l'on veut, α, β comme des fonctions de ω, dont la connaissance détermine la nature du mouvement de la figure mobile dans son plan.

Les plus intéressants des mouvements que l'on a à considérer jouissent d'une propriété remarquable : ils sont périodiques ou fermés, suivant l'expression adoptée par M. Liguine. On reconnaîtra aisément, quand le mouvement sera défini par les formules (1), s'il est périodique. Si les fonctions α, β reprennent la même valeur lorsque ω augmente de $2n\pi$, n étant entier, la figure mobile, après avoir accompli n révolutions, viendra occuper sa position primitive. n peut être positif, nul ou négatif; je n'insiste pas sur ces distinctions, qui ont été indiquées dans le Mémoire précédent.

Ces remarques préliminaires étant faites, considérons deux positions distinctes P_0, P_1 de la figure mobile, caractérisées par les valeurs ω_0, ω_1 de la variable ω. Nous allons déterminer l'aire comprise entre l'arc M_0M_1, décrit par un point M de la figure mobile, dans le passage de la première position à la seconde, et les deux rayons vecteurs $O'M_0$, $O'M_1$, qui joignent le point fixe O' aux ex-

---

tiques, 1871, p. 90. Le premier des théorèmes de ce savant géomètre, convenablement développé, pourrait donner tout ce que l'on sait sur les aires décrites par les différents points d'une figure plane mobile dans son plan.

trémités de l'arc M_0M_1. Cette aire $\mathcal{A}$ sera donnée par la formule

$$(2)\qquad 2\mathcal{A} = \int_{M_0}^{M_1} (x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1),$$

x_1, y_1 étant les coordonnées du point décrivant par rapport aux axes fixes. Or, si l'on pose

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi = \alpha + \dfrac{d\beta}{d\omega}, \\ \eta = \beta - \dfrac{d\alpha}{d\omega}, \end{cases}$$

ξ, η sont les coordonnées par rapport aux axes mobiles du centre instantané de rotation, et l'on a

$$\begin{aligned} dx_1 &= -(x-\xi)\sin\omega\,d\omega - (y-\eta)\cos\omega\,d\omega, \\ dy_1 &= (x-\xi)\cos\omega\,d\omega - (y-\eta)\sin\omega\,d\omega, \end{aligned}$$

et par suite

$$x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1 = (x-\alpha)(x-\xi)\,d\omega + (y-\beta)(y-\eta)\,d\omega,$$

ce qui donne

$$(4)\qquad \begin{cases} 2\mathcal{A} = (x^2+y^2)\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega - x\int_{\omega_0}^{\omega_1}(\alpha+\xi)\,d\omega \\ \qquad\qquad - y\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1}(\beta+\eta)\,d\omega + \int_{\omega_0}^{\omega_1}(\alpha\xi+\beta\eta)\,d\omega. \end{cases}$$

Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega = \omega_1 - \omega_0 = \theta, \\ \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} (\alpha+\xi)\,d\omega \quad = 2A, \\ \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} (\beta+\eta)\,d\omega \quad = 2B, \\ \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} (\alpha\xi+\beta\eta)\,d\omega = 2C. \end{cases}$$

θ sera l'angle dont la figure mobile aura tourné dans le passage de

la première position à la seconde, et l'on aura

$$(6)\qquad \mathcal{A} = \frac{\theta}{2}(x^2 + y^2) - Ax - By + C,$$

A, B, C étant des intégrales plus ou moins difficiles à calculer, mais indépendantes de x et de y. La formule précédente exprime donc le théorème suivant :

Quand une figure plane qui se meut dans son plan passe d'une position P_0 *à une autre position* P_1, *l'aire qu'a décrite, dans le passage de la première position à la seconde, le rayon vecteur qui joint un point quelconque* M *de la figure mobile à un point fixe du plan, est égale à la moitié de l'angle dont la figure a tourné, multipliée par la puissance du point* M *par rapport à un cercle déterminé de la figure mobile.*

Il y a plusieurs remarques à présenter sur ce théorème.

D'abord il peut se faire que les trajectoires des points de la figure mobile aient une forme compliquée, que ces trajectoires se coupent elles-mêmes en un ou plusieurs points, et l'on peut se demander quelle sera alors la signification géométrique de l'intégrale

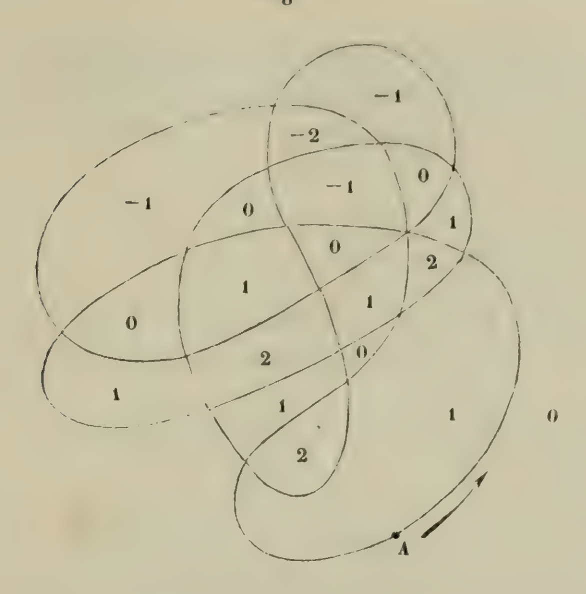
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int(x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1),$$

que nous avons calculée. Voici la règle que l'on doit à Gauss, et qui permet de répondre à cette question :

Considérons en premier lieu une courbe fermée, par exemple celle qui est représentée (*fig.* 1), et supposons que l'intégrale soit prise, la courbe étant parcourue dans le sens de la flèche. Alors on connaît le sens dans lequel doit être parcouru chacun des traits de courbe qui séparent les différentes régions dans lesquelles le plan est divisé. On déterminera des coefficients pour chacune de ces régions de la manière suivante : on adoptera le coefficient o pour l'aire extérieure, et l'on conviendra que, pour deux régions quelconques séparées par un des traits de la courbe, la différence des coefficients sera l'unité, le plus grand coefficient étant affecté à l'aire située à la gauche du trait de courbe, c'est-à-dire à la gauche d'un observateur qui parcourt, dans le sens indiqué par la flèche, la portion de la courbe qui sépare les deux régions. Par exemple, si

l'on part du point A, l'aire extérieure ayant le coefficient o, la région située à gauche de A devra être affectée du coefficient 1. En continuant à parcourir la courbe et en appliquant la règle toutes

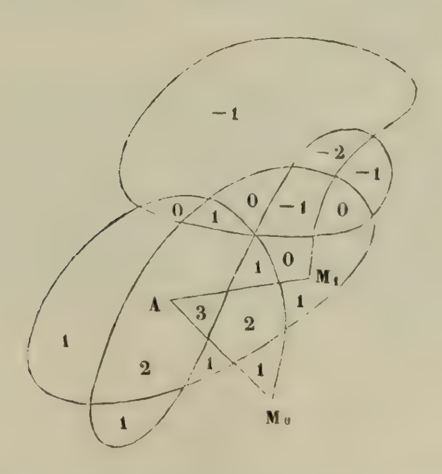
Fig. 1.



les fois qu'il y aura lieu, on déterminera successivement les coefficients qui conviennent à chaque région.

Cette opération étant terminée, l'intégrale $\mathcal{A}$ représentera la

Fig. 2.



somme des aires de toutes les régions, multipliées chacune par le coefficient qui lui appartient, et c'est à cette somme que nous donnerons le nom d'*aire de la courbe*. On voit qu'elle est indépendante de l'origine des coordonnées choisies.

Si la courbe n'est pas fermée et qu'elle s'étende d'un point M_0 à un point M_1, comme dans la *fig.* 2, on la fermera en ajoutant les deux rayons vecteurs que joignent les points M_0, M_1 à l'origine des coordonnées A, et en supposant qu'on revienne de M_1 à M_0 par le chemin $M_1 A M_0$.

Après avoir rappelé la signification géométrique de l'intégrale $\mathcal{A}$, il nous reste à dire quelques mots des coefficients A, B, qui figurent dans la formule (6) et qui sont définis par les équations (5). On a

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi\, d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega_1} (\alpha\, d\omega + d\beta),$$

et, par suite, β_0, β_1 désignant les valeurs de β pour $\omega = \omega_0$, $\omega = \omega_1$, on a

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \alpha\, d\omega = \beta_0 - \beta_1 + \int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi\, d\omega,$$

ce qui donne

$$A = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi\, d\omega + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2}.$$

On aura de même

$$B = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \eta\, d\omega + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2}.$$

Les intégrales qui figurent dans ces expressions de A, B ont une signification très-simple.

Nous avons vu que ξ et η sont les coordonnées du centre instantané rapportées aux axes mobiles. Si l'on considère la courbe lieu du centre instantané dans la figure mobile, le centroïde mobile de M. Liguine, soient R son rayon de courbure et R' celui de la courbe sur laquelle elle roule, ou centroïde fixe. On sait que, lorsqu'on passe de la position actuelle de la figure mobile à la position infiniment voisine, on a

$$d\omega = ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

ds étant la différentielle de l'arc de l'une quelconque des deux centroïdes. Par suite, si l'on suppose que l'arc du centroïde mobile ait en chaque point une densité égale à $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$, le centre de

gravité d'un arc de cette courbe aura ses coordonnées ξ', η' déterminées par les formules

$$(7) \qquad \xi'(\omega_1 - \omega_0) = \xi'\theta = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi\, d\omega, \quad \eta'\theta = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \eta\, d\omega.$$

Ce point ξ', η' est précisément celui que Steiner a nommé *centre de gravité des courbures*. Les valeurs de A et de B deviendront

$$A = \theta\xi' + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2},$$

$$B = \theta\eta' + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2},$$

et par conséquent la formule (6) pourra s'écrire

$$\mathcal{A} = \frac{\theta}{2}\left[x^2 + y^2 - 2\left(\xi' + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2\theta}\right)x - 2\left(\eta' + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2\theta}\right)y\right] + C.$$

Tous les cercles lieux des points de la figure mobile, dont les rayons vecteurs auront décrit la même aire dans le passage de la position P_0 à la position P_1, auront donc pour centre le point dont les coordonnées, par rapport aux axes mobiles, sont

$$(8) \qquad \begin{cases} x = \xi' + \dfrac{\beta_0 - \beta_1}{2\theta}, \\ y = \eta' + \dfrac{\alpha_1 - \alpha_0}{2\theta}. \end{cases}$$

Ces formules se simplifient dans deux cas :

1° Si l'on suppose que le point O', origine des rayons vecteurs, soit le centre de la rotation finie par laquelle on peut amener la figure mobile de la première position à la seconde, on aura $\beta_0 = \beta_1$, $\alpha_0 = \alpha_1$ et, par suite

$$x = \xi', \quad y = \eta',$$

ce qui donne le théorème suivant :

L'aire décrite dans le passage d'une position P_0 *de la figure mobile à toute autre* P_1, *par le rayon vecteur que joint un point quelconque* M *de la figure mobile au centre de la rotation finie qui peut amener la figure de* P_0 *en* P_1, *est égale à la moitié de la*

rotation totale de la figure multipliée par la puissance du point M *par rapport à un cercle déterminé ayant son centre au centre de gravité des courbures de l'arc de la roulette mobile décrit par le centre instantané dans le passage de la première position à la seconde.*

2° Si le mouvement est périodique et que l'on considère toute la période pendant laquelle les différents points décrivent des courbes finies, on aura encore ici $\beta_1 = \beta_0$, $\alpha_0 = \alpha_1$. Donc :

Quand un mouvement est périodique, les aires des courbes fermées décrites par les différents points de la figure mobile sont égales respectivement à la moitié de la rotation totale multipliée par la puissance du point décrivant par rapport à un cercle fixe de la figure mobile dont le centre est le centre de gravité des courbures de la roulette mobile.

C'est le théorème démontré par Steiner dans le cas où les roulettes sont des courbes convexes.

Après avoir étudié les différentes formes de la proposition générale, examinons les conséquences qu'on peut en déduire.

Soient S_1, S_2, S_3 les aires relatives à trois points de la figure mobile en ligne droite M_1, M_2, M_3. Nous pouvons supposer que ces points soient sur la droite $y = 0$; en désignant leurs abscisses par x_1, x_2, x_3, nous aurons

$$S_1 = \frac{\theta}{2} x_1^2 - A x_1 + C,$$

$$S_2 = \frac{\theta}{2} x_2^2 - A x_2 + C,$$

$$S_3 = \frac{\theta}{2} x_3^2 - A x_3 + C,$$

et, en éliminant A et C,

$$S_1 (x_2 - x_3) + S_2 (x_3 - x_1) + S_3 (x_1 - x_2) = \frac{\theta}{2} (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3),$$

ou, en désignant par (ik) la distance M_i, M_k, prise avec le signe + ou le signe —, suivant le sens dans lequel elle est portée,

$$(9) \qquad S_1 (23) + S_2 (31) + S_3 (12) + \frac{\theta}{2} (12)(23)(31) = 0.$$

Par exemple, si l'on suppose que les points 2, 3 décrivent une même courbe convexe analogue à l'ellipse, on a $S_2 = S_3$, $\theta = 2\pi$, et, par suite,

$$S_2 - S_1 = \pi(12)(31).$$

C'est le théorème de M. Holditch.

Soient maintenant S_1, S_2, S_3, S_4 les aires relatives à quatre points 1, 2, 3, 4 de coordonnées $x_1, y_1, \ldots, x_4, y_4$. En écrivant les expressions de ces aires au moyen de la formule (6), et éliminant les constantes A, B, C, on aura la relation

$$\begin{vmatrix} S_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ S_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ S_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ S_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\theta}{2} \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix},$$

que l'on peut développer comme il suit : si l'on désigne par (123) l'aire du triangle formé par les points 1, 2, 3, prise avec le signe + ou le signe —, suivant que le sens (123) autour du triangle sera celui des rotations positives ou négatives, on aura

$$(10) \qquad S_1(234) + S_2(341) + S_3(412) - S_4(123) = (123)\frac{\theta}{2}P,$$

P désignant la puissance du point 4 par rapport au cercle circonscrit au triangle (123). C'est la généralisation du théorème démontré par M. Leudersdorf pour les mouvements fermés.

II.

Après avoir étudié les aires décrites par les différents points de la figure mobile, nous allons considérer les différentes courbes enveloppées par les droites de cette figure.

Soit

$$(11) \qquad ux + vy + w = 0$$

l'équation d'une droite rapportée aux axes mobiles. On peut toujours supposer que l'on ait

$$u^2 + v^2 = 1.$$

L'équation de cette droite, rapportée aux axes fixes, sera

$$(12) \qquad u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 = 0,$$

où l'on aura

$$u_1 = u \cos\omega - v \sin\omega,$$
$$v_1 = u \sin\omega + v \cos\omega,$$
$$w_1 = w + u\alpha + v\beta,$$

et, par conséquent,

$$u_1^2 + v_1^2 = 1.$$

Le point où la droite mobile touche son enveloppe est défini par l'équation (12), jointe à la suivante :

$$x_1\,du_1 + y_1\,dv_1 + d\omega_1 = 0,$$

ce qui donne, pour les coordonnées de ce point,

$$x_1 = \quad v_1\left(u\frac{d\alpha}{d\omega} + v\frac{d\beta}{d\omega}\right) - u_1 w_1,$$
$$y_1 = -u_1\left(u\frac{d\alpha}{d\omega} + v\frac{d\beta}{d\omega}\right) - v_1 w_1.$$

En différentiant ces formules, on obtiendra

$$(13)\quad \begin{cases} dx_1 = \quad v_1\left[w + u\left(\alpha + \dfrac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \dfrac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)\right]d\omega, \\ dy_1 = -u_1\left[w + u\left(\alpha + \dfrac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \dfrac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)\right]d\omega, \end{cases}$$

ω étant considéré comme la variable indépendante.

Ces relations conduisent à différentes conséquences que je me contenterai d'énoncer; car elles sont bien connues et se démontrent aussi facilement par la Géométrie que par l'Analyse.

Si à un instant donné on considère toutes les droites de la figure mobile, celles qui touchent leur enveloppe en un point de rebroussement passent par un point A dont les coordonnées, par rapport aux axes mobiles, sont

$$x = \alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}, \quad y = \beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}.$$

Le centre de courbure de l'enveloppe d'une droite quelconque est

le pied de la perpendiculaire abaissée du point A *sur la normale à l'enveloppe.*

Le point A *est défini géométriquement par la propriété suivante. Le cercle ayant pour diamètre la droite qui réunit le point* A *au centre instantané, cercle qui est le lieu des points de rebroussement des enveloppes de droites, est symétrique, par rapport à ce centre, du cercle lieu des points dont les trajectoires ont une inflexion.*

Nous nous bornerons à développer ce qui concerne les arcs des courbes enveloppes. On aura, en employant les formules (13),

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = \left[w + u\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)\right] d\omega,$$

ds désignant la différentielle de l'arc, et par suite, si l'on veut avoir l'arc de l'enveloppe quand la figure mobile passe de la position P_0 à la position P_1, on trouvera

$$s = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left[w + u\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)\right] d\omega,$$

et par conséquent

$$s = w\theta + u\int_{\omega_0}^{\omega_1} \left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) d\omega + v\int_{\omega_0}^{\omega_1} \left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right),$$

θ désignant toujours $\omega_1 - \omega_0$. Posons

$$(14) \qquad \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) d\omega = \xi''\theta, \qquad \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right) d\omega = \eta''\theta.$$

L'expression de l'arc deviendra

$$(15) \qquad s = \theta(w + u\xi'' + v\eta'');$$

d'où résulte le théorème suivant :

Si l'on considère la ligne mobile dans deux quelconques de ses positions P_0, P_1, *l'arc enveloppé par une droite quelconque de la figure mobile, dans le passage de la première position à la seconde, est égal à l'angle dont la figure a tourné, multiplié par*

la distance d'un point (ξ'', η'') *déterminé de la figure mobile à cette droite* [1].

Il est bon de remarquer, pour les applications, qu'ici l'arc a un signe qui change lorsque la concavité de la courbe cesse d'être dirigée du même côté, c'est-à-dire quand on passe par un point de rebroussement de l'enveloppe.

En vertu des formules qui déterminent ξ'', η'', on trouvera

$$\theta\xi'' = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi\,d\omega - \eta_1 + \eta_0,$$

$$\theta\eta'' = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \eta\,d\omega + \xi_1 - \xi_0,$$

ou, en se rappelant les formules (7),

$$(16) \quad \begin{cases} \xi'' = \xi' - \dfrac{\eta_1 - \eta_0}{\theta}, \\ \eta'' = \eta' + \dfrac{\xi_1 - \xi_0}{\theta}. \end{cases}$$

On voit donc que le point (ξ'', η'') dépend encore du centre de gravité des courbures de Steiner. Du reste, les formules précédentes permettent de construire immédiatement le point cherché. Soient A_0, A_1 les deux positions initiale et finale du centre instantané de la figure mobile, et soient C' le centre de gravité de courbure, C'' le point (ξ'', η'') à construire. Pour avoir la direction et le sens de $C'C''$, il faudra faire tourner A_0A_1 de 90 degrés dans le sens des rotations positives. Quant à la grandeur de $C'C''$, on a

$$\overline{C'C''} = \frac{\overline{A_0A_1}}{\theta}.$$

On voit, en particulier, que, si le mouvement est périodique, le

---

(1) Dans un article intéressant inséré au *Bulletin de la Société Philomathique* (1869, p. 12), M. Ribaucour a énoncé la même proposition sous la forme suivante :

Lorsqu'une figure se meut d'une manière quelconque dans son plan, pour un mouvement déterminé, toutes les droites de cette figure enveloppent des courbes dont les longueurs sont les mêmes que si le système avait tourné du même angle autour d'un certain point de la figure.

point correspondant à une période se confond avec le centre de gravité des courbures.

On peut aussi obtenir des propositions analogues à celles de M. Leudersdorf. Considérons d'abord trois droites concourantes de la figure mobile D, D_1, D_2, représentées par les équations

$$y\cos\varphi - x\sin\varphi = 0,$$
$$y\cos\varphi_1 - x\sin\varphi_1 = 0,$$
$$y\cos\varphi_2 - x\sin\varphi_2 = 0.$$

On aura, pour les arcs s, s_1, s_2 des enveloppes de ces trois droites, les formules

$$s = \theta(\eta''\cos\varphi - \xi''\sin\varphi),$$
$$s_1 = \theta(\eta''\cos\varphi_1 - \xi''\sin\varphi_1),$$
$$s_2 = \theta(\eta''\cos\varphi_2 - \xi''\sin\varphi_2),$$

ce qui donne, en éliminant η'', θ'',

$$s(12) + s_1(20) + s_2(01) = 0, \tag{17}$$

(ik) désignant le sinus de l'angle des droites D_i, D_k.

Cette formule si simple permet de résoudre le problème suivant :

Étant données deux courbes (C), (C$_1$), *trouver une nouvelle courbe* C$_2$, *dont l'arc soit égal à la somme des arcs des deux courbes.*

En effet, menons à (C), (C$_1$) respectivement deux tangentes D, D_1, faisant un angle constant A, et considérons la bissectrice D_2 de l'angle formé par D, D_1. Les trois droites D, D_1, D_2 constituent une figure invariable, et, si l'on applique la formule précédente, on aura

$$2\cos\frac{A}{2}\,s_2 = s + s_1.$$

L'arc s_2 de la courbe enveloppée par la bissectrice est donc proportionnel à $s + s_1$. Une courbe semblable aura un arc exactement égal à $s + s_1$ [1].

---

[1] Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XIV, 2e série), M. Fouret a fait connaître un cas particulier de cette construction, celui où l'angle constant a ses deux côtés tangents à une même courbe.

Enfin, si nous considérons trois droites D, D_1, D_2 formant un triangle, et représentées par les équations

$$x \cos\varphi_i + y \sin\varphi_i - p_i = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

on aura, en employant la formule (15) et en éliminant ξ'', η'' des trois équations obtenues,

$$\begin{vmatrix} s & \cos\varphi & \sin\varphi \\ s_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ s_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix} + \theta \begin{vmatrix} p & \cos\varphi & \sin\varphi \\ p_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ p_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il n'est pas difficile de transformer cette formule et de voir qu'on peut l'écrire

$$(18) \qquad as + bs_1 + cs_2 = 2\theta S,$$

a, b, c désignant les longueurs des trois côtés, et S la surface du triangle formé par les trois droites D, D_1, D_2.

Pour terminer ce qui se rapporte aux enveloppes des droites de la figure mobile, cherchons les aires de ces enveloppes. Les formules qui donnent x_1, y_1, dx_1, dy_1 nous conduisent à la relation suivante :

$$x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = (w + u\alpha + v\beta)\left[w + u\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)\right] d\omega,$$

et l'on a, par conséquent,

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) = w^2\theta + uw\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(2\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) d\omega$$

$$+ vw\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(2\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right) d\omega + u^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\alpha^2 + \alpha\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) d\omega$$

$$+ v^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\beta^2 + \beta\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right) d\omega + uv\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\alpha\beta + \alpha\frac{d^2\beta}{d\omega^2} + \beta\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) d\omega.$$

L'aire de l'enveloppe sera donc de la forme

$$w^2\frac{\theta}{2} + \mathrm{A}uw + \mathrm{A}'vw + \mathrm{B}u^2 + \mathrm{B}'v^2 + \mathrm{C}uv,$$

et par conséquent les droites, dont les enveloppes ont une aire

constante k, satisfont à l'équation

$$\varpi^2 \frac{\theta}{2} + A u\varpi + A' v\varpi + B u^2 + B' v^2 + C uv = k = k(u^2 + v^2).$$

C'est l'équation tangentielle d'une série de coniques homofocales. Ainsi :

Si l'on considère les droites de la figure mobile pour lesquelles le rayon vecteur qui joint un point fixe du plan à leur point de contact avec leur enveloppe décrit une aire donnée quand la figure mobile passe de la position P_0 *à la position* P_1, *ces droites enveloppent une conique de la figure mobile dont les foyers demeurent fixes quand la valeur constante de l'aire donnée varie.*

Dans le cas où le mouvement est périodique, si l'on applique le théorème précédent à une période entière, le centre de la conique coïncide avec le centre de gravité des courbures, ce qui donne le théorème suivant :

Dans un mouvement périodique, les droites de la figure mobile dont les enveloppes ont une aire donnée sont tangentes à une série de coniques homofocales dont le centre commun est le centre de gravité des courbures de la roulette mobile.

III.

Les théorèmes des deux premiers articles s'étendent au mouvement d'une figure invariable sur la sphère. On sait que ce mouvement peut toujours être produit par le roulement d'une courbe sphérique invariablement liée à la figure mobile sur une courbe fixe. Nous ne considérerons ici que des mouvements périodiques, pour lesquels, par conséquent, les deux roulettes sont des courbes fermées.

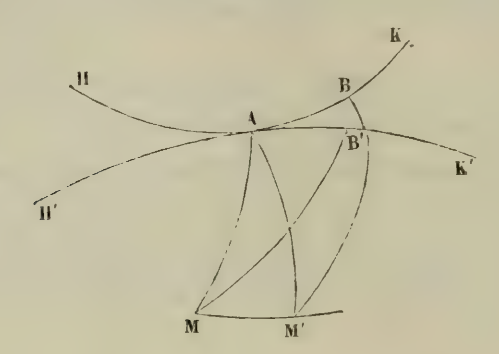
Supposons (*fig.* 3) que la courbe H′K′ roule sur la courbe HK; alors un point M invariablement lié à la courbe mobile décrira une courbe MM′, et nous allons chercher à évaluer l'aire comprise entre cette courbe et la roulette fixe HK.

Quand la courbe H′K′, actuellement tangente en A à HK, aura tourné d'un angle infiniment petit, le point B′ de cette courbe viendra en B, et les deux roulettes seront tangentes en B. L'aire que

nous voulons évaluer sera l'intégrale de l'aire infiniment petite ABMM' comprise entre les deux arcs AM, BM'.

Le quadrilatère curviligne qu'il s'agit d'évaluer peut se décom-

Fig. 3.



poser en deux triangles AMM', ABM'. Le premier de ces triangles peut être considéré évidemment comme ayant pour angle en A précisément l'angle dont la courbe H'K' a tourné, angle que, pour un instant, nous appellerons $d\omega$. On a donc, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\text{aire } AMM' = d\omega\,(1 - \cos AM),$$

le rayon de la sphère étant supposé égal à l'unité.

Quant au second triangle ABM', il est évidemment égal, si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur, au triangle AB'M. On a donc

$$\int ABMM' = \int d\omega\,(1 - \cos AM) + \int AMB'.$$

Le premier membre est égal évidemment à l'aire S de la trajectoire de M', moins l'aire Σ de la roulette fixe HK. Le dernier terme du second nombre, M étant invariablement lié à la figure mobile, est égal à la somme des secteurs AB'M ou à l'aire de la roulette mobile Σ'. On a donc

$$S - \Sigma - \Sigma' = \int d\omega\,(1 - \cos AM).$$

Or, ρ et ρ' désignant les deux rayons de courbure géodésique des courbes HK, H'K' au point A, l'angle $d\omega$, dont la roulette mobile a tourné, est donné par la formule

$$d\omega = ds\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right),$$

ds désignant la différentielle de l'arc d'une quelconque des deux

roulettes. On a donc

$$S = \Sigma + \Sigma' + \int \frac{ds}{\rho} + \int \frac{ds}{\rho'} - \int \cos AM \, ds \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right).$$

Comme on a, en vertu d'un théorème connu,

$$\Sigma + \int \frac{ds}{\rho} = 2\pi, \quad \Sigma' + \int \frac{ds}{\rho'} = 2\pi,$$

la relation précédente devient

$$4\pi - S = \int \cos AM \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds.$$

On peut écrire S′ au lieu de 4π — S; S′ sera encore l'aire de la courbe décrite par le point M, cette aire étant maintenant étendue à la région de la sphère au delà de MM′. On aura donc

$$S' = \int \cos AM \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \right) dS.$$

Appelons x, y, z les coordonnées du point M rapportées à des axes rectangulaires ayant leur origine au centre de la sphère et invariablement liés à la figure mobile, et soient ξ, η, ζ les coordonnées variables du centre instantané par rapport aux mêmes axes. La valeur de S′ sera

$$(19) \quad \begin{cases} S' = x \int \xi \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds \\ \qquad + y \int \eta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds + z \int \zeta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds. \end{cases}$$

Posons

$$(20) \quad \begin{cases} \int \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds = \Omega, \\ \int \xi \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds = x_0 \Omega, \\ \int \eta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds = y_0 \Omega, \\ \int \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds = z_0 \Omega; \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 seront les coordonnées d'un point qu'on peut encore appeler *centre de gravité des courbures* de la roulette mobile. Car il est le centre de gravité de cet arc si l'on suppose que la densité, en chaque point de la roulette mobile, soit égale à la somme des cour-

bures géodésiques des deux roulettes quand elles sont tangentes en ce point. La formule (19) pourra s'écrire

$$S' = \Omega (x_0 x + y_0 y + z_0 z),$$

ce qui conduit au théorème suivant :

Quand une figure invariable se meut sur la sphère qui la contient, le mouvement qu'elle prend étant périodique, l'aire de la courbe fermée, décrite par un point quelconque M *invariablement lié à la figure mobile, est égale à une constante fixe multipliée par le cosinus de l'arc qui réunit le point* M *à un point fixe* A *de la figure mobile. Le point* A *est l'extrémité du rayon qui contient le centre de gravité des courbures de la roulette mobile.*

Par conséquent, les points de la figure mobile qui décrivent des courbes de même aire sont sur un petit cercle de centre fixe (1).

En transformant ce théorème par la méthode des figures complémentaires, on obtient la proposition suivante :

Dans le mouvement défini précédemment de la figure mobile, tout arc de grand cercle enveloppe une courbe sphérique fermée. La différence entre la longueur de cette courbe et la circonférence d'un grand cercle est proportionnelle au cosinus de l'angle que fait le grand cercle de la figure mobile avec un autre grand cercle fixe dont le pôle est le point A, *déjà considéré.*

IV.

Nous allons maintenant considérer le mouvement d'une figure invariable dans l'espace. Nous examinerons seulement les déplacements étudiés surtout par M. Mannheim et dans lesquels la position de la figure mobile dépend de deux paramètres arbitraires. Par conséquent, tout point de cette figure est assujetti à demeurer sur une surface que l'on appellera, par analogie, sa *surface trajectoire*.

---

(1) Ce théorème devient inexact dans le cas exceptionnel de la rotation complète autour d'un axe fixe ; la démonstration donnée fait voir clairement pourquoi il en est ainsi, les deux équations

$$\Sigma + \int \frac{ds}{\rho} = 2\pi, \quad \Sigma' + \int \frac{ds}{\rho} = 2\pi$$

n'ayant plus aucun sens dans ce cas particulier.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la figure mobile, rapportées à des axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, invariablement liés à cette figure, et soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du même point rapportées à des axes rectangulaires O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 fixes dans l'espace. On aura des relations de la forme

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= a\ (x-\alpha) + b\ (y-\beta) + c\ (z-\gamma), \\ y_1 &= a'\ (x-\alpha) + b'\ (y-\beta) + c'\ (z-\gamma), \\ z_1 &= a''\ (x-\alpha) + b''\ (y-\beta) + c''\ (z-\gamma), \end{aligned}\right.$$

$a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ étant les neuf cosinus liés par des relations bien connues. Si, dans les formules précédentes, on regarde ces neuf cosinus et α, β, γ comme des fonctions connues de deux variables indépendantes u et v, on aura défini un déplacement de la nature de ceux que nous voulons considérer ici.

Mais auparavant nous allons donner quelques formules préliminaires relatives aux neuf cosinus. Si l'on pose

$$(22)\qquad b\frac{\partial a}{\partial u} + b'\frac{\partial a'}{\partial u} + b''\frac{\partial a''}{\partial u} = r = \sum b\frac{\partial a}{\partial u},$$

et de même

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum c\frac{\partial b}{\partial u} = p, &\quad &\sum b\frac{\partial a}{\partial v} = r_1, \\ & &&\sum c\frac{\partial b}{\partial v} = p_1, \\ &\sum a\frac{\partial c}{\partial u} = q &&\sum a\frac{\partial c}{\partial v} = q_1, \end{aligned}\right.$$

les dérivées des neuf cosinus seront données par les formules

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial u} &= br - cq, &\quad \frac{\partial a}{\partial v} &= br_1 - cq_1, \\ \frac{\partial b}{\partial u} &= cp - ar, & \frac{\partial b}{\partial v} &= cp_1 - ar_1, \\ \frac{\partial c}{\partial u} &= aq - bp, & \frac{\partial c}{\partial v} &= aq_1 - bp_1. \end{aligned}\right.$$

On aurait des formules analogues en accentuant les lettres a, b, c.

Les six quantités p, q, r, p_1, q_1, r_1 ne peuvent être des fonctions quelconques de u et de v. En exprimant que les deux expressions qu'on peut déduire des formules précédentes pour chacune des dérivées $\frac{\partial^2 a}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 b}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 c}{\partial u\,\partial v}$ sont égales, on trouvera les relations

très-importantes

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - pr_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - qp_1. \end{cases}$$

Ces propositions étant rappelées, revenons à l'étude du mouvement de la figure invariable et supposons que l'on associe tous les systèmes de valeurs de u et v, pour lesquels chaque point de la figure mobile peut occuper une portion finie de sa surface trajectoire. Par exemple, si un point de la figure mobile décrit une sphère, nous prendrons toutes les positions de la figure mobile pour lesquelles ce point est à l'intérieur d'une certaine courbe sphérique quelconque. Considérant alors un point quelconque de la figure mobile, nous allons évaluer le volume du cône ayant pour base curviligne la portion de sa surface trajectoire que ce point peut occuper, et pour sommet le point O_1, origine des axes fixes. Le volume V de ce cône sera donné par la formule

$$6\,V = \iint \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial y_1}{\partial v} & \dfrac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv,$$

l'intégrale double étant étendue à tous les systèmes de valeurs considérés de u et de v. Or on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \quad & a\left[-\frac{\partial \alpha}{\partial u} + q(z-\gamma) - r(y-\beta)\right] \\ & + b\left[-\frac{\partial \beta}{\partial u} + r(x-\alpha) - p(z-\gamma)\right] \\ & + c\left[-\frac{\partial \gamma}{\partial u} + p(y-\beta) - q(x-\alpha)\right]. \end{aligned}$$

En substituant cette valeur de $\dfrac{\partial x_1}{\partial u}$ et les valeurs analogues pour les autres dérivées, on trouvera

$$(25)\quad 6\,V = \iint \begin{vmatrix} x-\alpha, & y-\beta, & z-\gamma, \\ q(z-\gamma)-r(y-\beta)-\dfrac{\partial \alpha}{\partial u}, & r(x-\alpha)-p(z-\gamma)-\dfrac{\partial \beta}{\partial u}, & p(y-\beta)-q(x-\alpha)-\dfrac{\partial \gamma}{\partial u} \\ q_1(z-\gamma)-r_1(y-\beta)-\dfrac{\partial \alpha}{\partial v}, & r_1(x-\alpha)-p_1(z-\gamma)-\dfrac{\partial \beta}{\partial v}, & p_1(y-\beta)-q_1(x-\alpha)-\dfrac{\partial \gamma}{\partial v} \end{vmatrix} du$$

x, y, z pourront être dégagés des signes d'intégration, et l'on voit que le volume cherché va devenir une fonction du troisième degré de x, y, z. Mais cette fonction présente dans tous les cas une propriété remarquable. Les termes du troisième degré seront donnés par l'intégrale

$$(26) \qquad \iint \begin{vmatrix} x & y & z \\ qz - ry & rx - pz & py - qx \\ q_1 z - r_1 y & r_1 x - p_1 z & p_1 y - q_1 x \end{vmatrix} du\, dv,$$

ou, en développant,

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left[x \iint (qr_1 - rq_1)\, du\, dv \right.$$
$$\left. + y \iint (rp_1 - pr_1)\, du\, dv + z \iint (pq_1 - qp_1)\, du\, dv\right].$$

Le volume sera donc de la forme

$$(27) \qquad V = (x^2 + y^2 + z^2)(Ax + A'y + A''z) + \varphi(x, y, z),$$

φ étant une fonction du second degré et A, A', A'' les intégrales définies par

$$(28) \qquad \begin{cases} 6A = \iint (qr_1 - rq_1)\, du\, dv, \\ 6A' = \iint (rp_1 - pr_1)\, du\, dv, \\ 6A'' = \iint (pq_1 - qp_1)\, du\, dv. \end{cases}$$

En d'autres termes, *le lieu des points de la figure mobile pour lesquels les cônes, ayant pour sommet un point fixe et pour base curviligne les portions de surfaces trajectoires décrites par ces points, ont un volume donné, est une cyclide du troisième degré, c'est-à-dire une cubique passant par le cercle imaginaire de l'infini.*

Les intégrales A, A', A'' ont une signification géométrique très-simple. En effet, supposons qu'au lieu des formules (1) on prenne les suivantes, dans lesquelles on a simplement annulé α, β, γ:

$$(29) \qquad \begin{cases} x_1 = ax + by + cz, \\ y_1 = a'x + b'y + c'z, \\ z_1 = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

on aura défini ainsi le mouvement d'une figure invariable autour d'un point fixe, l'origine O_1 des coordonnées x_1, y_1, z_1. Si l'on compare les deux mouvements définis par les formules (21) et (29),

on voit que, pour le même système de valeurs de u et de v, les positions de la figure mobile dans les deux mouvements auront la même orientation et se ramèneront l'une à l'autre par une simple translation. Or, dans le mouvement défini par les formules (29), d'une part, le volume V, déjà défini, se réduit à

$$(x^2 + y^2 + z^2)(\mathrm{A}x + \mathrm{A}'y + \mathrm{A}''z),$$

A, A′, A″ étant donnés par les formules (28); d'autre part, les surfaces trajectoires des différents points étant des sphères, ce volume se réduit, pour un point M, à l'aire S de la portion de surface sphérique que ce point doit occuper, multipliée par le tiers du rayon de la sphère, ce qui donne la formule

$$\mathrm{S} = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(\mathrm{A}x + \mathrm{A}'y + \mathrm{A}''z).$$

Prenons un point à la distance 1 de l'origine; on aura

$$\mathrm{S} = 3\mathrm{A}x + 3\mathrm{A}'y + 3\mathrm{A}''z. \tag{30}$$

Cette formule nous permet de reconnaître le signification de A, A′, A″. Par exemple, A est le tiers de l'aire décrite par le point de la figure mobile dont les coordonnées sont $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

J'ajoute que nous trouvons, dans la formule précédente, la vérification des résultats démontrés par la Géométrie à l'article précédent. En effet, considérons les différentes portions correspondantes des surfaces trajectoires dont l'aire est déterminée par la formule (30). Si l'on imprime à la figure mobile un mouvement tel, que l'un des points de cette figure décrive le contour de cette portion de sa surface trajectoire dont on détermine l'aire, il en sera évidemment de même pour tous les autres points de la figure invariable. Ainsi les courbes qui limitent les portions correspondantes des sphères trajectoires des différents points peuvent être toutes décrites à la fois dans un certain mouvement de la figure invariable. La formule relative aux aires de ces courbes fermées doit donc être identique à celle de l'article précédent, et elle est, en effet, de forme tout à fait semblable.

Puisque A, A′, A″ sont des aires sphériques, ces intégrales doubles doivent pouvoir être remplacées par des intégrales simples; on pourra ici effectuer aisément cette transformation, en se servant des formules (24). On aura

$$6\mathrm{A} = \int\int (qr_1 - rq_1)\,du\,dv = \int\int \left(\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u}\right) du\,dv,$$

et par conséquent

$$6A = \int (p\,du + p_1\,dv),$$

l'intégrale simple étant étendue aux valeurs limites de u et de v.

La formule générale, relative au volume, est susceptible d'une simplification notable dans un cas très-étendu. Il existe des déplacements très-nombreux dans lesquels les surfaces trajectoires des différents points sont fermées, et pour lesquels A, A′, A″ s'évanouissent. Le volume devient alors une fonction du second degré seulement des coordonnées x, y, z du point décrivant.

Supposons, par exemple, que lorsque v demeure constant, u prenant toutes les valeurs dont il est susceptible, le mouvement, qui se produit, de la figure invariable soit périodique, que les différents points décrivent des courbes fermées, qu'au commencement et à la fin de ce mouvement le corps occupe la même position, les rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 redevenant les mêmes; supposons que les mêmes conditions soient remplies lorsque, u restant fixe, v varie. Dans ce cas, les intégrales A, A′, A″, étendues à toutes les positions de la figure mobile, sont identiquement nulles. On a, par exemple,

$$6A = \int\int \frac{\partial p}{\partial v}\,du\,dv - \int\int \frac{\partial p_1}{\partial u}\,du\,dv.$$

Si, dans la première intégrale du second membre, on commence l'intégration par rapport à v, le résultat obtenu est nul en vertu de nos hypothèses, et il en est de même pour la seconde intégrale, si l'on intègre d'abord par rapport à u.

La théorie des surfaces podaires nous donne un exemple remarquable de cette classe de mouvements. Soit (Σ) une surface quelconque. Prenons la surface symétrique de (Σ) par rapport à un quelconque de ses plans tangents. Lorsque ce plan variera, la surface (Σ') se déplacera en roulant sur (Σ). Un point M′, invariablement lié à (Σ'), sera toujours le symétrique d'un point M invariablement lié à (Σ), c'est-à-dire d'un point fixe. La surface trajectoire de M′ sera donc homothétique à la podaire de M par rapport à (Σ), le rapport d'homothétie étant 2.

Si la surface (Σ) est fermée, les différentes surfaces trajectoires seront fermées; les intégrales A, A′, A″, étendues à toutes les positions de (Σ'), seront nulles; le volume des surfaces trajectoires, et par conséquent celui des surfaces podaires qui en est la huitième

partie, deviendra une fonction du second degré des coordonnées de M′ par rapport à des axes invariablement liés à (Σ′), ou, ce qui est la même chose, des coordonnées de M par rapport à des axes fixes.

Le théorème relatif aux volumes des podaires, donné par M. Hirst au t. LXII du *Journal de Crelle,* est donc un cas particulier de la proposition générale relative au volume des surfaces trajectoires.

En terminant, j'indiquerai une proposition analogue à celle de M. Holditch, et relative aux volumes des surfaces trajectoires des différents points d'une droite.

Supposons que cette droite de la figure mobile ait été prise pour axe des x. L'expression du volume de la surface décrite par le point d'abscisse x sera

$$(32)\qquad V = \frac{\Theta}{3}x^3 + Ax^2 + Bx + C.$$

Θ étant l'aire de cette portion de la sphère de rayon 1 qui contient les extrémités des parallèles menées par le centre de la sphère à la droite dans toutes ses positions.

Si l'on désigne par V_1, V_2, V_3, V_4 les volumes décrits par les points 1, 2, 3, 4 d'abscisses x_1, x_2, x_3, x_4, et que l'on pose

$$(12) = x_1 - x_2,$$

on aura

$$(33)\qquad \frac{V_1}{(12)(13)(14)} + \frac{V_2}{(21)(23)(24)} + \frac{V_3}{(31)(32)(34)} + \frac{V_4}{(41)(42)(43)} = \frac{\Theta}{3}.$$

On pourra faire différentes applications de ces formules. Par exemple, les surfaces parallèles à une surface fixe peuvent être considérées comme les trajectoires des points d'une droite, et le résultat connu, relatif à ces surfaces, est bien d'accord avec la formule (32) (¹).

(¹) Dans le *Messenger of Mathematics* (février 1878, p. 150) M. Elliot a fait connaître une formule analogue à la formule (33), mais seulement pour le cas des mouvements fermés dans lesquels on a $\Theta = 4\pi$.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KOWALSKI, professeur d'Astronomie à l'Université de Kazan. — RECHERCHES SUR LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE. Kazan, 1878; in-8°, XI-172 pages.

Les nombreuses théories de la réfraction que l'on possède aujourd'hui s'accordent toutes pour assigner des valeurs presque identiques aux réfractions dont la connaissance est vraiment indispensable aux astronomes, c'est-à-dire aux réfractions relatives à des distances zénithales qui n'excèdent pas 80 degrés. C'est que, jusque vers 80 degrés, la loi suivant laquelle on fait décroître la densité des couches atmosphériques n'a que très-peu d'influence sur le résultat, de sorte que l'hypothèse simple de Cassini, qui suppose la densité constante, suffit déjà pour obtenir des nombres sensiblement exacts. Il n'en est plus de même pour les réfractions qui s'opèrent plus près de l'horizon. Les valeurs de la réfraction horizontale moyenne, adoptées dans les tables les plus répandues, présentent des différences qui vont jusqu'à 80 secondes, et, en comparant ces tables aux observations, il n'est pas rare de rencontrer des écarts de 100 et 200 secondes lorsqu'il s'agit d'astres observés à moins de 1 degré de l'horizon.

Cette imperfection manifeste de la théorie continue de préoccuper les géomètres et de les exciter à de nouveaux efforts. Peu d'années après la publication du travail historique de M. Bruhns, qui avait tenté de résumer l'état de la question, on a vu paraître deux théories nouvelles, celle de M. Bauernfeind (1864) et celle de M. Gyldén (1865); cette dernière a été comparée, par M. Fuss, à une longue série d'observations instituées spécialement pour cet objet à l'Observatoire de Poulkova. Enfin, voici un travail très-important sur le même sujet que vient de publier M. Kowalski, directeur de l'Observatoire de Kazan. M. Kowalski ne s'est pas borné à exposer une nouvelle théorie qui lui a servi à construire des tables d'un usage très-commode ; on trouve encore dans son Mémoire des matériaux d'observation extrêmement précieux, en raison de l'étendue des limites entre lesquelles a varié la température (+ 29° et — 38°C.). La partie théorique témoigne d'une étude approfondie du sujet; on y rencontre beaucoup de remarques judi-

cieuses et *suggestives*, pour nous servir d'un mot anglais qui rend bien notre pensée. C'est, en somme, un travail d'une sérieuse valeur, où nous regrettons seulement d'avoir rencontré quelques méprises que nous signalerons en passant.

M. Kowalski commence par établir les formules fondamentales sur lesquelles repose la théorie des réfractions astronomiques aussi bien que la mesure des hauteurs par le moyen du baromètre. Mais, à la place de l'équation bien connue

$$dp = -g\rho\left(\frac{a}{a+h}\right)^2 dh,$$

qui exprime la condition d'équilibre de l'atmosphère en tenant compte de la variation de la gravité dans la verticale, il adopte la suivante :

$$dp = -g\rho\, dh,$$

parce que, selon lui, la colonne d'air qui agit sur le baromètre a la forme d'un *cône* dont le sommet se trouve au centre de la Terre, et dont l'élargissement compense la diminution de la pesanteur. C'est là une conception erronée qui remonte à G.-S. Ohm et qui a été abandonnée depuis longtemps, car elle suppose que l'air se comporte comme un liquide enfermé dans un vase. Heureusement, la correction due à la variation de la pesanteur est sans importance pour le calcul de la réfraction; mais il faut en tenir compte dans la formule barométrique, et c'est à tort qu'elle y a été négligée (p. 12). M. Kowalski s'efforce encore de démontrer que, si l'on conserve le facteur $\left(\frac{a}{a+h}\right)^2$, la pression p ne peut plus s'annuler à la limite de l'atmosphère; il est facile de s'assurer que cette objection n'est pas fondée (si la démonstration de M. Kowalski était exacte, elle s'appliquerait à *toutes* les formules barométriques).

Avant d'exposer sa nouvelle théorie de la réfraction, fondée sur une hypothèse particulière concernant le décroissement de la température, M. Kowalski entre dans une discussion intéressante des principales théories anciennes, et il établit notamment des rapprochements instructifs entre les théories de Laplace, d'Ivory, de Lubbock, de Bessel, de Gyldén.

Si l'on fait abstraction des artifices particuliers auxquels ont recours ces divers géomètres pour obtenir la valeur de l'intégrale définie

qui exprime la réfraction, on peut dire que les différences qui existent entre leurs théories viennent uniquement de la loi suivant laquelle chacun d'eux fait décroître la densité de l'air. Or, le décroissement de la densité est intimement lié au décroissement de la température, de sorte qu'on peut aussi classer les diverses théories d'après la forme de la fonction qui représente le rapport $\frac{T}{T_0}$ des températures absolues qui correspondent à l'altitude h et au niveau de la mer. Schmidt et Bauernfeind supposent que la température décroît d'une manière uniforme à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère, ce qui revient à poser

$$\frac{T}{T_0} = 1 - Ah.$$

M. Gyldén, à son tour, fait

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 - \frac{1}{2}Ah\right)^2.$$

Ivory admet que la température de l'air varie exactement comme sa densité, et il pose

$$1 - \frac{T}{T_0} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Lubbock adopte, pour la fraction $\frac{T}{T_0}$, une loi moins simple, dont nous parlerons plus loin.

Bessel (qui, d'ailleurs, n'a fait qu'approprier à son usage la théorie de Kramp) donne à la même fonction une forme exponentielle, qui conduit à une forme analogue pour le rapport $\frac{\rho}{\rho_0}$,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{h}{m}}.$$

Dans cette hypothèse, la densité décroît donc en progression géométrique, comme dans l'hypothèse de Newton; mais le décroissement est moins rapide, parce que, chez Bessel, la température diminue lentement, tandis que Newton la suppose constante. L'hypothèse d'Ivory conduit à la relation suivante entre la densité ρ et l'altitude h:

$$\frac{h}{l} = -\frac{7}{9}\log\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{4}{9}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right),$$

qui représente une sorte de combinaison de la progression géométrique et de la progression arithmétique. Laplace emploie également une combinaison de ce genre, mais sous une forme qui facilite singulièrement l'intégration de la différentielle

$$\frac{\sin z\,d\rho}{\sqrt{\cos^2 z + 2u}},$$

qui représente l'élément de la réfraction, et dans laquelle

$$u = \frac{h}{a} - \alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Au lieu d'exprimer la densité ρ en fonction de h, Laplace l'exprime directement en fonction de la variable u, qui diffère très-peu de $\frac{h}{a}$; il pose

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + f\frac{u}{m}\right) e^{-\frac{u}{m}},$$

et il détermine les deux constantes m, f, de manière à reproduire une valeur donnée de la réfraction horizontale. M. Kowalski fait voir qu'en déterminant ces constantes d'une manière un peu différente on peut faire coïncider la théorie de Laplace avec celle d'Ivory; il suffit pour cela de prendre

$$m = 0{,}0008641, \quad f = 0{,}3356,$$

au lieu de faire, avec Laplace,

$$m = 0{,}0007418, \quad f = 0{,}4904.$$

En développant les formules de Laplace et en modifiant ses constantes comme il vient d'être dit, on trouve en effet

$$1 - \frac{T}{T_0} = 0{,}2224\,\omega - 0{,}0150\,\omega^2 + \ldots,$$

tandis que, dans la théorie d'Ivory, on a

$$1 - \frac{T}{T_0} = 0{,}2222\,\omega,$$

où ω désigne la différence $1 - \frac{\rho}{\rho_0}$. On voit que les deux théories

doivent donner à peu près le même résultat. L'abaissement de la température, qui se déduit des formules ci-dessus, est d'environ 1 degré C. par 170 mètres dans les couches basses, mais il se ralentit progressivement, et, vers 9000 mètres, il n'est plus que de 1 degré C. par 350 mètres. Ce ralentissement se retrouve dans les observations de M. Glaisher; seulement il y est beaucoup plus marqué. Les réfractions que M. Kowalski a calculées à l'aide des formules d'Ivory et de Laplace sont presque identiques, ainsi qu'on le voit par les nombres suivants, qui se rapportent à la température de 10 degrés C. et à la pression de 762 millimètres :

z.	Ivory.	Laplace.
45°	58",36	58",36
85	594,1	594,1
88	1102,4	1102,4
89,5	1731,6	1731,9
90	2074,7	2075,2

M. Kowalski a calculé une table complète des réfractions d'après l'hypothèse d'Ivory, en poussant l'approximation beaucoup plus loin que ne l'avait fait Ivory, qui néglige des termes ayant encore une influence sensible quand la température s'écarte de la température moyenne adoptée par lui. Les réfractions moyennes que l'on trouve dans cette table représentent en même temps les réfractions que fournit la théorie de Laplace lorsqu'on y introduit les nouvelles valeurs des constantes déterminées par M. Kowalski. Les réfractions moyennes de Lubbock et celles de M. Gyldén n'en diffèrent pas non plus beaucoup; mais celles de Bessel sont sensiblement plus fortes dans le voisinage de l'horizon. La réfraction horizontale qui correspond à la température de 10 degrés C. est, d'après Bessel, de 2194 secondes. Les Tables postérieures, où Bessel a remplacé, à partir de 85 degrés, ses nombres théoriques par des nombres empruntés directement à l'observation, donneraient encore une réfraction horizontale de 2118 secondes, plus forte de 43 secondes que celle que fournit la théorie d'Ivory.

Peu satisfait de la manière dont ces cinq théories représentent les observations de Kazan, M. Kowalski s'est décidé à entreprendre la construction de tables nouvelles, fondées sur une théorie entièrement différente. Il fait d'abord remarquer que les hypothèses qui

servent de base aux théories précédentes sont choisies de telle sorte que le rapport $\frac{T}{T_0}$ puisse toujours être représenté par une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de h,

$$\frac{T}{T_0} = 1 - Ah + Bh^2 - \ldots,$$

où le premier terme seul (Ah) ait une influence sensible sur la réfraction. Or, les observations de M. Glaisher sembleraient indiquer que le décroissement de la température suit souvent une loi très-différente. M. Kowalski est parvenu à représenter ces observations par une formule qui peut s'écrire comme il suit :

$$\frac{T_0}{T} - 1 = k\omega^{\frac{5}{7}}.$$

Pour la température moyenne de 62 degrés Fahr. ($T_0 = 521°$), on a $k = 0,1871$. Voici quelques nombres qui donneront la mesure de l'accord obtenu :

Hauteur.	Pression.	Abaissement $T_0 - T$. observé.	Abaissement $T_0 - T$. calculé.	Différence.
pi	po	o F.	o F.	o F.
0	30,04	0,0	0,0	0,0
1000	29,05	6,2	6,2	0,0
5000	25,10	20,9	21,6	— 0,7
10000	20,72	33,6	35,0	— 1,4
15000	17,13	43,8	44,5	— 0,7
20000	14,16	52,4	51,7	+ 0,7
25000	11,44	58,1	58,1	0,0
29000	9,75	61,8	61,9	— 0,1

Assurément, l'approximation avec laquelle la formule représente les observations est très-suffisante; mais les nombres relatifs aux couches les plus élevées sont trop incertains pour qu'il y ait lieu d'étendre la loi jusqu'à la limite de l'atmosphère et d'en conclure la température qui règne dans les couches voisines de cette limite. Ajoutons que le résultat auquel on arrive ainsi paraît *a priori* inadmissible, car, en faisant $\omega = 1$ dans la formule ci-dessus, on trouve $T_0 - T = 82°$F., ce qui donne — 20°F. (— 29° C.) pour la température des dernières couches de l'atmosphère, qui serait ainsi plus élevée que les températures qu'on observe très-fréquemment dans

les régions polaires. M. Kowalski conclut néanmoins de sa formule que

$$k = \frac{T_0}{T_n} - 1,$$

où T_n est la température *invariable* de la limite de l'atmosphère. de sorte que le coefficient k varie avec T_0. En désignant par t_0 la température de la surface, exprimée en degrés centigrades, et en prenant $T_n = 273 - 29 = 244$, on aurait

$$k = \frac{t_0 + 29}{244}.$$

Pour l'état de l'atmosphère qui correspond à la température de 30°, 8, observée par Gay-Lussac au début de son ascension aérostatique, on trouverait $k = 0,245$, et il s'ensuivrait qu'à la hauteur de 10000 pieds Gay-Lussac aurait dû observer un abaissement de 25 degrés C. (45 degrés F.) au lieu de 18 degrés C. (33 degrés F.); l'écart est ici de 7 degrés C. (12 degrés F.). M. Kowalski a encore comparé sa formule aux moyennes mensuelles que fournissent les observations de Genève et du Saint-Bernard; mais tout ce qu'on peut légitimement conclure de ces comparaisons, c'est qu'en général le décroissement de la température est plus rapide en été qu'en hiver. Au reste, les réfractions observées à Kazan l'ont conduit à augmenter fortement la valeur du coefficient k; en définitive, M. Kowalski prend

$$k = \frac{t_0 + 45}{228},$$

en supposant que la température des dernières couches de l'atmosphère est de 45 degrés C. au-dessous de zéro.

Si M. Kowalski s'était contenté de présenter sa formule comme une expression assez approchée de la loi empirique qui se dégage des observations de M. Glaisher, nous n'y trouverions rien à redire; mais il prétend la déduire des principes de la « Mécanique rationnelle », comme une conséquence nécessaire de la Théorie mécanique de la chaleur, et l'on va voir quelle étrange application M. Kowalski a faite de cette théorie. Rappelons d'abord qu'une première tentative pour établir par des considérations théoriques la loi du décroissement de la température avait été faite par Lubbock en

1855 ; sa formule peut s'écrire

$$\frac{T_0}{T} - 1 = k\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right],$$

où k est une constante qui diffère peu de 0,5. Lubbock y arrive en supposant que la quantité de chaleur Q absorbée par 1 kilogramme d'air est une fonction linéaire de la température T,

$$Q = a + bT,$$

et, en combinant cette équation avec l'équation de Laplace,

$$Q = A + BT\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

où $\gamma = 1,4$ est le rapport des deux chaleurs spécifiques.

Les deux équations ne sont pas contradictoires (comme le veut M. Kowalski); mais elles reposent toutes les deux sur des suppositions arbitraires, car l'équation de Laplace ne satisfait pas d'une manière générale à l'équation différentielle qui détermine la chaleur Q. La formule de Lubbock n'est donc autre chose qu'une formule d'approximation empirique. M. Kowalski la remplace par la suivante :

$$\frac{T_0}{T} - 1 = k\,\omega^{\frac{1}{\gamma}},$$

où $\frac{1}{\gamma} = \frac{5}{7}$. La discussion des observations de M. Glaisher montre, en effet, que la dépression du thermomètre $T_0 - T$ n'est pas proportionnelle à ω, comme le veut l'hypothèse d'Ivory, mais à une puissance de ω voisine de $\omega^{\frac{2}{3}}$. Soit maintenant v le volume spécifique : on aura

$$\omega = 1 - \frac{v_0}{v},$$

et, de plus,

$$\frac{pv}{p_0 v_0} = \frac{T}{T_0}.$$

En tenant compte de ces relations, la différentiation de l'équation ci-dessus donne

$$\gamma p_0 (v - v_0)\, dT = (T - T_0)\, p\, dv.$$

C'est cette équation différentielle que M. Kowalski s'est efforcé d'établir *a priori* par les considérations suivantes ; ne pouvant en donner un résumé intelligible, nous sommes obligés de citer textuellement. La théorie de la chaleur fournit d'abord l'équation connue

$$dQ = c_0 dT + \frac{p dv}{E},$$

où c_0 est la chaleur spécifique sous volume constant.

« Cette formule montre que le travail élémentaire pdv est produit par l'excès de l'énergie calorique entière EQ sur celle qui est dépensée pour échauffer le gaz à une certaine température. Soit Q_0 cette dernière quantité de chaleur, et EQ_0 l'énergie calorique correspondante : on aura

$$E(Q - Q_0) p dv$$

pour la valeur du moment virtuel respectif. Quand le gaz n'est pas libre de se dilater et de produire le travail externe, toute la chaleur Q que le gaz reçoit sera dépensée pour augmenter la température sous un volume constant et, par cela même, pour accroître sa force élastique ; le moment virtuel correspondant à ce dernier cas aura la valeur $EQ v dp$.

» Cela posé, concevons l'unité de poids de l'air atmosphérique faisant équilibre avec l'air environnant, et supposons qu'on y ajoute une quantité Q de chaleur. Soient p la pression, v le volume de l'air que nous considérons, et qu'à partir de cet état l'équilibre soit troublé, et que l'air, en se dilatant d'une quantité infiniment petite dv, donne du travail externe produit par la force élastique $E(Q - Q_0)$. Pour que l'équilibre, à chaque instant, soit rétabli, il est nécessaire que la détente de l'air soit compensée par la perte d'une partie de son élasticité, ce qui exige que la somme des moments virtuels $E(Q - Q_0) p dv$ et $EQ v dp$, abstraction faite des signes, soit nulle. On aura donc

$$(Q - Q_0) p dv + Q v dp = 0. »$$

En tenant compte de la relation $pv = CT$, on tire de là

$$CQ dT = Q_0 p dv.$$

Comme on le voit, M. Kowalski appelle *moments virtuels* des

produits qu'il forme en multipliant un travail EQ par un travail pdv; c'est comme si l'on évaluait une dépense de chauffage en *multipliant* le prix du charbon par le prix des allumettes. Quoi qu'il en soit, il s'agit maintenant de déterminer les quantités de chaleur Q, Q_0. M. Kowalski suppose donc que l'air s'échauffe fortement au contact du sol, puis s'élève et se dilate aux dépens de la chaleur ainsi gagnée, sans en rien perdre par rayonnement. « La chaleur Q est consommée à la surface de la Terre sous la pression constante p_0, et cette chaleur est dépensée en tout pour l'expansion successive de l'air dans son trajet, en partant du volume v_0 correspondant à la pression p_0 pour arriver au volume final v. » L'équation

$$C\,dQ = c_0 v\,dp + c_1 p\,dv,$$

où $c_1 = \gamma c_0$ est la chaleur spécifique sous pression constante, donne dès lors

$$Q = \frac{c_1}{C} p_0 (v - v_0).$$

Quant à la chaleur Q_0, elle est « consommée sous un volume constant. Cette chaleur n'est absorbée qu'à la surface de la Terre; donc, si nous désignons par T_0 la température de la couche inférieure de l'air, nous aurons

$$Q_0 = c_0 (T - T_0).$$

Nous admettons ici que la différence $T - T_0$ est positive. » En substituant ces valeurs de Q et de Q_0 dans l'équation trouvée plus haut, on a

$$c_1 p_0 (v - v_0)\,dT = c_0 (T - T_0)\,p\,dv;$$

c'est l'équation différentielle qu'il s'agissait d'établir. Mais que faut-il entendre ici par la température T? La phrase qui vient d'être citée semble indiquer que c'est la température qui résulte de l'échauffement de l'air; mais l'emploi qu'on fait de l'expression de la chaleur Q_0 veut que T soit la température finale à laquelle l'air arrive en se dilatant, de sorte qu'elle serait à la fois supérieure et inférieure à T_0. Puis M. Kowalski paraît distinguer la chaleur qui échauffe de la chaleur qui travaille, comme s'il y avait deux espèces de chaleur ayant des attributs différents. N'insistons pas; il est évident, pour nous, que cette singulière théorie a été imaginée après coup pour justifier une formule empirique.

S'il s'agissait de mettre en équation cette hypothèse, qu'une masse d'air, ayant reçu la chaleur Q sous la pression constante p_0, se dilate ensuite sans variation de chaleur jusqu'à atteindre la pression p et la température T qui conviennent à un certain niveau atmosphérique, on aurait pour la première phase

$$Q = c_1(T_1 - T_0),$$

et pour la seconde

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{7}},$$

où T_1 est la température qui résulte de l'échauffement préalable. L'élimination de T_1 donne

$$\frac{Q}{c_1} = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{7}} - T_0;$$

c'est l'équation de Laplace, qui n'est vraie que dans ce cas particulier. En supposant la température T_1 très-peu différente de T_0, ces formules s'accorderaient avec les résultats de M. Glaisher vers 2500 pieds d'altitude; mais, au delà de ce niveau, il faudrait supposer des températures T_1 de plus en plus élevées pour arriver à représenter les températures T par l'hypothèse en question, qui se trouve ainsi écartée par une conséquence inadmissible. Si l'on réfléchit d'ailleurs au rôle important que joue la vapeur d'eau dans les phénomènes météorologiques des couches inférieures, il ne paraît guère possible d'expliquer la distribution de la chaleur dans ces couches sans tenir compte de l'humidité atmosphérique. C'est dans cette dernière voie que sir William Thomson, M. Peslin, M. Mendeléief, ont cherché la solution du problème. Il ne faudrait pas non plus perdre de vue que le décroissement de la température varie beaucoup dans le cours d'une journée. Dans ses ascensions de 1877, M. Glaisher a trouvé, pour les premiers 1000 pieds, une diminution de 7°,5 à 10 heures du matin et 2°,8 vers 7 heures du soir; pendant la nuit, la température, loin de décroître, augmente souvent avec la hauteur, jusqu'à un certain niveau. Or, ces variations doivent exercer une forte influence sur la réfraction dans le voisinage de l'horizon. Il est probable qu'elles ne se font sentir que dans les couches inférieures de l'atmosphère, mais cela suffit pour changer la valeur de la réfraction, qui sera d'autant plus faible que

le décroissement de la température sera plus accentué. Le décroissement rapide adopté par M. Kowalski donne, pour la température de 10 degrés C., une réfraction horizontale d'environ 32 minutes, tandis que la théorie de Bessel, qui suppose un décroissement très-lent, donne 36',5.

Pour obtenir les valeurs numériques des réfractions, M. Kowalski emploie, jusqu'à 80 degrés de distance zénithale, le développement en série ordonnée suivant les puissances impaires de tang z, et, à partir de 80 degrés, une série plus convergente qu'il se procure en posant $1 - \omega = e^{-x}$, ce qui ramène le problème à la détermination de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{a^2\cos^2 z + x + \Phi}},$$

où

$$\Phi = \frac{k\omega^{\frac{5}{7}}}{1 + k\omega^{\frac{5}{7}}} - \int \frac{k\omega^{\frac{5}{7}}}{1 + k\omega^{\frac{5}{7}}} \frac{d\omega}{1 - \omega} - \varepsilon\omega.$$

En développant le radical en série ordonnée par rapport aux puissances de Φ, on peut calculer cette intégrale à l'aide des fonctions ψ employées par Kramp, Bessel, Laplace, etc. Le procédé ne laisse pas d'être laborieux. On aurait des formules plus simples en remarquant que les observations de M. Glaisher sont représentées tout aussi bien par la formule

$$1 - \frac{T}{T_0} = 0,104\,\omega + 0,069\sqrt{\omega}.$$

Mais M. Kowalski n'a point reculé devant la longueur des calculs, et il a construit : 1° trois tables de réfractions appropriées au calcul logarithmique, l'une d'après la théorie d'Ivory, en remplaçant le coefficient $\frac{2}{9}$ par

$$\frac{t_0 + 45}{273},$$

les deux autres d'après sa propre théorie, avec les deux valeurs du coefficient k que l'on trouve plus haut; 2° une quatrième table, qui est une transformation de l'une des précédentes, par laquelle on évite l'emploi des logarithmes. Voici quelques nombres tirés de cette table; ils représentent les réfractions correspondant à une

température de t degrés centigrades et à une pression de $76 + \zeta$ centimètres.

z.	Réfractions.
$80^{\circ}.\ 0'$	$331'',35 - t(1,27 - 0,0047t) + \zeta(4,40 - 0,0170t)$
$85.\ 0$	$616,4 - t(2,58 - 0,0100t) + \zeta(8,29 - 0,035\,t)$
$89.\ 0$	$1529,0 - t(9,63 - 0,0498t) + \zeta(21,72 - 0,148\,t)$
89.40	$1884,3 - t(14,44 - 0,0978t) + \zeta(27,37 - 0,232\,t)$

Cette table est d'un usage très-commode, mais elle suppose un état de l'atmosphère assez éloigné de l'état moyen. M. Kowalski paraît être lui-même de cet avis, car il semble dire (p. 109) que l'hypothèse d'Ivory représente mieux cet état moyen. Quoi qu'il en soit, le travail de M. Kowalski sera fort utile à ceux qui voudront entreprendre de nouvelles recherches sur les réfractions atmosphériques.

R. Radau.

BOCKWOLDT (G.). — **Ueber die Enneper'schen Flächen mit constantem positivem Krümmungsmaas, bei denen die eine Schaar der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wird.** Inaugural-Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde an der Georg-Augusts Universität zu Göttingen. Göttingen, W.-Fr. Kästner, 1878, in-8°, 32 pages.

Parmi les géomètres allemands, M. Enneper est, avec Joachimsthal, presque le seul qui se soit constamment occupé de Géométrie infinitésimale, et plus particulièrement de cette branche de la Science, cultivée avec tant de zèle par les géomètres français, qui trouve son origine dans le Mémoire de Lagrange sur les cartes géographiques, et surtout dans celui de Gauss. M. Bockwoldt, qui est sans doute un des élèves de M. Enneper, vient d'étudier, dans sa *Dissertation inaugurale,* les surfaces à courbure constante positive, découvertes il y a dix ans par cet habile géomètre. Bour, on le sait, dans son *Mémoire sur les surfaces applicables,* a montré que l'on peut toujours déterminer des surfaces hélicoïdes applicables sur une surface de révolution, et, en particulier, sur une sphère. En dehors des surfaces de révolution applicables sur la sphère anciennement connues et des surfaces hélicoïdes découvertes par Bour, on ne connaît, croyons-nous, d'autres surfaces à courbure constante positive que celles auxquelles est consacré le travail

dont nous rendons compte, travail qui contient une discussion très-détaillée et très-bien faite de ces surfaces. Donnons d'abord le théorème fondamental qui sert de base à cette recherche.

Si une surface à courbure constante positive a un système de lignes de courbure planes, les plans de ces lignes passent tous par une droite fixe T. Les lignes de courbure du second système sont alors sphériques, et les sphères qui les contiennent coupent la surface orthogonalement. Leurs centres se trouvent sur la droite T. Réciproquement, les surfaces pour lesquelles les lignes de courbure ont la relation indiquée sont à courbure constante positive.

Voici, du reste, quelles sont les formules définissant la surface. Soient u et v les variables indépendantes, et u_1, v_1 deux fonctions définies par les équations

$$g^2 \frac{du_1^2}{du^2} = \mathrm{A}\cos 2u_1 - \mathrm{C} - 1,$$

$$g \frac{dv_1^2}{dv^2} = \mathrm{C} - \mathrm{A}\cos 2v_1.$$

Posons, en outre,

$$\frac{d\varphi^2}{du_1^2} = \frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{C}^2}{(\mathrm{A}\cos 2u_1 - \mathrm{C} - 1)(\mathrm{A}\cos 2u_1 - \mathrm{C})^2}.$$

On aura, pour les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la surface, les expressions

$$x = \rho\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \frac{g}{\sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{C}^2}} \frac{\sqrt{\mathrm{A}\cos 2u_1 - \mathrm{C}}}{\sin(u_1 + v_1)},$$

$$\sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{C}^2}.z = g\cot(u_1 + v_1)\sqrt{\mathrm{C} - \mathrm{A}\cos 2v_1} + \int_0^{v_1} g\sqrt{\mathrm{C} - \mathrm{A}\cos 2v_1}.dv_1,$$

g^2 désignant la courbure totale.

L'auteur discute ces formules, ramène à la forme normale de M. Weierstrass les intégrales elliptiques qui y figurent. Il étudie aussi celle des surfaces parallèles à la proposée pour laquelle la courbure moyenne est constante. Enfin, il termine par la discussion détaillée et numérique du cas où l'on a $\mathrm{A} = 2$, $\mathrm{C} = 0$. L'auteur a même présenté un modèle en plâtre construit d'après les données numériques calculées pour cet exemple spécial. G. D.

HEINE (E.). — HANDBUCH DER KUGELFUNCTIONEN. THEORIE UND ANWENDUNGEN. Erster Band. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Berlin, G. Reimer, 1878; in-8°, 484 pages.

La théorie des fonctions sphériques offre, dans sa partie élémentaire, le sujet d'études le plus propre à intéresser un jeune géomètre, à lui faire connaître, dans leur application à un sujet intéressant, les méthodes de Calcul intégral, les fractions continues et la théorie des séries. Aussi, depuis longtemps, l'Ouvrage que M. Heine a publié en 1861, et où sont rassemblés avec beaucoup de soin et beaucoup d'ordre tous les résultats de la théorie des fonctions sphériques, était connu et très-apprécié des nombreux géomètres qui ont eu à s'occuper de ces fonctions. Les méthodes de Legendre, de Laplace, de Dirichlet, de Lamé et de M. Liouville, ainsi que celles qui sont propres à l'auteur, y étaient exposées d'une manière très-complète, et M. Heine avait réussi à composer une monographie comme nous serions heureux d'en avoir sur bien des sujets de Mathématiques.

Depuis 1861, la théorie des fonctions sphériques a reçu des accroissements de différents côtés; les beaux travaux de M. Tchebychef et de M. Heine lui-même nous ont beaucoup appris sur l'application des fractions continues au Calcul intégral; ceux de M. Hermite, publiés dans ces derniers temps sur le même sujet, offrent à notre admiration les premières applications d'une Méthode susceptible de nombreuses conséquences. D'un autre côté, les méthodes de Cauchy ont commencé à pénétrer dans la théorie des fonctions de Legendre et de Laplace. Si l'on tient compte en même temps du nombre des Mémoires qui, dans ces dernières années, sont venus accroître nos connaissances sur les différentes parties de ce sujet, on reconnaîtra que le Traité primitif de M. Heine, sans cesser d'être utile, était devenu incomplet, et qu'une nouvelle édition de cet Ouvrage devait contenir plusieurs Chapitres nouveaux.

Parmi les additions les plus importantes, nous citerons la théorie des séries trigonométriques (p. 53-64). L'auteur l'expose d'une manière détaillée en employant les travaux de Dirichlet, Riemann, et ceux de MM. du Bois-Reymond, Cantor, Ascoli et Dini.

Un autre Chapitre complémentaire, très-intéressant, est consacré à la série hypergéométrique généralisée, celle qui est définie par la formule

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,\xi) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}q^\xi + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^\alpha)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}q^{2\xi}+\ldots.$$

Ces additions et quelques autres sont distinguées du texte et placées à la fin du Chapitre ; mais il y en a un très-grand nombre qui font corps avec le reste de l'Ouvrage. Nous citerons les recherches de MM. Hermite et Fuchs sur l'équation de Lamé, les travaux de M. Heine sur le développement en fraction continue de l'intégrale $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$. Le cinquième Chapitre de l'Ouvrage, où on les trouvera développés, est entièrement consacré à la théorie des fractions continues.

En résumé, l'Ouvrage de M. Heine, dans sa nouvelle édition, rendra les plus grands et les plus réels services, et nous en recommandons vivement l'étude à tous ceux qui s'occupent de la théorie des fonctions sphériques. G. D.

MÉLANGES.

ESSAI D'UNE THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES POLAIRES INCLINÉES,

PREMIÈRE PARTIE (SUITE) (¹);

Par ED. DEWULF,

Commandant du Génie.

XIV. La polaire inclinée d'un point P passe par ce point ; la droite polaire de P fait donc un angle α avec le rayon vecteur issu de ce point, c'est-à-dire avec la droite qui joint P au point infiniment voisin de la polaire inclinée. Donc :

(¹) *Voir* t. II, 2e série, p. 41-48.

La tangente à la polaire inclinée, au pôle P *de cette courbe, fait un angle égal à* $-\alpha$ *avec la droite polaire de* P *par rapport à* C_n.

Par suite, la polaire inclinée $C_n^{(\alpha)}$ d'un point de C_n, par rapport à cette courbe, la coupe, sur un angle $-\alpha$, au pôle P. Et quand $\alpha = 0$, la polaire inclinée d'un point d'une courbe, par rapport à cette courbe, lui est tangente en ce point. Enfin les polaires inclinées $C_n^{(\alpha')}$ et $C_n^{(\alpha)}$ d'un même point P, par rapport à C_n, se coupent en P sous un angle égal à $\alpha' - \alpha$.

Le théorème ci-dessus explique pourquoi le pôle équivaut à deux points pour la détermination d'une polaire inclinée (VII).

XV. On donne un faisceau F_n de courbes d'ordre n et une droite d; chaque point D de d détermine une courbe de F_n : quelle est l'enveloppe de la tangente en D à cette courbe, quand le point D parcourt la droite d? La connaissance de cette courbe nous sera utile dans la suite.

Soit P un point quelconque du plan; ses premières polaires ordinaires, par rapport aux courbes de F_n, forment un faisceau F_{n-1} projectif avec le faisceau F_n. Les courbes correspondantes de ces deux faisceaux engendrent par leurs intersections une courbe de l'ordre $2n-1$, qui coupe la droite d en $2n-1$ points; la droite qui joint le point D à chacun de ces points est une tangente au lieu cherché, qui est donc *une courbe* Γ *de la classe* $2n-1$. Comme $2n-2$ courbes de F_n sont tangentes à la droite d, cette droite est une tangente multiple de l'ordre $2n-2$ de la courbe Γ; cette courbe est donc *unicursale, son genre p est égal à* 0.

La droite d coupe Γ en $4(n-1)$ points aux $2(n-1)$ points de contact et ne peut couper la courbe en aucun autre point, car, si elle la coupait en un autre point M, ce point serait l'intersection de deux tangentes infiniment voisines, menées à deux courbes du faisceau passant par ce point, ce qui est impossible. *La courbe* Γ *est donc de l'ordre* $4(n-1)$. La connaissance de la classe et du degré d'une courbe unicursale suffit pour déterminer ses autres singularités ordinaires. Ainsi :

Si l'on a un faisceau F_n *de courbes de l'ordre n et une droite d, et si l'on mène par chaque point de d la tangente à la courbe du*

faisceau déterminée par ce point, cette tangente enveloppe une courbe unicursale de la classe $2n - 1$, *de l'ordre* $4(n-1)$, *dont la droite d est une tangente multiple de l'ordre* $2(n-1)$, *qui a* $4(n-2)(2n-3)$ *points doubles*, $3(2n-3)$ *points de rebroussement, et qui n'a aucun point d'inflexion.*

Il est facile de voir que *les tangentes en* $n-1$ *des points de rebroussement passent par les* $n-1$ *points de d qui correspondent au point de l'infini dans l'involution marquée sur d par* F_n.

Si la droite d passe par un point O de la base de F_n, la courbe Γ se décompose en un point, le point O, et une courbe de la classe $2n-2$, de l'ordre $4n-6$, dont la droite d est une tangente multiple de l'ordre $2n-3$, et qui, par suite, est encore unicursale, et a $6(n-2)$ points de rebroussement et $4(n-2)(2n-5)$ points doubles.

Enfin, *si la droite d passe par* δ *points de la base de* F_n, *la courbe* Γ *se décompose en ces* δ *points et une courbe unicursale de la classe* $2n-1-\delta$, *dont la droite d est une tangente multiple de l'ordre* $2n-2-\delta$, *de l'ordre* $2(2n-2-\delta)$, *et qui a* $3(2n-3-\delta)$ *points de rebroussement et*

$$4(n-2)(2n-3) - 8(n-1)\delta + 2\delta^2$$

points doubles.

XVI. Il résulte du théorème précédent que :

Dans un faisceau F_n *de courbes d'ordre n, il y a* $2n-1$ *courbes qui coupent une droite donnée sur un angle donné.*

Ce théorème paraît être en contradiction avec un théorème connu dans le cas où $\alpha = 0$. Dans un faisceau F_n il n'y a, en effet, que $2(n-1)$ courbes tangentes à une droite donnée; mais il faut remarquer qu'il faut ajouter à ces courbes celle qui est déterminée par le point à l'infini de la droite pour avoir toutes celles qui coupent la courbe sous un angle nul. En effet, cette courbe coupe la droite sous un angle nul, et son asymptote au point à l'infini de la droite est parallèle à cette droite sans se confondre avec elle.

C'est encore ainsi que la polaire inclinée d'un point P, par rapport à une courbe C_n, coupe cette courbe en n^2 points, même dans

le cas où $\alpha = 0$; mais alors n de ces points sont à l'infini sur C_n, et les droites qui les joignent au point P sont parallèles aux asymptotes de C_n, sans se confondre avec elles.

XVII. On donne deux faisceaux de courbes F_n et f_m, les unes de l'ordre n, les autres de l'ordre m, quel est l'ordre du lieu des points où une courbe du faisceau F coupe une courbe du faisceau f sous un angle constant α?

Soient d une droite quelconque, D un point d'intersection de cette droite avec le lieu cherché, β l'angle sous lequel la courbe de f_m, déterminée par le point D, coupe la droite d, la courbe de F_n, déterminée par ce même point, coupera d sous un angle $\beta + \alpha$. Il y a $2m - 1$ courbes du faisceau f_m, qui coupent d sous un angle β aux points $A_1, A_2, \ldots, A_{2m-1}$; il y a pareillement $2n - 1$ courbes du faisceau F_n qui coupent d sous un angle $\beta + \alpha$ aux points $B_1, B_2, \ldots, B_{2n-1}$; les groupes des points A et B forment deux involutions projectives, quand on fait varier β; ces deux involutions ont $2(m + n - 1)$ points correspondants communs, c'est-à-dire qu'il existe généralement $2(m + n - 1)$ points de la droite d, tels que, si l'on considère l'un d'eux comme appartenant à l'une des involutions, il appartient aussi au groupe correspondant de l'autre involution. Donc :

Le lieu géométrique des points où les courbes de deux faisceaux, les unes de l'ordre n et les autres de l'ordre m, se coupent sur un angle constant est de l'ordre $2(m + n - 1)$.

On voit, comme plus haut, qu'il faut diminuer ce chiffre d'une unité quand on veut que les courbes des deux faisceaux soient tangentes les unes aux autres, et que l'ordre du lieu géométrique est alors $2(m + n) - 3$.

En faisant $m = 1$ dans le théorème précédent, on trouve que :

Le lieu géométrique des pieds des obliques issues d'un point P *qui coupent sous un angle constant les courbes d'un faisceau d'ordre n est de l'ordre $2n$.*

Ce théorème peut s'énoncer comme il suit :

Le lieu géométrique des $2n - 1$ points où les courbes d'un

faisceau F_n *coupent une droite sous un angle constant, quand la droite tourne autour d'un point fixe, est une courbe de l'ordre* $2n$.

On tombe sur des théorèmes connus en faisant $\alpha = 0$.

XVIII. Nous pouvons maintenant trouver combien il y a de courbes d'un faisceau F_n qui coupent une courbe donnée C_m sous un angle constant, égal à α.

Considérons la courbe C_m comme appartenant à un faisceau f_m; le lieu géométrique $\Gamma_{2(m+n-1)}$ des points où les courbes des deux faisceaux F_n et f_m se coupent sous l'angle α coupe la courbe C_m en $2m(m+n-1)$ points. Les points de la base du faisceau f_m se trouvent tous sur la courbe C_m et sur la courbe $\Gamma_{2(m+n-1)}$; ils sont, par conséquent, au nombre des $2m(m+n-1)$ points d'intersection de ces deux courbes. Soit M un quelconque des points autres que les points de la base de f_m; ce point, quel qu'il soit, détermine toujours la même courbe C_m du faisceau f_m, et la courbe de F_n qu'il détermine y coupe C_m sous l'angle α. Un point de la base de f_m, au contraire, ne détermine plus C_m, et c'est une autre courbe qui y est coupée sous l'angle α par la courbe de F_n qu'il détermine. Donc :

Le nombre des courbes d'ordre n *d'un faisceau* F_n *qui coupent sur un angle donné une courbe* C_m *d'ordre* m *est égal à* $m[m+2(n-1)]$.

Si $n=1$, nous tombons sur un théorème connu.

Si $\alpha = 0$, le nombre des points où C_m est coupée sous un angle nul par les courbes de F_n est toujours $m[m+2(n-1)]$; mais on voit, comme plus haut, que :

Le nombre des courbes d'ordre n d'un faisceau, qui sont tangentes à une courbe d'ordre m, est égal à $m(m+2n-3)$ [1].

XIX. Le théorème XIV, rapproché de la construction de la

---

[1] M. de Jonquières a démontré (*Comptes rendus* du 21 mars 1864) que, dans un système (μ, ν) de courbes d'ordre quelconque, il existe $m(m\mu+\nu)$ de ces courbes qui coupent une courbe donnée de degré m sous un angle donné de grandeur et de sens de rotation.

droite qui porte les pôles des polaires inclinées, par rapport à une courbe C_n, qui passent par un point fixe O, construction indiquée au n° VI, montre que cette droite est précisément la tangente en O à la polaire inclinée de ce point.

Pour abréger le discours, nous nommerons cette droite *droite polaire inclinée* du point O par rapport à C_n; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

La droite polaire inclinée d'un point O, *par rapport à* C_n, *est la tangente en* O *à la polaire inclinée de ce point par rapport à la même courbe.*

La droite polaire inclinée du point O coupe la polaire inclinée de ce point en $n-2$ points différents de O; ces points sont, avec le point O, les points polaires inclinés de la droite. On peut aussi déduire le théorème ci-dessus du théorème X.

XX. Une courbe fondamentale C_n étant donnée, à une figure formée de points correspond une figure corrélative formée des droites polaires inclinées et telle qu'à un point de la première figure correspond, dans la seconde, une seule droite, et que cette droite passe par le point de la première, et à une figure formée de droites correspond une figure formée des points polaires inclinés, telle qu'à une droite de la première figure correspond un groupe de $n-1$ points de la seconde situés sur la droite de la première.

Quand, dans la première figure, une droite tourne autour d'un point fixe, ses points polaires inclinés, dans la seconde, parcourent la polaire inclinée du point fixe, c'est-à-dire une courbe de l'ordre n qui passe par ce point.

C'est le corollaire du théorème XIII, et nous allons voir que :

Si un point de la première figure parcourt une droite, sa droite polaire inclinée dans la seconde enveloppe une courbe unicursale de la classe n dont la droite donnée est une tangente multiple de l'ordre $n-1$.

En effet, la droite polaire inclinée d'un point P est la tangente en P à la polaire inclinée de ce point (XIX); or les polaires in-

clinées des points d'une droite forment un faisceau et $n - 1$ points de la base de ce faisceau sont sur la droite; l'enveloppe cherchée est donc celle des tangentes aux points de la droite donnée aux polaires inclinées déterminées par ces points, et nous savons (XV) que cette enveloppe est de la classe n et est $n - 1$ fois tangente à la droite.

XXI. Quand un point P parcourt une courbe de l'ordre n', quelle est l'enveloppe de sa droite polaire inclinée par rapport à C_n?

Désignons par y la classe de cette enveloppe C_y; si nous imaginons que la droite polaire inclinée du point P roule sur C_y, elle passera y fois par un point quelconque M; ses points polaires inclinés se trouveront donc y fois sur la polaire inclinée de M et ne pourront s'y trouver plus de y fois; cela veut dire que la valeur de y est égale au nombre des points d'intersection de cette polaire inclinée et de la courbe donnée d'ordre n'; donc $y = nn'$. Ainsi :

L'enveloppe des droites polaires inclinées des points d'une courbe de l'ordre n', par rapport à C_n, est de la classe nn'.

Quand une droite enveloppe une courbe de la classe m, quel est l'ordre du lieu géométrique de ses points polaires inclinés par rapport à C_n? D'après le théorème XIII, cet ordre est nn', et nous pouvons encore le démontrer comme il suit. Soient C_x le lieu géométrique cherché, x son degré. Supposons qu'un point X parcoure C_x; il rencontrera x fois une transversale quelconque; sa droite polaire inclinée sera donc x fois tangente à l'enveloppe des droites polaires inclinées des points de cette transversale, qui est de la classe n (XX); par hypothèse, le point X est un point polaire incliné de la tangente à la courbe donnée de la classe m : il y a donc x tangentes communes à deux courbes, l'une de la classe m, l'autre de la classe n; donc $x = mn$.

XXII. Reprenons le théorème IV, que l'on peut démontrer comme il suit. Il s'agit de faire voir que, par un point M du plan, il ne passe qu'une des polaires inclinées du point P. Or la droite polaire ordinaire de M par rapport à C_n est déterminée, et, par suite, l'angle de cette droite et de PM l'est aussi. Il n'y a d'excep-

tion que quand le point M coïncide avec l'un des $(n-1)^2$ points polaires ordinaires de la droite de l'infini, dont la droite polaire a une direction indéterminée; ces points appartiennent donc, ainsi que le point P, à la base du faisceau; les $n^2-(n-1)^2-1=2(n-1)$ autres points de cette base ne peuvent être réels.

Les polaires inclinées d'un point P, par rapport à une courbe fixe C_n, formant un faisceau, pour toutes les valeurs de α, il y a $2(n-1)$ courbes de ce faisceau tangentes à une droite, et en particulier à la droite de l'infini. Donc :

Parmi les courbes du faisceau des polaires inclinées d'un point, par rapport à une courbe fixe, pour toutes les valeurs de α, il y a généralement $2(n-1)$ qui ont une branche parabolique.

Ces courbes peuvent être imaginaires; nous aurons à revenir sur cette question. Dans le cas où $n=2$:

La base du faisceau des polaires inclinées d'un point P, *par rapport à une conique fixe* C_2, *pour toutes les valeurs de* α, *a deux points réels et deux points imaginaires; et, parmi les courbes de ce faisceau, il y a deux paraboles réelles quand* C_2 *est une ellipse; leurs axes sont parallèles aux diagonales du parallélogramme construit sur les axes de* C_2; *ces paraboles séparent le groupe des ellipses du faisceau de celui de ses hyperboles. Ces deux paraboles n'existent pas dans le cas où* C_2 *est une hyperbole ou une parabole. Dans tous les cas, le faisceau renferme une seule hyperbole équilatère.*

Ce théorème peut être démontré directement; mais, comme il est une conséquence naturelle de l'étude des polaires inclinées des coniques, nous renvoyons pour sa démonstration au n° XXVII.

XXIII. Le faisceau des polaires inclinées d'un point P, par rapport à une courbe C_n et pour toutes les valeurs de α, marque sur la droite de l'infini une involution du $n^{\text{ième}}$ ordre, et nous avons vu (III) comment on peut déterminer un groupe de ces points; nous allons présenter cette construction sous une forme un peu différente, qui nous conduira à de nouvelles conséquences.

Supposons que l'on fasse tourner un angle α autour d'un poin fixe quelconque; dans chacune de ses positions, ses côtés marque-

ront deux points I et I′ sur la droite de l'infini; ces points engendrent deux ponctuelles projectives dont les points doubles imaginaires sont les points circulaires de l'infini ([1]). A un point I correspondent les $n-1$ points I″ où la première polaire ordinaire de I′ coupe la droite de l'infini, et à un point I″ ne correspond qu'un seul point I′ et, par suite, qu'un seul point I. Quand le point I′ se confond avec I_0, un des n points à l'infini de C_n, un des points I″ se confond avec I′, parce que la première polaire ordinaire d'un point d'une courbe, par rapport à cette courbe, passe en ce point; donc le point I″ ne peut jamais se confondre avec un point I en un point I_0, quand α a une valeur quelconque, et I″ coïncide avec I en tous les points I_0 quand $\alpha = 0$. Donc :

Les polaires inclinées, par rapport à C_n, ne sont généralement pas homothétiques avec C_n quand α a une valeur quelconque; elles le sont toujours quand $\alpha = 0$.

Si la courbe C_n est tangente à la droite de l'infini en un point I_1, les premières polaires ordinaires des points de la droite de l'infini passent toutes par I_1; ce point est donc un des $(n-1)^2$ points polaires ordinaires de la droite de l'infini. Donc :

Quand C_n est tangente à la droite de l'infini en τ points, les polaires inclinées de tous les points du plan passent par ces τ points, quelle que soit la valeur de α.

Supposons maintenant qu'une des branches de C_n passe par un des points circulaires de l'infini, que nous désignerons par e et f, c'est-à-dire par un des points doubles e des ponctuelles projectives I et I′. Quand I se trouvera en e, les points I′ et I″ s'y trouveront aussi. Donc :

Quand C_n passe ρ fois par le point circulaire de l'infini e et σ fois par le point f, les polaires inclinées par rapport à C_n passeront toutes ρ fois par e et σ fois par f.

XXIV. Il résulte plusieurs conséquences de ces derniers théo-

---

([1]) CHASLES. *Géométrie supérieure*, n° 652.

rèmes, et, quoique leur place soit plutôt dans la seconde partie de cet Essai, où il sera question des courbes douées de points multiples, nous allons les énoncer :

Quand C_n *passe* ρ *fois par* e *et* σ *fois par* f, *si* $\rho + \sigma = n$, *les polaires inclinées par rapport à* C_n *sont homothétiques avec cette courbe, quelle que soit la valeur de* α.

Les polaires inclinées par rapport à un cercle sont des cercles, quelle que soit la valeur de α.

Les polaires inclinées par rapport à une cubique circulaire sont des cubiques circulaires, quelle que soit la valeur de α.

Quand C_n *a* τ *branches paraboliques, on ne peut plus mener, par un point quelconque* P, *que* $n^2 - \tau$ *droites qui coupent* C_n *sous un angle constant.*

Quand C_n *passe* ρ *fois par un des points circulaires de l'infini et* σ *fois par l'autre, on ne peut plus mener par un point quelconque que* $n^2 - \rho - \sigma$ *droites qui coupent* C_n *sous un angle constant* (1).

Enfin le théorème III peut être complété comme il suit :

La polaire inclinée d'un point quelconque par rapport à une courbe C_n, *la plus générale de son degré, est généralement de l'ordre* n *et de la classe* n^2; *mais, si la courbe* C_n *a* τ *branches paraboliques, et si, en outre, elle passe* ρ *fois par un des points circulaires de l'infini et* σ *fois par l'autre, la classe de la polaire inclinée se réduit à* $n^2 - \tau - \rho - \sigma$.

XXV. Si des différents points d'une courbe C on mène des rayons formant des angles constants, égaux à α, avec les tangentes à C en ces points, le lieu des intersections de ces rayons est la *développée oblique* de la courbe (Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes*, p. 77).

Quelques-unes des propriétés des développées obliques découlent naturellement de la théorie des polaires inclinées; nous allons les examiner.

---

(1) M. Chasles a démontré ces deux théorèmes par une autre méthode, *Comptes rendus* de 1871, p. 396.

Si la polaire inclinée d'un point P du plan de C, par rapport à cette courbe, la coupe en deux points infiniment voisins, le point P appartient à la développée oblique de la courbe C. On peut donc dire :

La développée oblique d'une courbe C_n *est le lieu géométrique des points dont les polaires inclinées sont tangentes à* C_n.

Les pôles des polaires inclinées tangentes à C_n jouent donc, dans la théorie des développées obliques, le rôle que jouent les centres des cercles osculateurs dans celle des développées ordinaires.

Soient maintenant P un point de la développée oblique de C_n, M le point où la polaire inclinée de P est tangente à C_n; à un point P ne correspond généralement qu'un seul point M, et à un point M ne correspond qu'un pôle P dont la polaire inclinée soit tangente en M à C_n; la courbe C_n et sa développée oblique portent donc deux séries projectives de points, comme cela résulte aussi de la première définition des développées obliques. D'après un théorème de Clebsch, il résulte (¹) de cette propriété que :

Une courbe et sa développée oblique sont du même genre.

Nous n'avons fait jusqu'ici aucune hypothèse sur la nature de la courbe C_n; nous allons supposer maintenant qu'elle soit la plus générale de son degré. Le cas d'une courbe quelconque douée de points multiples sera examiné dans la seconde partie de cet Essai.

XXVI. De ce qu'on peut mener par un point quelconque n^2 droites qui coupent la courbe C_n sous un angle α, il résulte que :

Une développée oblique d'une courbe de l'ordre n est de la classe n^2.

Les polaires inclinées de tous les points d'une droite forment un faisceau (V), et, parmi toutes les courbes d'un faisceau de l'ordre n, il y en a $3n(n-1)$ qui sont tangentes à C_n (XVIII); donc, sur toute transversale, il y a $3n(n-1)$ points dont les po-

---

(¹) *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, pel A. CREMONA. Bologne, 1866, p. 44.

laires inclinées par rapport à C_n sont tangentes à cette courbe. Par suite :

Une développée oblique d'une courbe de l'ordre n est de l'ordre $3n(n-1)$.

Connaissant le genre p, la classe n^2 et l'ordre $3n(n-1)$ d'une développée oblique de C_n, les formules

$$\begin{aligned}2p'-2 &= m'+r'-2n'\\ &= n'+i'-2m'\\ &= n'(n'-3)-2(d'+r')\\ &= m'(m'-3)-2(t'+i'),\end{aligned}$$

où p', n', m', r', t', d', i' représentent le genre, l'ordre, la classe, le nombre de points de rebroussement, celui des tangentes doubles, celui des points doubles et celui des points d'inflexion de la développée oblique ([1]), nous donnent

$$i'=0,\quad r'=3n(2n-3),\quad t'=\tfrac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-3],$$

$$d'=\frac{n}{2}[3(n-2)(3n^2-5)+2n],$$

et nous savons déjà que

$$n'=3n(n-1),\quad m'=n^2\quad \text{et}\quad p'=p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Nous pouvons trouver directement le nombre des points de rebroussement d'une développée oblique. M. de Jonquières a démontré, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1866, qu'il existe $\frac{1}{2}n(r+1)(2m+nr-3r)$ courbes C_m d'ordre m, qui ont un contact d'ordre r avec une courbe fixe C_n d'ordre n, et qui passent en outre par $\frac{n(n+3)}{2}-r$ points donnés. En faisant, dans cette formule, $r=2$ et $m=n$, on trouve le nombre $3n(2n-3)$ des courbes du réseau des polaires inclinées par rapport à C_n, qui ont avec cette courbe un contact du second

(1) Ces formules, déduites de celles de Plücker, sont données dans la Géométrie de Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, p. 351.

ordre; donc *une développée oblique d'une courbe* C_n *a* $3n(2n-3)$ *points de rebroussement*. C'est bien le nombre que nous venons de trouver.

Une développée oblique de C_n a $3n(n-1)$ points à l'infini; il y a donc, dans le faisceau des polaires inclinées de la droite de l'infini, $3n(n-1)$ courbes tangentes à C_n. Or une courbe quelconque de ce faisceau se décompose (III) en une polaire ordinaire d'un point de la droite de l'infini différent du pôle de la polaire inclinée et en la droite de l'infini. Parmi les $3n(n-1)$ points à l'infini d'une développée oblique de C_n, il y en a donc un certain nombre x qui correspondent à x autres points à l'infini dont les polaires ordinaires sont tangentes à C_n; mais les polaires ordinaires des points de la droite de l'infini forment un faisceau d'ordre $n-1$; donc $x=3n(n-2)$, et les points de contact de la polaire ordinaire et de C_n sont les points d'inflexion de cette courbe. Ce premier groupe de points à l'infini d'une développée oblique de C_n s'obtient donc en menant par les points d'inflexion de cette dernière courbe des droites faisant un angle α avec les tangentes d'inflexion.

Il reste $3n(n-1)-3n(n-2)=3n$ autres points de la développée oblique de C_n sur la droite de l'infini, et, pour ces $3n$ points, la droite de l'infini, qui fait partie de leur polaire inclinée, doit être considérée comme tangente à C_n; mais la droite de l'infini ne peut être tangente à C_n qu'aux n points à l'infini de cette courbe. A chacun de ces n points correspond donc un groupe de trois points infiniment voisins de la développée oblique, situés sur la droite de l'infini; en chacun de ces groupes, la développée oblique a donc deux tangentes confondues avec la droite de l'infini, ou, en d'autres termes, chacun de ces n groupes de trois points est un point de rebroussement de la développée oblique dont la tangente de rebroussement est la droite de l'infini.

Ainsi, parmi les $3n(2n-3)$ points de rebroussement d'une développée oblique, il y en a n à l'infini, et leur tangente de rebroussement est la droite de l'infini.

M. Halphen est parvenu à ce résultat par une voie entièrement différente, pour le cas des développées ordinaires, dans son *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques*, p. 74.

Nous pouvons observer que les n points de rebroussement à l'infini d'une développée oblique de C_n sont communs à toutes

les développées obliques de cette courbe; ils se confondent, en particulier, avec les centres des cercles osculateurs aux n points à l'infini de C_n.

Ces divers résultats peuvent être réunis dans un seul énoncé :

La développée oblique d'une courbe C_n, *d'ordre* n, *a* : 1° n *points de rebroussement à l'infini qui restent fixes, quelle que soit la valeur de* α, *et qui ont la droite de l'infini pour tangente commune;* 2° $2n(3n-5)$ *points de rebroussement à distance finie;* 3° $\frac{1}{2}n(n-1)$ *tangentes doubles confondues avec la droite de l'infini;* 4° $\frac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-4]$ *tangentes doubles à distance finie;* 5° $3n(n-2)$ *asymptotes qui sont les droites menées par les points d'inflexion de* C_n *et faisant un angle* α *avec les tangentes d'inflexion.*

Puisque la développée oblique de C_n a $\frac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-3]$ tangentes doubles, dont $\frac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-4]$ sont à distance finie, on peut dire que :

Il y a $\frac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-3]$ *droites qui coupent* C_n *en deux points différents sous un même angle donné;*

$$\frac{1}{2}n(n-1)[n(n+1)-4]$$

de ces droites sont à distance finie, les autres sont à l'infini.

Et, de ce qu'une développée oblique a

$$\frac{n}{2}[3(n-2)(3n^2-5)+2n]$$

points doubles, on conclut que :

Parmi les courbes du réseau des polaires inclinées prises par rapport à une courbe C_n *d'ordre* n, *il y en a*

$$\frac{n}{2}[3(n-2)(3n^2-5)+2n]$$

qui sont tangentes à C_n *en deux points différents.*

Ce nombre est bien celui que donne la formule de M. Bischoff, et qui est démontré dans le Mémoire de M. de Jonquières intitulé :

Théorèmes généraux sur les courbes géométriques planes (*Journal de Liouville*, 1861).

XXVII. Nous allons appliquer maintenant quelques-uns des résultats obtenus au cas où $n = 2$.

La polaire inclinée d'un point P, par rapport à une conique, est une conique passant par P. Il est facile de le voir directement. Nommons O le centre de C_2, M un point quelconque de la polaire inclinée de P : la droite polaire de M doit faire un angle constant α avec PM; donc le diamètre conjugué à OM doit faire le même angle constant α avec PM. Si nous désignons par M′ le point d'intersection de ce diamètre conjugué à OM avec PM, ce point M′ devra se trouver sur le segment capable de l'angle α décrit sur PO. Une fois ce segment décrit, il est facile de déduire de chacun de ses points M′ le point M correspondant de la développée oblique; il suffit de tracer OM′ et le diamètre conjugué à OM′, puis de prendre l'intersection M de ce diamètre conjugué avec PM′. Les faisceaux engendrés par les droites OM et PM sont projectifs; donc le point M décrit une conique qui passe par les points O et P, et dont la tangente en P est le rayon du faisceau P qui correspond au rayon OP du faisceau O, c'est-à-dire la droite qui joint le point P au point d'intersection avec le segment capable du diamètre de C_2 conjugué à OP. On voit que ce résultat concorde avec l'application du théorème XIV. De même, la tangente en O à la polaire inclinée est le diamètre de C_2 conjugué à la tangente en O au segment capable. On peut construire ainsi la polaire inclinée, point par point, au moyen du segment capable ou au moyen de l'hexagramme de Pascal.

On peut reconnaître immédiatement la nature de la polaire inclinée. Soit I un de ses points à l'infini; la direction PI fait un angle α avec le diamètre conjugué à OI; le diamètre OI et son conjugué font donc entre eux un angle α, et la polaire inclinée de P aura autant de points à l'infini que C_2 a de couples de diamètres conjugués faisant entre eux un angle α. Donc :

Si la courbe C_2 est une hyperbole ou une parabole, la polaire inclinée par rapport à cette courbe est toujours une hyperbole. Si C_2 est une ellipse, la polaire inclinée peut être une hyperbole, une parabole ou ellipse, suivant la valeur de α.

Supposons que C_2 ait deux couples de diamètres conjugués $a'b'$ et $a''b''$ tels que les angles $\widehat{a'b'}$ et $\widehat{a''b''}$ comptés dans le sens de a vers b soient positifs et égaux à $+\alpha$: les asymptotes de la polaire inclinée seront parallèles à a' et à a''.

On pourra remarquer qu'il existe une différence entre cette conclusion et ce que dit M. Chasles dans son *Traité des sections coniques*, p. 143, n° 221.

Le théorème précédent conduit facilement à celui qui concerne les coniques du n° XXII.

On voit encore que :

Si C_2 est une parabole, les polaires inclinées de tous les points du plan, quelle que soit la valeur de α, ont un point commun à l'infini sur la direction des diamètres de la parabole, et il résulte de là qu'*on ne peut mener par un point* P *que trois droites qui coupent la parabole sous un angle donné* (1).

Il résulte encore de ce qui précède que :

Si $\alpha = 0$, *la polaire inclinée d'un point par rapport à* C_2 *est toujours de la même nature que* C_2.

Si $\alpha = 90°$, *et quelle que soit la nature de* C_2, *la polaire inclinée d'un point est toujours une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de* C_2.

En effet, si l'on cherche les couples de rayons d'un faisceau en involution qui font entre eux un angle très-peu différent de 90 degrés, on trouve qu'il y a toujours deux solutions et que ces solutions se confondent quand $\alpha = 90°$.

On voit encore, en partant du tracé par le segment capable, que :

La polaire inclinée par rapport à un cercle est un cercle, quelle que soit la valeur de α (XXIV).

XXVIII. Nous savons que les polaires inclinées, par rapport à C_2, des points d'une droite d forment un faisceau. Les points de la base de ce faisceau sont le centre O de C_2, les deux points à l'infini communs aux polaires inclinées de tous les points du plan

(1) Chasles, *Traité des sections coniques*, n° 222, p. 245.

dont nous avons indiqué la construction et enfin un point D de la droite d, qui se trouve sur le diamètre de C_2 conjugué à la direction qui fait un angle α avec d (V). On sait que ce point D est le point polaire incliné de la droite d par rapport à C_2.

De cette construction résulte celle de la droite polaire inclinée de D par rapport à C_2. On peut dire :

Le point polaire incliné d'une droite d, par rapport à une conique, est l'intersection avec cette droite du diamètre de C_2 *conjugué à la direction qui fait un angle* α *avec d.*

La droite polaire inclinée d'un point D *par rapport à une conique* C_2 *est la tangente de* D *à la polaire inclinée de ce point.*

De ces théorèmes on déduit ceux-ci :

Quand une droite tourne autour d'un point fixe, son point polaire incliné par rapport à C_2 *décrit la polaire inclinée du point fixe, qui est une conique passant par ce point.*

Quand un point parcourt une droite d, sa droite polaire inclinée par rapport à une conique enveloppe une conique tangente à d.

Quand une droite enveloppe une courbe de la classe m, son point polaire incliné, par rapport à C_2, *décrit une courbe de l'ordre* 2*m.*

Quand un point parcourt une courbe de l'ordre n, sa droite polaire inclinée, par rapport à une conique, enveloppe une courbe de la classe 2*m.*

Ces derniers théorèmes vont nous donner, comme cas particuliers, des théorèmes démontrés par M. Chasles dans son Mémoire intitulé : *Propriétés relatives au déplacement fini quelconque dans l'espace d'une figure de forme invariable.* (*Comptes rendus*, 1860, p. 855.)

XXIX. Supposons que la conique C_2 soit un cercle; dans ce cas, le lieu géométrique des points polaires inclinés des tangentes à une courbe C_m de la classe m n'est autre chose que la podaire oblique du centre de ce cercle par rapport à C_m. Donc :

La podaire oblique ou le lieu géométrique des pieds des obliques abaissées d'un point O *sous un angle constant de grandeur*

et de sens de rotation sur les tangentes à une courbe C_m de la classe m est le lieu des points polaires inclinés, sous le même angle, des tangentes de C_m, par rapport à un cercle dont le centre est O, ou l'enveloppe des polaires inclinées sous l'angle α des points de C_m par rapport à un cercle ayant son centre en O, et cette courbe est de l'ordre 2m.

On peut dire encore :

Si l'on décrit sur les rayons vecteurs, menés d'un point fixe O à tous les points d'une courbe C_m de la classe m, des segments capables d'un angle constant α, la courbe enveloppe de ces cercles se confond avec le lieu des pieds des obliques abaissées sous un angle constant α du point fixe O sur les tangentes à C_m, et cette enveloppe est de l'ordre 2m.

Le premier des théorèmes XXVIII nous donne encore ce cas particulier :

Quand le sommet d'un angle constant α, dont un côté tourne autour d'un point fixe O, glisse sur une courbe d'ordre n, l'autre côté enveloppe une courbe de la classe 2m.

On reconnaît dans les théorèmes ci-dessus les théorèmes des §§ 23, 24 et 26 du Mémoire précité, et l'on voit que nous démontrons l'identité des courbes des §§ 24 et 26.

XXX. Une développée oblique d'une conique est de la quatrième classe du sixième ordre; elle n'a pas de points d'inflexion, ni de branches infinies réelles; elle a deux points de rebroussement à l'infini, quatre points de rebroussement à distance finie, deux tangentes doubles à distance finie et une à l'infini.

Nous allons déterminer directement le nombre des points de rebroussement d'une développée oblique d'une conique; cette recherche nous amènera à résoudre un problème de Géométrie intéressant, dont voici l'énoncé :

On donne une conique Γ_2 et trois points fixes quelconques A, B, C; par ces trois points on peut toujours mener une conique tangente à Γ_2 en un point donné P de cette courbe. Cette conique, que nous désignerons par $(ABC\overline{P})$, coupe généralement Γ_2 en deux

points M et N différents de P, et, pour qu'elle ait un contact du second ordre avec Γ_2, il faut et il suffit que la corde MN passe en P. Le problème de savoir combien il y a, dans un réseau de coniques circonscrites à un triangle donné ABC, de courbes ayant un contact du second ordre avec une conique donnée Γ_2, revient donc à savoir combien de fois la corde MN passera par le point P, quand on fera parcourir à celui-ci la conique donnée. Nous sommes conduits ainsi à chercher l'enveloppe de MN.

Désignons par t la tangente en un point donné P à Γ_2. La conique formée par les droites t et MN et les coniques $(ABC\overline{P})$ et Γ_2 sont circonscrites à un même quadrilatère (dont un des côtés est infiniment petit); donc, d'après le théorème de *Desargues*, elles marquent une involution sur une transversale quelconque, et les involutions qu'elles tracent sur deux transversales sont projectives. Traçons les droites PA et PB, qui coupent la conique Γ_2 en A′ et B′ et la corde MN en M′ et N′; les points P, M′, A, A′ et P, N′, B, B′ sont des points correspondants de deux involutions projectives, et, comme le point P est commun aux deux groupes, les droites M′N′, AB et A′B′ concourent en un même point, c'est-à-dire que la corde MN passe par le point de concours des droites AB et A′B′. Nommons C′ l'intersection de la droite PC avec la conique Γ_2; on verra de la même manière que MN passe par les points de concours des droites AC et A′C′, BC et B′C′. Les triangles ABC et A′B′C′ sont homologiques, et la corde MN est leur axe d'homologie. On peut énoncer le théorème suivant :

Si l'on projette d'un point P *d'une conique* Γ_2 *trois points fixes* A, B, C *en* A′, B′, C′ *sur cette conique, la corde commune à la conique* Γ_2 *et à la conique circonscrite au triangle* ABC *et tangente en* P *à* Γ_2 *est l'axe d'homologie des triangles* ABC *et* A′B′C′.

Ceci posé, nous allons nous appuyer sur les lemmes suivants :

Si l'on joint un point P d'une conique Γ_2 à deux points fixes A et B, la corde A′B′, déterminée par les côtés de l'angle APB, enveloppe une conique (A′B′) doublement tangente à Γ_2 aux points où cette courbe est coupée par la droite AB (Poncelet, *Propriétés projectives*, 1822, p. 245).

Réciproquement, si l'on mène une tangente A′B′ à une conique

($A'B'$) doublement tangente à une conique Γ_2 aux points où elle est coupée par une transversale AB, un des points diagonaux du quadrilatère $ABA'B'$ se trouve sur la conique Γ_2.

Dans la question qui nous occupe, chacun des côtés du triangle $A'B'C'$ enveloppe donc une conique doublement tangente à Γ_2 aux points $C_1 C_2$, $B_1 B_2$, $A_1 A_2$, où les côtés AB, AC, BC du triangle ABC coupent Γ_2. L'axe d'homologie de ces triangles est déterminé par les intersections C'' de AB et $A'B'$ et B'' de AC et $A'C'$. Or, à un point P de Γ_2 correspond un seul point C'' et un seul point B''; et, si nous prenons un point C'' de AB, on peut mener par ce point deux tangentes à la conique ($A'B'$), et chacune de ces tangentes détermine un point P; donc, à un point C'' correspondent deux points B''; on voit de la même manière qu'à un point B'' correspondent deux points C''. Donc la droite $B''C''$ enveloppe une courbe de la quatrième classe. Ainsi *l'enveloppe cherchée est de la quatrième classe.*

Quand le point C'' de AB se confond avec le point A, il y a deux points B'' sur AC; cette dernière droite est donc doublement tangente à la courbe; on verrait de même que les côtés AB et AC sont doublement tangents à la courbe; donc *les trois côtés du triangle* ABC *sont doublement tangents à l'enveloppe.* Il résulte de là que cette courbe est unicursale ou que son genre p est nul. Les formules que nous avons données au numéro XXVI nous apprennent que la courbe a six points de rebroussement, quatre points doubles, et qu'elle n'a aucun point d'inflexion.

Remarquons, en passant, que cette courbe a les mêmes singularités ordinaires qu'une développée oblique de conique; comme cette remarque peut conduire à d'autres investigations, nous allons l'énoncer nettement : *Le lieu géométrique des points dont les polaires inclinées, par rapport à une conique* C_2, *sont tangentes à* C_2, *et l'enveloppe des cordes communes à ces courbes et à* C_2, *sont des courbes douées des mêmes singularités.*

Quand le point C'' de AB vient en C_1 (un des points d'intersection de AB et de Γ_2), les deux tangentes à la conique ($A'B'$) issues de C'' se confondent en une seule, les deux points P correspondants se confondent aussi en C_2, et les deux axes d'homologie correspondants sont infiniment voisins ou coïncident avec la tangente en C_1 à Γ_2. Donc les tangentes à Γ_2 aux six points d'intersection.

réels ou imaginaires, de cette conique avec les côtés du triangle ABC, sont les tangentes de rebroussement de l'enveloppe cherchée. Réunissons ces diverses propriétés en un seul énoncé :

Si l'on projette d'un point P *d'une conique* Γ_2 *trois points fixes* A, B, C *en* A′, B′, C′ *sur cette conique, l'enveloppe de l'axe d'homologie des triangles* ABC *et* A′B′C′, *quand le point* P *parcourt la conique* Γ_2, *se confond avec l'enveloppe des cordes communes à* Γ_2 *et aux coniques circonscrites au triangle* ABC *et tangentes à* Γ_2, *et cette courbe est de la quatrième classe, du sixième ordre; elle n'a pas de points d'inflexion, elle est doublement inscrite au triangle* ABC, *elle a quatre points doubles et six points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement sont les tangentes à* Γ_2 *aux points d'intersection de cette courbe et des côtés du triangle* ABC.

Ces tangentes de rebroussement sont donc imaginaires par couples, si un, deux ou les trois côtés du triangle ne coupent pas Γ_2.

Supposons maintenant que nous voulions trouver le nombre des points de rebroussement d'une développée oblique de Γ_2; nous savons que ce nombre est égal à celui des polaires inclinées qui ont un contact du second ordre avec Γ_2. Ces polaires inclinées sont circonscrites à un triangle. Soit P un point de Γ_2; il y a une conique du réseau des polaires inclinées qui est tangente à Γ_2 en P, et il faut trouver combien de fois la corde commune MN à ces deux coniques passe par le point P, quand celui-ci parcourt la conique Γ_2. A un point P de Γ_2 correspondent deux points M (M ou N); et, comme par un point M on peut mener quatre tangentes à la courbe enveloppe de MN, à un point M correspondent quatre points P. Il y a donc $4 + 2 = 6$ coïncidences des points P et M, et une développée oblique d'une conique à six points de rebroussement (¹).

(¹) Le lecteur est prié de faire les corrections suivantes :

Page 43, biffer la note (²) au bas de la page.

Page 48, ligne 16, lire *points polaires inclinés*, au lieu de *points polaires obliques*.

» ligne 28, lire *points polaires inclinés*, au lieu de *pôles inclinés*.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOUSSINESQ (J.). — Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale, précédé d'un rapport de M. Paul Janet à l'Académie des Sciences morales et politiques, extrait des Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille, année 1878, t. VI, 4e série.

Sans savoir bien précisément ce qu'était Buridan, tout le monde connaît l'anecdote hypothétique de son âne. Cette vieille histoire, inventée par les maîtres en philosophie pour exercer à la dispute et au sophisme les débutants dans l'art de Lulle, semble avoir inspiré récemment l'auteur d'un Mémoire qui, par l'inutile étalage de formules très-savantes, pourrait écarter ou éblouir un lecteur peu versé dans les études mathématiques. Au lieu de supposer une volonté neutralisée et contrainte à abdiquer entre deux désirs rigoureusement égaux, cet auteur considère un système matériel tellement défini, qu'entre deux routes différentes, les lois de la Mécanique, qui les permettent toutes deux, ne lui en imposent aucune; il faut bien cependant qu'un choix se fasse, et ce système inerte doit impérieusement prendre une décision. Qui pourrait la dicter quand les équations restent muettes? L'intervention d'une volonté libre est donc nécessaire, elle seule peut sauver la difficulté, et, sans demander d'autres preuves, l'auteur admet son existence. Buridan, par la combinaison ingénieuse des conditions dans lesquelles il place son âne, croit pouvoir supprimer chez lui la liberté. M. Boussinesq, au contraire, conçoit savamment un système matériel et inerte qui se trouverait tout à coup doué de volonté et capable de choisir entre deux mouvements possibles, par la seule raison que les équations sont indéterminées et qu'il est indispensable de suppléer à leur insuffisance.

Je veux ici dégager le principe proposé de l'appareil algébrique qui l'enveloppe et le cache sans y rien changer. On prête trop aisément aux produits des équations une rigueur et une précision absolues; l'Analyse mathématique cependant, comme le disait Poinsot, et lors même qu'elle est nécessaire, ne peut donner que ce qu'on y a mis, et la certitude des équations est simplement celle des principes qu'elles traduisent.

Les théories dynamiques présentent deux classes de problèmes très-inégalement difficiles. On peut se donner le mouvement d'un système et calculer les forces, ou définir les forces et chercher le mouvement. Les problèmes de la première classe sont résolus par des formules élémentaires et classiques; ceux de la seconde, au contraire, mettent en jeu l'habileté du géomètre, et leur solution, quand on peut l'obtenir, est souvent difficile et compliquée.

La remarque dont M. Boussinesq croit pouvoir tirer des conséquences relatives à l'existence de la vie et à la liberté morale consiste en ce que la seconde classe de problèmes présente quelquefois, pour des circonstances exactement définies, plusieurs solutions distinctes.

Commençons par exposer, sur les exemples mêmes choisis par l'auteur, mais en écartant les formules inutiles, ce paradoxe depuis longtemps connu :

Supposons un point matériel placé, sous l'influence de forces données, dans une position d'équilibre instable. Il sera, si l'on veut, sollicité par la pesanteur et posé sans vitesse au sommet d'une courbe infiniment polie, ou attiré vers deux centres fixes et situé, sur la ligne qui les joint, dans la position précise pour laquelle les deux attractions égales et contraires se détruisent mutuellement.

Un tel point, d'après les lois incontestées de la Statique, demeurera en équilibre; mais une force, si petite qu'on veuille la supposer, procurera un mouvement qui ne cessera plus, et, si l'on cherche par le calcul la plus petite force capable d'un tel effet, on trouvera qu'elle est rigoureusement nulle. Comme il semble évident qu'un point matériel, sans que rien soit changé pour lui, peut indifféremment être ou n'être pas sollicité par une force nulle, il peut, indifféremment aussi, sans que les conditions du problème soient changées, rester en place indéfiniment ou partir, à telle époque que l'on voudra, pour suivre une route connue suivant une loi déterminée.

On peut compliquer ce paradoxe, sans y rien changer d'essentiel, en supposant le point placé dans des conditions aisées à préciser et telles que, sous l'influence de forces désignées, il parvienne sans vitesse à la position d'équilibre instable. Arrivé là, il pourra satisfaire aux lois du mouvement, soit en restant en place indéfiniment, soit en poursuivant sa route avec une vitesse initiale nulle, soit

enfin en faisant, dans la position d'équilibre, une station aussi longue ou aussi courte qu'on le voudra, avant de reprendre son mouvement pour le continuer indéfiniment; la théorie exprime par les mêmes formules les forces nécessaires à la réalisation de l'une ou de l'autre hypothèse.

En étudiant les effets des forces nommées par Newton *centripètes*, c'est-à-dire dirigées vers un centre fixe et variant suivant une loi donnée en fonction de la distance, on a remarqué depuis longtemps la possibilité d'étudier la loi des distances du point mobile au centre en laissant de côté, pour la déterminer par un calcul distinct, la rotation du rayon vecteur. La recherche de la distance se confond alors avec celle d'un mouvement rectiligne, et, d'après les remarques précédentes, on peut préparer l'énoncé de telle sorte que ce mouvement fictif conduise à une position d'équilibre instable. Le point pourra donc, sans cesser d'obéir aux formules, s'arrêter en cette position, y rester pendant un temps arbitraire, et repartir ensuite pour continuer les oscillations. Le point réel dont il sert à étudier le mouvement pourra, par conséquent, tout en respectant aussi les formules, se mouvoir sur un cercle qui correspond au cas où la distance au centre reste constante, et quitter ce cercle à un instant quelconque pour suivre une courbe très-différente, qui lui est osculatrice au point de départ. La force nécessaire pour substituer un de ces mouvements à l'autre est égale à zéro, et le temps de son action est nul. Les formules, tout au moins, le disent formellement. Tels sont les exemples allégués par M. Boussinesq; ils prouvent, ce qui est depuis longtemps connu, que les équations différentielles du mouvement peuvent avoir, dans des conditions précises et déterminées, deux solutions différentes.

Qu'en a-t-on conclu jusqu'ici? Rien de bien grave assurément. La Mécanique n'en semble nullement troublée, et la Science de l'âme n'en a tiré aucun profit. Deux corps identiques, placés dans des conditions identiques, n'en prennent pas moins, sans hésiter jamais, des mouvements complétement identiques, et le mystère de l'âme immatérielle reste impénétrable. Mais, dira-t-on, si les équations permettent deux routes distinctes, comment le point choisira-t-il? Un tel choix peut embarrasser l'écolier qui, après avoir appris la règle, reçoit la tâche de l'appliquer; mais l'existence des

deux solutions montre et démontre à son maître que les formules sont dans ce cas insuffisantes et incomplètes, et qu'il faut se garder de les substituer à la nature sans y admettre aucune distinction. Quoique la Mécanique soit, entre les Sciences physiques, la plus approchante de la vérité, elle n'y atteint pas en toute rigueur. Puisque les lois exprimées par les équations permettent deux routes différentes, lorsque les lois physiques n'en peuvent réaliser qu'une, elles en sont, de nécessité, distinctes. La plus petite altération des formules peut, aussi bien que la plus petite force, faire disparaître l'ambiguïté.

Or il n'est ni démontré, ni démontrable, ni vraisemblable, ni possible, ni vrai par conséquent, que les équations de la Dynamique aient objectivement la rigueur absolue des théorèmes d'Euclide. L'édifice ne peut être plus solide et plus ferme que les fondements, et tout esprit rigoureux et sévère, s'il veut suivre par ordre la démonstration des principes, ne manquera pas d'y apercevoir plus d'une abstraction irréalisable dans la rigueur mathématique. On suppose, par exemple, la continuité dans la variation d'une force, en admettant qu'elle ne conserve, pendant un temps si court qu'il soit, ni la même intensité ni la même direction. Il n'en peut être ainsi : toute tentative pour imaginer le mécanisme des actions exercées conduit à supposer des impulsions successives et discontinues dont la durée ne saurait être nulle. Qu'elle soit celle de la vibration d'une molécule d'éther ou, si l'on veut, mille milliards de fois plus petite encore, les lois admises seront altérées, sans devenir fausses ou incertaines, précisément comme on altérerait un cercle en lui substituant un polygone régulier de cent millions de côtés. Les solutions multiples disparaissent alors ; avec elles s'évanouissent la nécessité d'un choix librement exercé par une molécule indécise, et la pensée qu'il puisse exister du contingent dans les effets sans qu'il sans rencontre dans les causes.

Des difficultés analogues ont été signalées déjà dans l'étude des corps solides et très-aisément expliquées. Quand une table rigide et pesante repose par plus de trois pieds sur un sol parfaitement dur, l'effort supporté par chaque pied est indéterminé. Le calcul l'affirme, mais ni les physiciens ni les géomètres ne l'ont cru un instant ; ils se sont bien gardés surtout de supposer à chaque pied la faculté de choisir, en lui prêtant une volonté devenue indispen-

sable. Personne, malgré l'exemple récemment donné, n'y songera à l'avenir. On sait depuis longtemps qu'il n'existe pas de corps durs et que cette fausse supposition produit toute l'indétermination.

M. Boussinesq, intrépidement confiant dans les formules, pense que la matière inerte resterait embarrassée comme elles quand les équations différentielles refusent de prononcer; rien ne pouvant alors contraindre le point matériel, il devient libre, et, pour déterminer son choix, une volonté est nécessaire : il n'en faut pas davantage pour la faire naître et pour classer la molécule inerte parmi les êtres vivants.

M. Janet, dans son Rapport, regrette que son incompétence dans les Sciences mathématiques ne lui permette pas de suivre le développement du principe dans les démonstrations qu'en donne l'auteur. Notre savant confrère n'a rien à regretter; les formules de M. Boussinesq ne démontrent rien au delà des explications précédentes. Après avoir rencontré, dans le cas d'un point isolé, la difficulté que j'ai signalée, l'auteur, sans le rendre certain par aucune preuve ni vraisemblable par aucune explication, sans indiquer comment et par quelle voie on pourrait les rencontrer, conclut *qu'il se pourrait* que des systèmes existassent où les difficultés, au lieu de se produire une fois, se renouvellent incessamment, en laissant un nombre immense de fois un nombre immense de voies possibles; et aussitôt, par une assimilation téméraire, sans approfondir ni esquisser les différences essentielles entre une telle machine et un corps organisé, il fait de cette indétermination le caractère nécessaire des êtres vivants, la condition d'existence d'une volonté libre et la définition suffisante de la vie.

L'étude des équations introduites dans le Mémoire n'aurait donc rien appris au savant rapporteur. Mais cela importe peu, car, au cas même ou la partie mathématique, au lieu de s'arrêter au seuil du problème, aurait été traitée avec un plein succès, et où l'auteur prouverait qu'il a deviné juste en admettant l'existence des systèmes mécaniques dont, sans chercher la connaissance pleine et distincte, il imagine les propriétés singulières, la thèse philosophique n'aurait rien à y gagner. La difficulté devant laquelle les philosophes s'inclinent et reculent, sans entrevoir de solution plausible, est l'action de l'âme sur le corps. Par quel miracle per-

pétuel, en effet, l'âme immatérielle et distincte du corps peut-elle produire ou troubler le mouvement de la matière et faire naître une force physique? Quand les formules de la Mécanique assignent *zéro* pour valeur numérique de cette force, s'il fallait en conclure qu'elle est un pur rien et que, n'ayant aucun rôle à jouer, elle peut disparaître sans que rien soit changé, l'âme n'ayant plus à agir sur le corps, la difficulté, sans être résolue, serait supprimée. Il n'en est pas ainsi : un effet reste nécessaire, et le point, sans lui, ne suivrait pas la route qu'avec lui il suit réellement. C'est donc bien une force qui doit naître dans la propre et étroite signification du mot; c'est une force seulement dont l'existence, d'après les saines notions de Mécanique, serait contradictoire : cela ne diminue en rien la difficulté. L'auteur lui-même abandonne d'ailleurs la distinction entre la force nulle et la force mesurable au dynamomètre, quand « le bon sens » le porte à penser (p. 107) « que la nature ne distingue pas des circonstances dont il a parlé celles qui n'en diffèrent qu'au point de vue abstrait, c'est-à-dire suffisamment peu *analytiquement*, pour pouvoir être qualifiées de physiquement pareilles, ou pour que l'application de forces supplémentaires *fictives*, extrêmement petites pour le géomètre, mais en réalité dépourvues de toute valeur objective, y rendît les bifurcations possibles *mathématiquement* ». En termes plus simples, la force nulle peut être remplacée par une force extrêmement petite sans rien changer aux conclusions; or la difficulté philosophique est aussi grande pour la cent millième partie d'un cent millionième de milligramme que pour une force d'un kilogramme.

Non-seulement l'auteur, en supposant chez les êtres vivants des conditions mécaniques que rien ne démontre et ne rend plausibles, propose pour les forces vitales l'explication que l'on vient d'indiquer, mais, allant beaucoup plus loin encore, il place dans l'existence des solutions multiples des équations du mouvement la condition suffisante de la vie et l'origine d'un principe directeur capable de volonté et de choix.

Il n'y a pas ici de malentendu; l'auteur reproduit son assertion avec trop d'insistance pour que le doute soit possible. « Un être animé », dit-il (p. 40), « serait, par conséquent, celui dont les équations du mouvement admettraient des intégrales singulières provoquant, à des intervalles très-rapprochés ou même d'une ma-

nière continue par l'indétermination qu'elles feraient naître, l'intervention d'un *principe directeur* spécial....................

» Le jeu habituellement trop étroit des lois du mouvement l'empêcherait (ce principe directeur) de se manifester dans d'autres cas, c'est-à-dire dans les corps privés de vie. »

Cela est très-clair : c'est le jeu *habituellement* trop étroit des lois du mouvement qui empêche le principe directeur d'intervenir chez les corps privés de vie. Il ne manquerait pas de prendre naissance dans les cas exceptionnels où le jeu de ces forces remplirait les conditions déclarées possibles, mais *habituellement* irréalisées.

Nous lisons, en effet, page 113 : « La définition que je donne de la vie présente l'avantage de rattacher ce mode supérieur d'existence à des conditions géométriques précises. De plus, elle dégage ou met en relief l'élément essentiel de l'opinion commune que s'en forment les hommes, et qui consiste dans l'idée d'un principe d'action non évaluable à la manière des forces mécaniques. Et elle ne me paraît pas en désaccord avec les notions qu'en proposent les naturalistes, les philosophes et les théologiens, qui tous admettent que la vie jaillit inévitablement, que *l'âme n'est jamais refusée* quand se réalisent certaines conditions matérielles très-déterminées. »

L'auteur d'une telle déclaration, ayant longuement défini les conditions toutes géométriques et mécaniques dont il parle, devrait en conclure la possibilité de la génération spontanée. Il estime cependant qu'on n'a *probablement* pas à craindre d'ouvrir la porte à une telle doctrine, parce que les circonstances d'état initial compatibles « avec l'existence de solutions singulières paraissent assez spéciales pour n'avoir qu'une probabilité pratiquement nulle de se produire fortuitement. Elles sont peut-être », dit-il, « aussi impossibles à réaliser d'une manière artificielle, sinon plus, qu'il est de faire tenir sans appui un cône sur la pointe ».

Il serait superflu de multiplier les citations. L'auteur croit avoir démontré que, dans les conditions initiales où les équations du mouvement d'un système présentent des solutions multiples, l'âme, qui n'est jamais refusée quand se réalisent certaines conditions, ne manquerait pas pour diriger la machine. La probabilité d'une telle rencontre est, il est vrai, à ses yeux *pratiquement* nulle, mais il la croit métaphysiquement possible, et cela seul nous intéresse.

Expliquera qui pourra comment l'auteur, parlant toujours de la même force directrice et des mêmes conditions, a pu écrire (p. 41) :

« Je n'ai pas besoin de faire observer que l'existence de ces conditions n'aurait nullement pour effet de dicter à la volonté son choix. Leur réalisation la mettrait, au contraire, en pleine possession d'elle-même, en état de s'abstenir ou d'agir à sa guise. »

Agir à sa guise, c'est bien la thèse que j'ai voulu faire connaître; mais s'abstenir! nullement, cela ne se peut. Imaginez, en effet, le point placé dans les conditions indiquées; il approche de la position critique, deux routes sont possibles, les équations différentielles ne prescrivent rien, la puissance directrice s'abstient, le temps presse cependant : que va-t-il arriver? J. B.

АЛЕКСѢЕВЪ (Н.). — Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій. Выпускъ I-й. — Москва, 1878 (¹).

(Analyse faite par l'auteur.)

L'Ouvrage que je viens de publier sous ce titre forme la suite du *Calcul intégral*, dont le premier volume a paru en 1873. Le *Bulletin des Sciences mathématiques* (²) a fait une exposition détaillée du contenu de ce premier volume, en approuvant l'entreprise et en faisant des vœux pour sa continuation.

Le présent volume contient la théorie de l'intégration des équations différentielles ordinaires; il est divisé en onze Chapitres :

Chapitre I (p. 1). — Définition des équations différentielles, de l'intégrale générale et particulière; le nombre d'intégrales premières d'une équation du $n^{\text{ième}}$ ordre. Existence de l'intégrale d'une équation différentielle.

Chapitre II (p. 25). — Intégration des équations différentielles

---

(¹) N. Alexéief, *Intégration des équations différentielles*, 1re livraison; 1 vol. grand in-8°, VI-312 pages. Moscou, 1878.

(²) Voir *Bulletin*, t. X, p. 168.

du premier ordre et du premier degré. Séparation des variables dans une équation différentielle. Intégration des équations homogènes; intégration d'une équation linéaire. Intégration des équations différentielles exactes.

Chapitre III (p. 42). — Intégration des équations différentielles du premier degré et du premier ordre au moyen d'un facteur.

Dans ce Chapitre (p. 60, § 33), je trouve les conditions nécessaires pour que le premier membre de l'équation

$$\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0,$$

divisé par

$$\lambda = \mathrm{M}^2 \frac{d\mathrm{N}}{dy} - \mathrm{MN}\left(\frac{d\mathrm{N}}{dx} + \frac{d\mathrm{M}}{dy}\right) + \mathrm{N}^2 \frac{d\mathrm{M}}{dx},$$

soit une différentielle exacte. Ces conditions sont

$$\frac{d^2\mathrm{N}}{dy^2} = 0, \quad 2\frac{d^2\mathrm{N}}{dx\,dy} + \frac{d^2\mathrm{M}}{dy^2} = 0, \quad 2\frac{d^2\mathrm{M}}{dx\,dy} + \frac{d^2\mathrm{N}}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2\mathrm{M}}{dx^2} = 0.$$

On voit que l'expression du diviseur est admissible lorsque M et N sont des fonctions linéaires de x et de y, et que la même forme du diviseur peut être employée pour l'équation de Jacobi. Cette remarque donne le moyen d'intégrer l'équation de Jacobi en formant le diviseur d'après les coefficients donnés.

Chapitre IV (p. 71). — Intégration des équations implicites du premier ordre.

En différentiant l'équation du premier ordre, qui n'est pas du premier degré et qui peut être mise sous la forme $y = f(x, y')$, on a une équation de premier degré par rapport aux variables x et y' :

$$y' = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dx}.$$

Le facteur λ qui la rend intégrable, est défini par l'équation

$$-\lambda = \frac{df}{dy'}\frac{d\lambda}{dx} - \left(\frac{df}{dx} - y'\right)\frac{d\lambda}{dy'}.$$

Si l'on suppose que ce facteur soit fonction de x seul, on a

$$-\lambda = \frac{df}{dy'}\frac{d\lambda}{dx}.$$

La condition nécessaire pour que cela ait lieu est que f soit fonction linéaire de y'. Donc les équations différentielles linéaires sont les seules qui admettent un facteur fonction de x seul.

Si l'on suppose que λ soit fonction de y' seul, on a

$$\lambda = \left(\frac{df}{dx} - y'\right)\frac{d\lambda}{dy'}.$$

La condition nécessaire est que f soit une fonction linéaire par rapport à x. Pour l'équation

$$y = x.\varphi y' + \psi y', \quad \text{on a} \quad \lambda = e^{\int \frac{dy'}{\varphi y' - y'}}.$$

L'équation de Clairaut fait exception à cette règle.

Si, en revenant à l'équation

$$y' = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dx},$$

on cherche les conditions pour que cette équation ait un facteur qui soit fonction homogène de x et de y', on a, en posant $\frac{y'}{x} = u$ et $\lambda = x^n \theta u$, où l'exposant n et la forme de la fonction θ sont à déterminer,

$$\frac{\theta' u}{\theta u} = \frac{\left(n\frac{df}{dy'} + x\right)x}{x\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy'} - xy'}.$$

La détermination de la fonction θu est possible si la seconde partie de l'équation précédente est fonction de u seul, ce qui n'aura lieu que lorsque la fonction f sera homogène et du deuxième degré. On a, dans ce cas,

$$\lambda = x^n e^{\int \frac{\left(n\frac{df}{dy'} + x\right)x}{2f - xy'} du}.$$

En posant successivement $n = 0$ et $n = 1$, on trouve l'intégrale

$$xe^{\int \frac{x\frac{df}{dy'}du}{2f - xy'}} = \text{const.}$$

Si l'équation différentielle peut se réduire à la forme

$$x = f(x, y'),$$

en la différentiant, on a

$$\left(\frac{df}{dy} - \frac{1}{y'}\right) dy + \frac{df}{dy'} dy' = 0.$$

Le facteur λ, qui rend la dernière équation intégrable, est déterminé par l'équation

$$\frac{\lambda}{y'^2} = \frac{df}{dy'}\frac{d\lambda}{dy} - \left(\frac{df}{dy} - \frac{1}{y'}\right)\frac{d\lambda}{dy'}.$$

Cette équation peut servir à déterminer λ, si l'on suppose que λ soit fonction homogène de y et y', en posant $y' = uy$, $\lambda = y^n . \theta u$, et si l'on suppose encore que f soit fonction du rapport u.

Par exemple, pour l'équation

$$x^m y^n = ay'^n + by^{n-1}y' + cy^n,$$

on a

$$y = Ce^{\frac{1}{m}\int (au^n + bu + c)^{\frac{1-m}{m}} (nau^{n-1} + b) u\, du}.$$

Au § 46, je montre que l'intégrale d'une équation de la forme $f(x, y') = 0$ peut s'exprimer quelquefois par deux équations, en introduisant une variable définie par l'équation $y' = x\theta$. En effet, l'équation $f(x, y') = 0$ étant irrésoluble, l'équation $f(x, x\theta) = 0$ peut avoir une solution $x = \varphi(\theta)$; alors on a

$$x = \varphi(\theta), \quad y = \int \theta\, \varphi\theta\, \varphi'\theta\, d\theta + C;$$

ces deux équations expriment par leur ensemble l'intégrale.

De même, en posant $y' = y\theta$ dans une équation de la forme $f(y, y') = 0$, on peut trouver quelquefois $y = \psi(\theta)$, et alors l'intégrale est exprimée par ces deux équations

$$x = \int \frac{\psi'\theta\, d\theta}{\theta . \psi\theta} + C, \quad y = \psi\theta.$$

Chapitre V (p. 101). — Sur les solutions singulières des équations différentielles.

Chapitre VI (p. 113). — Équations différentielles des ordres supérieurs au premier.

Au § 62, je montre que l'intégration d'une équation

$$f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

qu'on peut écrire comme il suit, $f(q, p) = 0$, en posant $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, peut s'effectuer quelquefois même dans le cas où l'équation précédente est irrésoluble, pourvu qu'on trouve des expressions de p et q en fonction d'une variable ω, qui satisfassent à l'équation donnée.

Par exemple, pour l'équation

$$q^3 - 2p^3 + 3pq = 0,$$

en posant $q = p\omega$, on a

$$p = \frac{3\omega}{2 - \omega^3} \quad \text{et} \quad q = \frac{3\omega^2}{2 - \omega^3}.$$

Puisque $q = \frac{dp}{dx}$, on a

$$dx = \frac{2d\omega(1 + \omega^3)}{\omega^2(2 - \omega^3)},$$

$$dy = p\,dx = \frac{6d\omega(1 + \omega^3)}{\omega(2 - \omega^3)^2}.$$

Si l'on peut satisfaire à l'équation $F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0$ en posant $y = f\omega$, et $\frac{d^2y}{dx^2} = q = \varphi\omega$, on a

$$dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{q} = f'\omega\,d\omega,$$

d'où

$$p\,dp = \varphi\omega f'\omega\,d\omega$$

et

$$p = \sqrt{2\int\varphi\omega f'\omega\,d\omega + C}, \quad x = \int\frac{f'\omega\,d\omega}{\sqrt{2\int\varphi\omega f'\omega\,d\omega + C}} + C_1.$$

Il est facile de voir que ce procédé d'intégration s'applique dans certains cas aux équations

$$F\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0, \quad \text{et} \quad F\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) = 0.$$

Chapitre VII (p. 158). — Intégration des équations linéaires.

Dans ce Chapitre, après avoir montré la formation de l'intégrale générale d'une équation sans second membre au moyen de ses intégrales particulières, on donne la démonstration du théorème de Liouville (Tissot), et l'on déduit en général les relations qui existent entre les coefficients de l'équation donnée et ses solutions particulières (§ 82).

Pour le cas des coefficients constants dans l'équation $\Phi(y) = 0$ (¹), on sait que la solution particulière de l'équation $\Phi(y) = V$ a l'expression suivante :

$$X = \sum \frac{e^{m_i x}}{f'(m_i)} \int e^{-m_i x} V dx,$$

où $fm = 0$ est l'équation caractéristique, et la somme $\sum$ se rapporte à toutes les racines de l'équation précédente. Mais, lorsque l'équation $fm = 0$ a des racines égales, l'expression de x doit être transformée; en vue de cette transformation, je donne une nouvelle démonstration de l'expression de X, qui s'applique aussi au cas des racines égales de l'équation $fm = 0$.

Posons

$$e^{mx} \int e^{-mx} V \, dx = V_1(m, x);$$

en différentiant cette équation n fois de suite par rapport à x, on a

$$V'_1 \ (m, x) = mV_1(m, x) + V,$$
$$V''_1 \ (m, x) = m^2 V_1(m, x) + mV + V',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$V_1^{(n)}(m, x) = m^n V_1(m, x) + m^{n-1}V + m^{n-2}V' + \dots + V^{(n-1)}.$$

En y ajoutant l'identité $V_1(m, x) = V_1(m, x)$, il est facile d'en déduire l'équation suivante :

$$(V) \quad \Phi[V_1(m, x)] = fm . V_1 + f_{n-1} . V + f_{n-2} . V' + \dots + f_1 . V^{(n-2)} + V^{(n-1)}.$$

(¹) Dans tout ce qui se rapporte aux équations linéaires, j'emploie la notation précédente, due à M. Serret.

Dans cette équation, les fonctions f_{n-1}, f_{n-2}, ... ont la signification que leur a donnée Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1775, 1792).

Puisque l'équation (V) est une identité par rapport à m, on a, en la différentiant k fois par rapport à m,

$$\Phi\left(\frac{d^k V_1}{dm^k}\right) = f^{(k)}.V_1 + (k)_1 f^{(k-1)}.\frac{dV_1}{dm} + (k)_2 f^{(k-2)}.\frac{d^2V_1}{dm^2} + \ldots$$
$$+ fm.\frac{d^kV_1}{dm^k} + V\frac{d^kf_{n-1}}{dm^k} + V'\frac{d^kf_{n-2}}{dm^k} + \ldots + V^{(n-k-1)}\frac{d^kf_k}{dm^k}.$$

Si dans cette équation on pose successivement $k = 0, 1, \ldots, k$, on a les $k+1$ équations

$$\Phi(V_1) = fm.V_1 + \sum_{i=0}^{i=n-1} V^{(i)} f_{n-i-1},$$

$$\Phi\left(\frac{dV_1}{dm}\right) = f'm.V_1 + fm.\frac{dV_1}{dm} + \sum V^{(i)} f'_{n-i-1},$$

. . . . ,

$$\Phi\left(\frac{d^kV_1}{dm^k}\right) = f^{(k)}m.V_1 + \ldots + fm.\frac{d^kV_1}{dm^k} + \sum V^{(i)} f^{(k)}_{n-i-1}.$$

En mettant α_k au lieu de m, α_k étant une des racines de l'équation $fm = 0$, dont le degré de multiplicité est égal à $k+1$, on a les équations suivantes :

$$\Phi_{m=\alpha_k}(V_1) = \sum V^{(i)} f_{n-i-1}(\alpha_k),$$

$$\Phi_{m=\alpha_k}\left(\frac{dV_1}{dm}\right) = \sum V^{(i)} f'_{n-i-1}(\alpha_k),$$

. . . . ,

$$\Phi\left(\frac{d^kV_1}{dm^k}\right) = \sum V^{(i)} f^{(k)}_{n-i-1}(\alpha_k),$$

les sommes $\sum$ s'étendant de $i = 0$ à $i = n-1$. On aura un groupe pareil d'équations pour une autre racine $\alpha_{k'}$, dont le degré de multiplicité est $k'+1$. En général, on aura autant de groupes d'équations qu'il y a de racines différentes dans l'équation $fm = 0$.

Multiplions ces équations par des facteurs indéterminés

$$\lambda_k^0,\ \lambda_k',\ \ldots,\ \lambda_k^k,$$
$$\lambda_{k'}^0,\ \lambda_{k'}',\ \ldots,\ \lambda_{k'}^{k'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et posons pour la détermination de ces λ les équations suivantes :

$$(\lambda)\left\{\begin{array}{l}
\lambda_k^0 f_{n-1}(\alpha_k)+\lambda_k' f_{n-1}'(\alpha_k)+\ldots+\lambda_k^k f_{n-1}^{(k)}(\alpha_k)+\lambda_k^0 f_{n-1}(\alpha_{k'})+\lambda_{k'}' f_{n-1}'(\alpha_{k'})+\ldots=1,\\
\lambda_k^0 f_{n-2}(\alpha_k)+\lambda_k' f_{n-2}'(\alpha_k)+\ldots+\lambda_{k'}^0 f_{n-2}(\alpha_{k'})+\lambda_{k'}' f_{n-2}'(\alpha_{k'})+\ldots=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_k^0 f_0(\alpha_k)+\lambda_k' f_0'(\alpha_k)+\ldots+\lambda_{k'}^0 f_0(\alpha_{k'})+\lambda_{k'}' f_0'(\alpha_{k'})+\ldots=0.
\end{array}\right.$$

On a l'équation suivante :

$$\Phi\left[\lambda_k^0 V_1(\alpha_k)+\lambda_k'\left(\frac{dV_1}{dm}\right)_{m=\alpha_k}+\ldots+\lambda_k^k\left(\frac{d^kV_1}{dm^k}\right)_{m=\alpha_k}\right.$$
$$\left.+\lambda_k^0 V_1(\alpha_{k'})+\ldots+\lambda_{k'}^{k'}\left(\frac{d^{k'}V_1}{dm^{k'}}\right)_{m=\alpha_{k'}}+\ldots\right]=V;$$

d'où l'on voit que la solution particulière a pour expression

$$X=\lambda_k^0 V_1(\alpha_k)+\lambda_k'\left(\frac{dV_1}{dm}\right)_{m=\alpha_k}+\ldots+\lambda_{k'}^0 V_1(\alpha_{k'})+\ldots.$$

La théorie des déterminants donne le moyen d'éliminer les λ des équations (λ) et de l'expression de X; alors on a, pour la détermination de X, l'équation

$$\left|\begin{array}{ll}
f_{n-1}(\alpha_k),\ f_{n-1}'(\alpha_k),\ \ldots,\ f_{n-1}^{(k)}(\alpha_k),\ f_{n-1}(\alpha_{k'}),\ f_{n-1}'(\alpha_{k'}),\ \ldots,\ f_{n-1}^{(k')}(\alpha_{k'}), & \ldots\ 1\\
f_{n-2}(\alpha_k), & \ldots\ 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
f_0(\alpha_k), & \ldots\ 0\\
V_1(\alpha_k),\ \left(\frac{dV_1}{dm}\right)_{\alpha_k},\ \ldots,\ \left(\frac{d^kV_1}{dm^k}\right)_{\alpha_k},\ V_1(\alpha_{k'}), & \ldots\ X
\end{array}\right|=0.$$

Comme exemple, je prends l'équation suivante :

$$y^{\text{VI}}-3y^{\text{V}}+by'''-3y''-3y'+2y=V.$$

Équation caractéristique :

$$fm = m^6 - 3m^5 + 6m^3 - 3m^2 - 3m + 2 = (m-1)^3(m+1)^2(m-2) = 0.$$

$$\begin{array}{lll}
f_5 m = m^5 - 3m^4 + 6m^2 - 3m - 3, & f_5' m = 5m^4 - 12m^3 + 12m - 3, & f_5'' m = 20m^3 - 36m^2 - \\
f_4 m = m^4 - 3m^3 + 6m - 3, & f_4' m = 4m^3 - 9m^2 + 6, & f_4'' m = 12m^2 - 18m, \\
f_3 m = m^3 - 3m^2 + 6, & f_3' m = 3m^2 - 6m, & f_3'' m = 6m - 6, \\
f_2 m = m^2 - 3m, & f_2' m = 2m - 3, & f_2'' m = 2; \\
f_1 m = m - 3, & f_1' m = 1, & \\
f_0 m = 1, & f_0' m = 0, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll|ll|l}
f_5(1) = -2, & f_5'(1) = 2, & f_5''(1) = -4, & f_5(-1) = 2, & f_5'(-1) = 2, & f_5(2) = - \\
f_4(1) = 1, & f_4'(1) = 1, & f_4''(1) = -6, & f_4(-1) = -5, & f_4'(-1) = -7, & f_4(2) = 1 \\
f_3(1) = 4, & f_3'(1) = -3, & f_3''(1) = 0, & f_3(-1) = 2, & f_3'(-1) = 3, & f_3(2) = 2 \\
f_2(1) = -2, & f_2'(1) = -1, & f_2''(1) = 2, & f_2(-1) = 4, & f_2'(-1) = -5, & f_2(2) = - \\
f_1(1) = -2, & f_1'(1) = 1, & f_1''(1) = 0, & f_1(-1) = -4, & f_1'(-1) = 1, & f_1(2) = -
\end{array}$$

Les valeurs de V_1, $\frac{dV_1}{dm}$, $\frac{d^2V_1}{dm^2}$, lorsqu'on y pose successivement $m = 1, -1, 2$, sont faciles à calculer; ce sont, en général, des fonctions de x. Nous poserons, pour abréger,

$$V_1(1) = A, \quad V_1(-1) = A', \quad V_1(2) = A'',$$

$$\left(\frac{dV_1}{dm}\right)_1 = B_1, \quad \left(\frac{dV_1}{dm}\right)_{-1} = B', \quad \left(\frac{d^2V_1}{dm^2}\right)_1 = C.$$

Pour la détermination de la solution particulière, on a

$$\begin{vmatrix}
X & A & B & C & A' & B' & A'' \\
1 & -2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -1 \\
0 & 1 & 1 & -6 & -5 & -7 & 1 \\
0 & 4 & -3 & 0 & 2 & 9 & 2 \\
0 & -2 & -1 & 2 & 4 & -5 & -2 \\
0 & -2 & 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{vmatrix} = 0.$$

Chapitre VIII (p. 222). — Sur les solutions singulières des équations d'ordre supérieur au premier. Propriétés de ces solutions.

Chapitre IX (p. 238). — Intégration des équations dont les premiers membres sont des différentielles exactes. Intégration des équations linéaires au moyen d'un facteur.

La théorie de l'intégration des équations linéaires au moyen d'un facteur est pour la première fois introduite dans un cours. Cette théorie est fondée sur les théorèmes donnés par Euler. Je ne puis pas la donner ici *in extenso;* l'exposition succincte en serait très-difficile; c'est pourquoi je ne fais qu'indiquer le contenu de ce Chapitre.

Chapitre X (p. 255). — Intégration des équations aux différentielles totales à plusieurs variables.

Après avoir exposé la théorie connue de l'intégration des équations aux différentielles totales à trois variables du premier ordre et du premier degré, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile de donner des règles générales pour l'intégration des équations à trois variables du second degré et du second ordre. Je donne ici quelques problèmes de ce Chapitre avec les solutions.

1°

$$(x^2+y^2)\,d^2z + 2y\,dy\,dz + 2x\,dx\,dz = 0.$$

Solution :

$$z = \mathrm{M} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + \mathrm{K}.$$

2°

$$(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy)\,d^2z = (x\,dy - y\,dx)^2\,dz - 2\,dz\,(x\,dx + y\,dy)^2.$$

Solution :

$$z = \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{N}.$$

3°

$$d^2z = dz^2.$$

Solution :

$$ax + y = b + ce^{-z}.$$

4°

$$d^2z = \left(\frac{p}{x} - \frac{p^2}{z}\right)dx^2 + 2\left(\frac{2p}{y} + \frac{2q}{x} - \frac{pq}{z} - \frac{2z}{xy}\right)dx\,dy + \left(\frac{q}{y} - \frac{q^2}{z}\right)dy^2.$$

où

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Solution :

$$z^2 = ax^2y^2 + bx^2 + cy^2.$$

Chapitre XI (p. 287). — Sur les équations simultanées.

N. Alexéief.

GÜNTHER (S.). — Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. — Halle a/S, 1er fascicule, 1877. In-8°, 56 pages.

Un de nos collaborateurs a fait ressortir, à propos d'un récent Ouvrage de M. Günther, la tendance toute spéciale d'un géomètre qui ne reste pas indifférent aux questions relatives à l'origine et à l'évolution des idées mathématiques. Il semble que M. Günther ait pris à tâche de reconstituer, un à un, les divers Chapitres de leur histoire. Les laborieuses recherches qu'il lui a fallu entreprendre dans ce but ne lui auraient toutefois pas encore permis de refondre l'histoire entière des Mathématiques. Il est possible qu'un seul écrivain ne suffise pas à une entreprise aussi vaste; mais la véritable difficulté serait de trouver des géomètres prenant plaisir à faire marcher de front les recherches abstraites et les recherches littéraires. Cette heureuse disposition existe chez M. Günther; elle explique comment nous lui sommes redevables de travaux sur les points les plus divers de l'histoire des Sciences mathématiques chez les anciens et au moyen âge.

Il existait déjà des ouvrages très-étendus et certainement d'un très-grand mérite; M. Günther l'a affirmé lui-même, mais il a eu soin aussi d'y relever les erreurs qu'il avait reconnues dans le cours de ses propres études. L'occasion se présentera sans doute un jour de coordonner l'ensemble de ces Mémoires isolés et de reconstituer, sur des bases nouvelles et solides, l'histoire des Mathématiques, l'histoire des progrès de la raison humaine.

Nos lecteurs ont pu remarquer dans les derniers volumes du *Bulletin* au moins l'indication des questions dont M. Günther a poursuivi l'évolution historique et philosophique. Nous nous bor-

nerons à rappeler que nous lui devons des contributions nouvelles aux sujets d'étude suivants : carrés magiques, fractions continues, méthodes d'approximation chez les anciens ; mais, aujourd'hui, notre attention devra se porter sur un Ouvrage entièrement utile et curieux, qui ne manquera pas de provoquer et d'éveiller, chez d'autres amis des Sciences, le goût des recherches bibliographiques. Plus que partout ailleurs, ces recherches s'imposent dans l'histoire des Sciences exactes : l'appréciation personnelle des écrivains court grand risque de s'égarer si elle ne s'appuie pas sur des textes soigneusement établis et discutés. M. Günther a su éviter cet écueil ; il ne s'en rapporte pas à son jugement seul, et il est attentif à réunir le plus de textes possibles et à citer les auteurs dans leur propre langue.

Le travail d'érudition auquel vient de se livrer M. Günther à propos de l'histoire de la Géographie nous donne la mesure de ce que ce géomètre allemand nous réserve pour l'avenir. Les doctrines enseignées longtemps à l'égard de la forme et du mouvement de la Terre ne pouvaient manquer de lui donner un des plus curieux exemples d'une idée qui a rencontré les plus grandes difficultés pour se faire jour. C'était donc un sujet d'études méritant à juste titre, de fixer son attention, et il n'est point surprenant que l'auteur y ait trouvé matière à de grands développements.

L'Ouvrage de M. Günther se compose déjà de cinq fascicules ; mais, comme on pourra en juger par leurs sommaires, il ne s'agit encore que de l'évolution des idées relatives à la forme et au mouvement de la Terre chez les Occidentaux, les Arabes et les Juifs, des hypothèses anciennes et modernes sur le déplacement séculaire du centre de gravité du globe sous l'action des eaux, des théories exposées dans divers manuscrits des bibliothèques de Munich, et enfin des connaissances de Jean Werner, de Nuremberg, relatives à la Géographie mathématique et physique. Cette étude est donc incomplète ; mais, dès à présent, il est possible d'en saisir l'ensemble et le caractère général, et de juger de l'intérêt qui s'attache à ce genre de recherches.

Chap. I. — *La doctrine de la sphéricité et du mouvement de la Terre au moyen âge chez les Occidentaux.* (1-56, 5 fig.).

Les erreurs que les premiers savants chrétiens ne cessèrent d'en-

seigner à ce sujet doivent être mises au compte des idées qu'ils avaient reçues de leurs contemporains et devanciers. Un lien trop intime, bien que non justifié, tenait dans une étroite dépendance les dogmes religieux et des théories physiques d'une exactitude fort contestable. L'influence du dogme prit le dessus et servit d'obstacle infranchissable aux tentatives des savants, qui, n'ayant d'autre guide que la raison, se consumèrent en vains efforts, pendant tout le moyen âge, avant de réussir à proclamer la vérité. On se souvient des persécutions qu'il leur fallut endurer, précisément au sujet de la forme et du mouvement de notre planète. L'ancienne hypothèse des Grecs, qui enseignait la sphéricité de la Terre, allait donc être rejetée comme hétérodoxe, et la théorie contraire et complétement erronée devait régner à son tour, sans la moindre contestation, pendant une longue série de siècles.

Nous allons reconnaître qu'elle a donné lieu aux conceptions les plus étranges.

Draper a parfaitement qualifié la Géographie et la Cosmologie de cette première époque. Les Pères de l'Église leur ont donné un caractère tout spécial, qui peut se résumer en quelques traits. « La Terre est une surface plane, entourée de l'eau des mers, et sur laquelle s'élèvent les piliers de la voûte cristalline du ciel. La sphéricité avait été condamnée par les Pères, et entre autres par Lactance et Augustin. Ces doctrines furent enseignées, pour la plus grande partie, comme passages des Livres saints, dont le sens véritable avait été capricieusement altéré. C'est ainsi que Cosmas Indicopleustès, dont la Géographie patristique fit autorité durant près de huit cents ans, croyait avoir trouvé une objection irréfutable à la sphéricité de la Terre en demandant comment, au jour du jugement dernier, les hommes placés sur l'autre partie d'une sphère pourraient voir le Seigneur au milieu de sa gloire. »

C'est bien, en effet, sous cette forme que se révèle le caractère général des théories exposées dans les écrits de S. Augustin, de Lactance, d'Isidore de Séville, du Chaldéen Patricius et de son disciple Thomas d'Édesse, devenu plus tard S. Thomas d'Aquin.

Nous donnerons, comme exemple, l'hypothèse du moine égyptien, Cosmas d'Alexandrie, auquel un voyage aux Indes avait fait donner le surnom d'Indicopleustès. Voici en quels termes la résume Peschel, historien de la Géographie, le meilleur guide que

nous puissions consulter pour la période spéciale : « Des anges dirigent les constellations du ciel le long de leurs orbites circulaires et président aux alternatives du jour et de la nuit, de même qu'aux éclipses de Soleil et de Lune. La Terre, suivant sa doctrine, a perdu toute forme sphérique : elle s'élève au milieu de l'Océan, qui l'entoure, et ressemble à une cloche à base quadrangulaire. Le Soleil se meut au-dessus de cet ensemble et jamais au-dessous, mais se tient seulement toujours à l'intérieur de la voûte, sur la terre ferme. Au-dessus des continents, de l'Océan et des étoiles, embrassant tout ce qui est solide, s'élève le cristal du firmament. »

On peut signaler, comme se rapportant au même ordre d'idées, les écrits de cosmographes de ce temps, Aethicus et l'anonyme de Ravenne, dont les œuvres ont été publiées par les soins de Wuttke et de Pinder Parthey.

Il est assez étrange de constater que, dans l'histoire des œuvres humaines, personne n'ait pensé à dire quel philosophe avait le premier cherché à ébranler de pareilles doctrines. Peschel lui-même ne cite nulle part le nom d'un audacieux adversaire du saint-siége, l'évêque Virgile. Il est vrai que l'on n'a pu découvrir de témoignage écrit donnant la preuve matérielle que Virgile ait proclamé la sphéricité de la Terre, mais le fait ne paraît pas douteux, à en juger par le bref dans lequel le pape Zacharie, s'adressant au nonce apostolique d'Allemagne, S. Boniface, condamne les théories de Virgile et les déclare hérétiques. Poggendorff, G.-J. Bauer et Jocher n'ont pas oublié ce détail.

L'immense compilation de Calvisius renferme aussi un extrait qui peut être cité comme document historique. Dans un Chapitre intitulé : *Notice sur les monuments de Salzburg*, nous remarquons, dans une épître du pape Zacharie au R. F. Boniface, le passage suivant : « Il est enfin une cause perverse de désaccord et une doctrine absurde par laquelle Virgile offensait Dieu et son âme à la fois, lorsqu'il enseignait l'existence des antipodes. Il assurait qu'il y a des hommes qui habitaient une autre face du monde et un autre hémisphère. »

Cet évêque dissident se trouva donc taxé d'hérésie, et, si la manifestation de sa libre pensée n'éveilla pas l'attention au moyen âge, il le faut attribuer à l'ignorance de ses contemporains, qui mirent volontiers sur le compte du prince de la poésie latine les idées reprochées à un prélat du temps de Pepin.

Mais bientôt l'Église elle-même devait donner le signal d'un commencement de réforme dans les idées scientifiques. Suivant la remarque judicieuse de Peschel, « l'Église du moyen âge, privée de moyens exacts de mesure du temps et de calendriers bien ordonnés, devait un jour, plus ou moins éloigné, se trouver dans la nécessité de recourir à l'observation des phénomènes astronomiques et à la recherche approfondie des vérités mathématiques. Notre science semblait sommeiller dans le sein de l'Église; mais on allait bientôt assister à sa résurrection. »

C'est ainsi que l'on voit Beda revenir entièrement aux sphères de Ptolémée et avouer nettement la sphéricité de la Terre.

Alcuin s'est probablement associé aux théories de Beda, mais il ne paraît pas qu'elles aient servi à l'établissement des calendriers du temps de Charlemagne. Celui de 781, que possède le Musée du Louvre, a été fait d'après des règles plus anciennes, attribuées à Isidore de Séville plutôt qu'à Beda, au témoignage de Heis.

Cependant les derniers écrivains de la période carlovingienne se montrèrent encore profondément imbus des préjugés reçus, et, par exemple, l'abbé de Fulde, Rhabanus Maurus, cherchait à concilier la forme circulaire de l'horizon avec la forme quadrangulaire dont il a été question. De même, les cartes rondes des IXe et Xe siècles, sur lesquelles une naïveté touchante a désigné Jérusalem comme centre de l'univers entouré par l'Océan, semblent apporter à l'envi la preuve manifeste de leur imperfection.

Les essais de représentation de la surface terrestre n'aboutirent longtemps qu'à des peintures naïves, comme celles dont tout le moyen âge paraît avoir eu la spécialité.

Les Xe et XIe siècles nous donnent de nombreux témoignages de la rénovation accomplie dans le point de vue scientifique par la diffusion des connaissances venues des Byzantins et des Maures espagnols. D'après Peschel, Adam de Brême s'est distingué par son savoir et sa circonspection. Son Ouvrage a été publié dans les *Gesta Hammaburgensia* de Pertz. Adam de Brême connaissait parfaitement les vieux auteurs; en outre, l'expérience de ses propres voyages lui avait suggéré, comme jadis à Pythéas de Marseille, des idées exactes sur le cours apparent du Soleil, et, tandis que l'on ne trouve chez Virgile autre chose que des réflexions métaphysiques.

Adam de Brême a considérablement relevé le point auquel s'arrêtait jusqu'alors la connaissance de la nature.

Un autre progrès à constater, et qui dénote une idée plus nette du sphéroïde terrestre, nous est manifesté par le passage graduel des cartes rondes aux cartes géographiques véritables. Les anciens ne se proposaient que de représenter directement, à une échelle réduite, les contrées habitées. Mais, au début même du XIe siècle, on voit commencer les essais de projection des surfaces courbes. Les historiens spéciaux ne semblent pas avoir saisi la portée de cette transformation; et, en effet, ils n'y seraient parvenus qu'après une étude approfondie des richesses manuscrites que le moyen âge nous a laissées dans les sciences cosmographiques. M. Günther nous a dit, à ce propos, qu'il a eu déjà l'occasion d'en montrer la preuve basée sur la discussion des nombreux manuscrits de la Bibliothèque de Munich. Il y a bien encore des lacunes et des imperfections dans ces premières tentatives des cartographes, mais il faut bien reconnaître l'image exacte d'une forme sphérique sur un plan, divisée en zones correspondant à celles de la Terre. On y trouve encore le germe des cartes marines du Génois Andalò di Negro et du célèbre patriote vénitien Marino Sanuto.

On ne sait pas encore, d'une manière positive, à qui devoir attribuer le premier énoncé dogmatique de la sphéricité de la Terre. Le pape Sylvestre II (Gerbert) avait déjà connaissance de moyens de déterminer la grandeur de notre planète; mais il ne semble pas que l'on ait songé à les mettre à profit.

L'excellente idée que l'on a voulu réaliser en publiant d'une manière suivie, et rendant ainsi accessibles, les trésors des bibliothèques de Paris a mis au jour, dès le début, un manuscrit du XIIIe siècle, qui montre clairement combien la doctrine exacte du globe terrestre avait pris, à cette époque déjà, de profondes racines. On a retrouvé un petit Ouvrage intitulé : *Bild der Welt* (Description de l'univers), que l'éditeur Legrand d'Aussy attribue à un certain Omons. L'auteur se montre versé dans les Mathématiques et dans la littérature grecque. Il possède Aristote, Ptolémée, Platon, de sorte que son livre représente une somme de connaissances respectable pour l'époque. L'Astronomie se trouve, à juste titre, fondée uniquement sur les principes de l'Almageste. Il sera intéressant de citer surtout le passage relatif à la Terre. « La

Terre, dit-il, est enveloppée du ciel, ainsi que le jaune de l'œuf l'est du blanc », métaphore que nous aurons l'occasion de retrouver dans les écrits des Orientaux. Cette comparaison cosmologique appartient encore à l'Astronomie, tandis que la Géographie commence ainsi : « La Terre se trouve placée au milieu du ciel, comme le point l'est au centre qu'a tracé le compas. Elle est ronde, de sorte qu'un homme qui partiroit d'un point quelconque de sa surface pourroit, s'il ne rencontroit point d'obstacle, tourner tout autour, de même qu'un insecte qu'on verroit se promener sur la circonférence d'un fruit rond.... » A cette peinture très-correcte de la sphère terrestre, il ajoute, comme conclusion, une petite pièce de vers, dont l'éditeur a traduit ainsi le sens assez difficile à saisir : « Tellement que quand il arriveroit au point qui est directement sur nous » (qui correspond à celui où nous sommes placés), « il croiroit que nous sommes sous lui, car il auroit les pieds tournés vers les nôtres et la tête portée vers le ciel, de même que la nôtre l'est ». Mais, bientôt après, l'auteur arrive au point réellement important, et poursuit en ces termes : « Si c'étoient deux hommes à-la-fois qui partissent ainsi d'un point donné, et qu'ils s'avançassent, l'un vers l'orient, l'autre vers l'occident,

Si que andui egaument alassent,
Il comendroit qu'il s'encontrassent
Dessus le leu dont il se mûrent. »

C'est ce que l'on peut évidemment énoncer ainsi : Deux personnes, partant d'un même point du globe, avec la même vitesse, et suivant deux directions contraires, doivent se retrouver au point diamétralement opposé. Lorsque nous voyons Legrand d'Aussy remarquer, à ce sujet, que « voilà la sphéricité de la Terre et les antipodes énoncés bien clairement », nous ne croyons avoir rien à ajouter. On peut encore observer, avec Omons, que la hauteur des montagnes les plus élevées s'évanouit, en quelque sorte, si on la compare au rayon du globe terrestre : « Les hauteurs ni les vallées n'ôtent rien à la Terre de sa rondeur ».

Jean de Sacro Bosco publia dans le même temps une vaste compilation dans laquelle la doctrine de la sphère terrestre devenait véritablement scientifique. Mais il nous faudra constater que tout le moyen âge s'est écoulé sans que personne ait osé aborder de front la difficulté, regardée comme insurmontable, d'assigner à la surface

de l'Océan une forme sphérique. Les écrits de Dante peuvent donner une idée de cette confusion perpétuelle entre l'erreur et la vérité, et de cette facilité de conception de théories plus singulières les unes que les autres, ayant pour objet la constitution mécanique des deux parties constitutives de l'univers, la terre et les eaux.

Certains passages du poëme dantesque ont donné lieu de croire que l'auteur avait eu la notion de la sphéricité. Le XXXIVe chant de l'*Enfer* contient une sorte d'anticipation au fameux puits de Maupertuis. Dans le IIe chant du *Purgatoire*, on peut remarquer aussi le passage suivant : « L'Èbre, la ville de Jérusalem, le Gange et le point situé à 90 degrés vers le nord du Purgatoire des âmes représentent les quatre sommets d'un carré inscrit dans un parallèle de la Terre ». Au XXXIIIe chant, il fait encore voir qu'il n'a qu'une idée fort confuse de la sphéricité, et qu'il n'en comprend pas les conséquences. Les quelques idées justes qu'il a exprimées se trouvent noyées au milieu de théories fantaisistes et compliquées. Ainsi, après un essai infructueux de réfutation de l'hypothèse d'un gonflement des mers, il discute les conséquences mécaniques de la différence de position des centres de gravité de la masse des continents et de celle de l'Océan; il exprime clairement, d'après W. Schmidt, que le niveau de la mer est toujours l'expression de forces particulières s'exerçant sur elle, et que la surface libre, à part les légères perturbations qu'elle éprouve, se dispose constamment autour de son centre de gravité comme autour d'un centre. Il est à observer toutefois que, même à la fin du XVIe siècle, l'hypothèse d'un défaut de coïncidence entre les centres de la Terre et des eaux comptait des partisans. Le philosophe Fr. Patrizio était de ce nombre.

Lorsque Christophe Colomb eut conçu le plan de sa traversée de l'océan Atlantique, on tenta de lui objecter qu'il aurait à franchir une gigantesque montagne liquide située au large, à l'occident. Comme nous le dit Ruge, Christophe Colomb ne s'inquiéta pas beaucoup de cette difficulté; mais il chercha des preuves directes de l'exactitude de cette hypothèse, et, lorsqu'il découvrit les bouches de l'Orénoque, il se figura en présence du point le plus élevé de la masse des eaux et d'un véritable renflement de la surface de la Terre et de l'Océan.

La sphéricité de la Terre n'a plus trouvé, jusqu'au début du

XVIe siècle, de sérieux adversaires, et il nous faut maintenant résoudre les deux questions suivantes :

Quelle fut l'opinion des Occidentaux, ou mieux des chrétiens du moyen âge, sur la doctrine du mouvement de la Terre?

Cette doctrine trouva-t-elle des représentants, et à quel titre ceux-ci peuvent-ils passer pour précurseurs de Copernic?

L'hypothèse du mouvement de la Terre ne paraît pas avoir eu cours avant le XIIIe siècle, et il faut arriver au roi Alphonse de Castille pour trouver les premières phases de l'évolution des idées grecques et arabes.

La période d'éclat des idées de la scolastique peut se résumer dans la recherche du système théorique de l'univers dans la science des Grecs et en partie dans celle des Arabes. C'est encore parmi les théologiens qu'il faut chercher les premières idées de réforme dans la Géographie astronomique.

Le savant dominicain de Bollstädt, Albert le Grand, occupe un rang élevé parmi les philosophes de son temps. Il a, comme Aristote et Alexandre de Humboldt, conçu un plan de description générale de l'univers.

Un passage de ses œuvres nous permettra d'apprécier le caractère de ses idées. Il y est question de la notion du plan indéfini, qu'il appuie de considérations qui touchent au paradoxe : « Le mouvement dans un espace indéfini doit exiger un temps indéfini; si donc nous prenons un point à l'orient, la distance de l'orient à l'occident sera infinie. Pour se mouvoir de l'orient vers l'occident, le Soleil emploiera un temps infini, ce qui est absurde, puisque nous voyons qu'il parcourt tout cet espace dans l'intervalle de vingt-quatre heures. » On reconnaît que le plus léger doute au sujet de l'immobilité de la Terre renversait immédiatement cette preuve spécieuse de la forme limitée de l'espace.

Roger Bacon s'est distingué en Astronomie non moins qu'en Philosophie, et, en maints endroits de ses écrits, il s'est écarté des sentiers battus de la scolastique de son temps. L'*Opus majus* renferme un riche trésor de preuves de cette émancipation. Dans une habile réfutation du passage d'Albert déjà relaté, Bacon s'exprime ainsi : « Ptolémée a montré dans l'Almageste et tous les astronomes savent que la Terre entière ainsi que les enfers sont situés, à l'égard du ciel, comme le centre par rapport à la circonférence;

et la moindre des étoiles discernables à la vue est plus grande que la Terre, ainsi que l'a dit Alfragan dans les prémisses de son Livre. » Toutefois, on n'osait pas proclamer l'isolement de la Terre dans l'espace, et plus tard les catholiques et les protestants devaient opposer des passages de la Bible à la théorie de Copernic. La légende biblique de Josué ne pouvait échapper à ce génie pénétrant. « L'histoire que rapporte le prophète Isaïe et un autre passage de Salomon dans l'Ecclésiaste resteront », dit-il, « incompréhensibles et seront une source de contradiction pour tout esprit mathématique. »

L'illustre et savant théologien Thomas d'Aquin a laissé une encyclopédie qui prouve la profondeur et la fécondité de son esprit. M. Günther a examiné en détail, dans un dernier Ouvrage analysé au *Bulletin*, les idées remarquables de Thomas d'Aquin sur la lumière et la chaleur; mais le *Docteur angélique* paraît avoir moins bien réussi en Astronomie, où il a supposé aux mouvements célestes une complication extraordinaire.

Les écrits d'un évêque de Cambrai, Pierre d'Ailly, méritent, comme ceux de Thomas d'Aquin, une mention toute spéciale. D'après Poggendorff, leur lecture a suggéré à Christophe Colomb la première idée d'atteindre l'orient en passant à l'occident; mais, en dehors de cette particularité, cet Ouvrage porte, comme tous ceux du XIIIe siècle, l'empreinte bien marquée du caractère de la Philosophie et des méditations scolastiques. L'OEuvre de Dante Allighieri doit être citée comme le plus parfait modèle.

« Nous n'avons pas réussi », dit M. Günther, « à trouver dans son poëme de traces d'une considération de l'univers affranchie de préjugés, de sorte qu'il faut être persuadé qu'une pareille tentative ne conduirait à de meilleurs résultats dans aucun des astronomes ou géographes de son temps. Une analyse attentive de la trilogie de Dante nous donne la preuve que le poëte florentin ne saurait passer pour précurseur de Copernic. » Voici, par exemple, une réminiscence de quelque idée indo-égyptienne, qui place le mouvement des corps célestes dans les attributions d'intelligences spéciales. Aux Ve et VIIe chants de *l'Enfer*, le poëte se range à l'opinion scolastique : un ange ou même un dieu préside au cours de chaque planète. La même théorie se retrouve, plus nettement indiquée, dans le IIe chant du *Paradis*. Enfin la doctrine des sphères est

exposée à diverses reprises dans les Ier, IIIe, XIe, XVe et XXVIe chants du *Purgatoire*. Ces sphères, au nombre de neuf, entourent chaque planète, d'après la théorie d'Eudoxe. Dante Allighieri les regarde comme des sphères de cristal translucides. Il adopte sans examen la plupart des systèmes imaginés par les Grecs. Pour lui, le premier mobile est la sphère qui se meut le plus rapidement; la sphère de la Lune possède le mouvement le plus lent. Il paraît ignorer les inclinaisons des orbites planétaires sur l'écliptique. *Le Banquet*, en particulier, renferme de meilleures indications théoriques, et Libri déclare que les éclipses, la rondeur de la Terre, les antipodes et la Voie lactée se trouvent décrits et expliqués avec beaucoup de justesse. L'auteur y donne la preuve qu'il connaît Pythagore, Aristote et Ptolémée, ainsi que les astronomes arabes Alfraganus, Avicenne, Algazal et Albumazar. Mais, comme on le voit, il n'est pas possible d'y trouver une base exacte et scientifique.

La ville de Florence a vu fleurir à la même époque un nouvel esprit réformateur en la personne de Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397-1482). Peschel a clairement établi l'influence que ce savant paraît avoir exercée sur la détermination du projet de Christophe Colomb. Les quelques arguments scientifiques produits par Colomb au synode de Salamanque puisaient leur source dans la correspondance que lui avait adressée autrefois Paolo Toscanelli, et surtout dans la communication qu'il lui avait faite de cartes marines dessinées suivant les règles d'Ératosthène.

Les importantes contributions du cardinal romain Nicolas de Cusa à l'histoire de la Géographie se trouvent indiquées avec détail dans le travail de M. Günther.

Nicolas Krebs (ou Chrypfs), né à Cues (ou Cusa), sur la Moselle, se distingua de bonne heure par son mérite extraordinaire et son talent incomparable. Disciple de Paolo dal Pozzo, il devint évêque de Trèves. Comme mathématicien, ses travaux dénotent une grande habileté dans les recherches abstraites. Schanz en a fait dernièrement ressortir les principaux résultats dans un Ouvrage qui permet de bien juger du rôle de Nicolas de Cusa comme novateur et réformateur scientifique. Ce rôle n'a pas été apprécié d'un commun accord par les historiens des Mathématiques. Montucla l'a considéré comme un véritable précurseur, Mädler comme un

cerveau malade. Le jugement de R. Wolf, de Zurich, serait encore plus sévère. Il y a donc là une question à trancher.

La réforme et la révision fondamentale des vues cosmologiques devaient dépendre de l'adoption de deux hypothèses tout à fait dissemblables : fallait-il d'abord devancer suffisamment les observations et le calcul, pour laisser se dessiner simplement la nécessité absolue d'une réforme? ou bien fallait-il briser définitivement les liens philosophiques et religieux que la doctrine de Ptolémée avait étroitement réunis aux vues fondamentales de l'antiquité?

Peurbach, Müller, etc., appartiennent à la première école; Nicolas de Cusa rentrerait plutôt dans la seconde : aussi lui est-il resté la réputation d'un esprit indépendant.

L'Ouvrage d'après lequel on peut déterminer le caractère de sa Philosophie est le fameux Traité *De docta Ignorantia* (1565). L'auteur y énonce, pour la première fois, un singulier axiome dont il déduit qu'il ne saurait exister de centre de l'univers dans l'acception scolastique. Mais, s'il n'existe pas de centre, il ne pourrait y avoir de périphérie. Nous voyons ainsi exprimer une idée que l'on retrouve, sous une forme plus catégorique, dans les écrits de Bacon : l'univers peut être comparé à une sphère dont le centre est partout et la circonférence nulle part.

Nicolas de Cusa n'a pas enseigné la sphéricité de la Terre. Se basant évidemment sur des idées métaphysiques et non sur les résultats de l'observation la plus simple, il a contesté à la fois la sphéricité et le mouvement de notre planète.

De l'examen des doctrines de Cusa se dégage, comme conclusion, que la Terre a cessé d'occuper le centre absolu de l'univers et qu'elle devient une planète sur le même pied que les autres corps célestes. Aussi ne doit-on pas être surpris de voir Nicolas de Cusa partisan de la pluralité des mondes. Quant au mouvement de la Terre, il ne l'a pas proclamé d'une manière très-nette; il a pu faire allusion au mouvement de la Terre, mais il n'a pas parlé de son mouvement autour du Soleil. Nicolas de Cusa paraît avoir donné à ce mot le sens que nous lui retrouvons chez Nicole Oresme (mathématicien français, mort en 1382), qui, au Chapitre XLI de son *Traité de la sphère,* parle d'une *merveilleuse consideracion ou circuite de la Terre.*

Au milieu de toutes ces contradictions motivées par l'influence

de la scolastique, il est intéressant de constater que Nicolas de Cusa a nié la constance de la précession et de la durée de l'année tropique.

Clément, zélé partisan de la philosophie de Cusa, a eu le mérite de se déclarer plus franchement pour le mouvement de la Terre. Bien que son travail ait été publié deux fois déjà, il se trouve reproduit dans la présente étude, en raison des importantes conclusions et théories qu'il renferme. « J'ai observé », dit-il, « qu'aucun mouvement ne saurait être circulaire et qu'il n'y a pas d'étoile qui décrive un cercle parfait. Le pôle du mouvement de la huitième sphère varie donc d'une manière continue. La Terre ne peut être fixe; elle se meut comme les autres étoiles. » Il attribue à Pythagore, bien que ce doive être à Philolaüs, la doctrine d'un mouvement de la Terre; mais, lorsqu'il l'étudie comme mouvement de rotation, il tombe dans la même erreur que tous les auteurs, sauf M. Th.-Henri Martin, ont commise. Cusa avait plus clairement adopté la rotation de la Terre autour de son axe. Quant au mouvement de la huitième sphère, Schanz paraît l'avoir très-exactement interprété : il faut y chercher la théorie de l'année tropique, relativement à l'année solaire moyenne. Le même géomètre a fort bien expliqué aussi les idées de Cusa relatives aux autres mouvements dont il est question dans le manuscrit de Clément. Voici les propositions de Cusa :

I. La Terre tourne, en vingt-quatre heures, de l'ouest vers l'est, autour d'un axe qui se confond avec l'axe du monde.

II. Elle est entraînée dans le même temps par la huitième sphère, qui tourne autour de l'axe, dans un sens opposé, et avec une vitesse angulaire double.

III. Le Soleil prend part à cette dernière révolution, mais avec un certain retard, qui, dans le cours d'une année, atteint juste 360 degrés.

Des affirmations aussi précises motivent une discussion approfondie, pour laquelle M. Günther a largement puisé dans le Mémoire de Schanz. Le mysticisme paraît avoir exercé son influence sur la métaphysique de Cusa; de là vient sans doute l'obscurité qui enveloppe quelques-unes de ses affirmations. Ce n'est pas le seul

exemple que nous offre l'histoire des sciences. Combien de découvertes simplement entrevues ou pressenties, rejetées par les uns, reprises et proclamées par les autres! Nos contemporains, en possession de méthodes certaines, peuvent éviter aisément ce danger; mais, au moyen âge, l'esprit humain se trouve livré à lui-même, sans méthode pour se guider au milieu de préjugés de toute sorte.

S'il fallait en croire ce que l'on a dit de Regiomontanus, ce réformateur de l'Astronomie théorique et pratique aurait remporté le prix par-dessus tous. Voici, par exemple, le témoignage d'un mathématicien et géographe de Nuremberg, Jean Schoner : « La doctrine de Jean de Kœnigsberg enseigne que la Terre se meut parce que ce mouvement permet d'expliquer toutes les apparences des corps célestes. Aussi, dès que l'on admet le mouvement de la Terre et l'immobilité du ciel, ne rencontre-t-on plus de difficulté. L'auteur de *la Sphère* (Jean de Sacro Bosco) est de l'avis contraire. » Doppelmayr, à qui nous empruntons ce passage, poursuit en ces termes : « Dans un de ses manuscrits posthumes, Prätorius dit que Grégoire Hartmann, mathématicien de Nuremberg, avait reçu des propres mains de Regiomontanus un *Traité d'Astronomie* dont il avait ainsi formulé la conclusion : « Il est donc nécessaire » que le mouvement des étoiles éprouve quelque petite variation à » cause du mouvement de la Terre, ce qui paraît démontrer clairement que Regiomontanus avait proclamé le mouvement de notre » planète. » Le fait ne nous paraît pas vraisemblable, et, aussi longtemps que nous n'aurons pas trouvé de preuve plus concluante dans les propres écrits du grand astronome, nous n'aurons pas besoin de croire que ce soit celle que Ptolémée a décrite à l'appui de son système.

Nous devons une courte mention à Domenico Maria, de Ferrare, professeur à Bologne. Cet illustre précepteur de Copernic fut également astronome distingué, et ses relations avec Scipion Ferro témoignent de son talent comme géomètre. Il eut, dit Libri, presque en même temps qu'un jurisconsulte napolitain, l'idée d'un changement dans l'axe de rotation de la Terre.

Partant de ses recherches sur la Géographie mathématique des contrées entourées de mers, il croyait avoir motivé l'hypothèse d'un changement dans l'axe de rotation de la Terre depuis le

temps des Grecs, de sorte que toutes les hauteurs du pôle fussent diminuées. Gassendi, qui a signalé ce fait et lui attribue une grande importance, est disposé à y reconnaître, à part certaines erreurs, un progrès marqué, eu égard au point de départ. Domenico a tiré lui-même de son hypothèse une curieuse conséquence : « Par suite de ce mouvement », dit-il, « les zones actuellement habitables deviendront désertes, et les pays que brûle aujourd'hui le Soleil éprouveront enfin la fraîcheur de nos climats; pareille révolution n'exigera pas moins de trois cent quatre-vingt-quinze mille ans. » Cette théorie a pu diviser les physiciens et les géologues. Adhémar et Stadius y ont ajouté foi; mais Guillaume Gilbert, inventeur de la théorie du grand aimant terrestre, a formellement rejeté l'hypothèse de Domenico Maria.

Ce dernier devait être éclipsé par un de ses contemporains, plus jeune que lui de dix ans, Girolamo Frascatoro, de Vérone (1483-1553), dont l'œuvre capitale parut sept ans avant les *Révolutions* de Copernic. Libri en a ainsi résumé la partie générale : « En combattant les épicycles, il a aplani la route au système de Copernic. »

Il a été publié une édition très-abrégée de la *Cosmologie* de Fracastor, intitulée *Homocentrica* (1538). On y trouve l'exposé d'un système dont le plan avait été tracé par un de ses amis et compatriotes, J.-B. Turrius, ravi à son affection par une mort prématurée. Il est à observer que Fracastor n'a pas songé à parler du mouvement de la Terre, mais il se montra ennemi du système de Ptolémée et devint, à ce titre, précurseur de Copernic.

La Préface de son Livre renferme le dilemme de l'Astronomie : ceux qui emploient les sphères homocentriques dans le sens d'Eudoxe et de Calippe ne peuvent les mettre en harmonie avec les faits observés; les partisans de la théorie d'Hipparque et de Ptolémée sont plus heureux à ce point de vue, mais l'hypothèse de cercles excentriques doit être rejetée comme contraire à l'esprit philosophique.

Cependant un examen plus attentif permet de constater que le principe de sa méthode ne s'écarte pas notablement des systèmes d'Eudoxe et de Calippe. « Personne ne doit douter que les étoiles soient établies et fixées à une certaine sphère qui, par suite, les entraîne avec elle. » On trouverait encore d'autres réminiscences des théories d'Aristote et d'Eudoxe, et en particulier, le fait

« qu'une sphère en entraine une autre sans éprouver de résistance ». Une série de recherches de détail se relie à ce problème général, et l'on peut y remarquer, pour l'histoire de la Mécanique, une importante explication des principes phoronomiques élémentaires. La nouveauté la plus curieuse est une démonstration de ce que l'on appelait *mouvement de trépidation,* fondée sur l'emploi d'une orbite elliptique. On y trouve aussi une discussion sur un mouvement hélicoïdal se rapprochant d'oscillations hors du cercle.

La théorie pure est exposée dans un deuxième volume. On y constate que l'auteur avait une notion ingénieuse du système planétaire. Au Chapitre VIII, il étudie les causes de la diminution de la déclinaison du Soleil. Il montre que, depuis Ptolémée, l'obliquité de l'écliptique avait diminué de vingt-trois minutes. Il est le premier, dit Mädler, qui ait remarqué, pour l'obliquité de l'écliptique, une diminution que Peurbach avait simplement soupçonnée.

Fracastor peut être considéré comme précurseur de Laplace, qui établit la théorie mathématique de la variation séculaire périodique de l'obliquité de l'écliptique. Il ne faudrait toutefois rien exagérer, parce que l'insuffisance des moyens d'observation ne lui a pas permis de formuler de propositions bien catégoriques.

Léonard de Vinci n'a pas été célèbre seulement comme peintre, mécanicien et aviateur : il a eu d'ingénieux aperçus dans l'étude des sciences géographiques. Bien qu'il ait été plus ancien que Frascator, puisque les meilleures biographies fixent sa naissance en 1452 et sa mort en 1519, les études auxquelles il s'est livré dans les sciences tiennent une plus large place et méritent plus d'attention que celles de Fracastor. En Astronomie, dit Libri, il a soutenu, avant Copernic, la théorie du mouvement de la Terre. Mais le passage de Léonard de Vinci paraît avoir été mal interprété ; et, en effet, Groth nous dit nettement, bien que d'une manière trop concise, que Vinci avait déjà une notion de l'influence du mouvement de la Terre sur la chute libre des corps. Ceci toutefois ne paraît pas devoir être adopté sans restriction. Les lois de ce phénomène n'étaient pas encore étudiées, et il ne faut voir sans doute en cette assertion qu'une preuve que Léonard de Vinci aurait voulu pénétrer un sujet qui, deux siècles plus tard, allait être la pomme de discorde entre Newton et Hooke. L'explication que Venturi a cherché à en donner est encore d'une concision extrême ; Whewell paraît avoir beau-

coup mieux saisi le sens véritable. « Léonard », dit-il, « démontra vers l'année 1510 comment un corps peut suivre, dans sa chute, une ligne spirale ou hélicoïdale, autour de l'axe d'une sphère qui tourne, tandis que le mouvement de ce corps, observé d'un point de la surface sphérique, reste dirigé suivant une ligne droite passant par le centre de la sphère. Il donne ainsi la preuve qu'il avait devant les yeux l'image du mouvement de la Terre, et qu'il voulait éloigner les difficultés qui devaient naître de la simultanéité de deux mouvements, celui du corps et celui de la sphère. »

Ce passage nous oblige à reconnaître que Léonard de Vinci avait accepté déjà l'hypothèse de la rotation. Il n'est question ici que du mouvement autour de l'axe de la Terre; mais, quant à saisir comment il se le représentait, et quelle base il lui donnait, il nous est impossible d'en juger. En tout cas, le fait dont nous parle Venturi doit être plutôt regardé comme preuve de l'érudition d'un savant distingué et de l'heureuse application du théorème bien connu du parallélogramme des mouvements à un exemple de nature à frapper les regards. Le problème dont il s'agit consiste, en effet, dans la construction de la courbe que décrirait un mobile, tombant librement d'un point situé sur le plan de l'équateur, et supposé entraîné par le mouvement uniforme d'un observateur placé à l'origine sur le même plan. Léonard de Vinci ne connaissait pas la loi de la chute des corps, et il a supposé le mouvement de chute uniforme. Le problème peut aisément se transformer, soit au point de vue géométrique, comme l'a traité Poleni, soit enfin au point de vue analytique, comme l'a défini Dienger; c'est, en effet, la courbe que décrit un chien qui court après son maître; en d'autres termes, c'est le premier exemple de la *courbe de poursuite*.

Une généralisation du problème a conduit Léonard de Vinci à la notion des courbes à double courbure, qu'il a su distinguer des courbes planes, seul progrès accompli dans cette voie depuis Pappus.

La conclusion à tirer de toutes les études qui précèdent, c'est que, longtemps avant la publication des œuvres de Copernic, les idées de ce grand astronome s'étaient fait jour, une à une, sans arriver à s'imposer définitivement à l'esprit humain. On les retrouve exprimées par Hieronimo Tallavia de Reggio, Widmannstadt, Celio Calcagnini. Enfin, au témoignage de Gassendi, le système hélioccen-

trique comptait à Rome, avant 1536, de nombreux partisans.

Nous voici arrivés au terme de ce premier Mémoire, qui avait pour objet de montrer comment les deux doctrines fondamentales de la Géographie mathématique, exprimées par la sphéricité et le double mouvement de notre planète, se sont graduellement développées comme donnée scientifique et comme méthode de représentation. Le cachet d'érudition qui distingue ce travail lui donnera un crédit puissant auprès des personnes qui s'intéressent à l'histoire des Mathématiques. H. B.

WOLF (R.). — GESCHICHTE DER ASTRONOMIE. München, 1877. Druck und Verlag von R. Oldenbourg. — 1 vol. in-8°, XVI-815 p.

Cet Ouvrage forme le seizième volume de la grandiose publication, entreprise sous les auspices du roi Maximilien II, d'une « Histoire des Sciences en Allemagne », dont nous avons déjà analysé, dans ce *Bulletin* (1), le tome contenant l'*Histoire des Mathématiques*, par Gerhardt. Si notre jugement sur ce dernier livre a dû sembler peu favorable, nous ne saurions, en revanche, accorder trop d'éloges à celui dont nous nous occupons aujourd'hui, et que l'on peut certainement considérer comme une des gloires de notre littérature historique.

L'un des nombreux écueils auxquels Gerhardt s'est heurté, et qui ont failli faire échouer plusieurs de ses confrères, Wolf a su l'éviter par un hardi détour. N'étant pas lui-même Allemand, dans le sens géographique du mot, il s'est tout d'abord affranchi des restrictions étroites que le plan général de la publication semblait vouloir imposer aux auteurs chargés de la rédaction des diverses parties ; le livre qu'il nous présente est une histoire universelle de l'Astronomie, dans laquelle, à la vérité, il offre une place d'honneur aux produits du génie allemand. Les deux Traités présentent encore une autre différence caractéristique. Tandis que Gerhardt

(1) *Voir* p. 201 du présent volume.

se borne presque exclusivement à enregistrer les extensions fondamentales de notre science, en isolant ainsi de tous les termes intermédiaires chacune des grandes découvertes, de manière à les présenter comme des faits dépourvus de tout lien mutuel, Wolf, au contraire, attache à la recherche et à l'exposition de ces termes secondaires une importance toute particulière, et déroule pour cela devant le lecteur toute la richesse de ses connaissances historiques, enchaînant ainsi l'attention et la tenant continuellement en éveil. En troisième lieu, l'auteur allemand, de parti pris sans doute, ne fait pas la moindre mention de ses contemporains, tandis que l'auteur suisse a voulu que son Ouvrage pût aussi servir en quelque sorte de répertoire de tous les travaux, tant anciens que modernes, concernant la science historique, et ce consciencieux travail suffirait déjà à lui seul pour assurer à l'œuvre de l'auteur une importance hors ligne.

Le volume qui nous occupe est divisé en trois Livres, ayant pour objets respectifs «l'Astronomie chez les peuples de l'antiquité», «la Réforme de l'Astronomie», et «l'Astronomie moderne». L'auteur applique autant qu'il est possible à chacun de ces trois Livres le même système de subdivision en quatre Chapitres, dont le premier est consacré à l'Astronomie théorique, le second à l'Astronomie métrique, le troisième à l'Astronomie topographique, tandis que, dans le quatrième, sont énumérées et analysées les productions scientifiques de la période correspondante.

Un avantage capital par lequel le livre de M. Wolf se distingue des autres Ouvrages traitant de l'histoire des sciences exactes, c'est son mode d'exposition, qui satisfait à toutes les exigences de la rigueur mathématique, tout en restant à la portée du public ordinaire. Tandis que le texte du récit historique est écrit dans un langage intelligible pour tous, on trouve, dans les notes au bas des pages, une richesse extraordinaire de matériaux pour l'explication des détails spéciaux au sujet. C'est là que sont décrits minutieusement les instruments et les méthodes de calcul. Nous citerons, comme exemples, l'exposition de l'Arénaire d'Archimède (p. 36), l'analyse trigonométrique du mouvement épicycloïdal (p. 57), la digression sur le calcul des transversales de Ptolémée (p. 119), l'explication si claire du *torquetum* et du planisphère (p. 161 et suiv.), l'élucidation du procédé de Rothmann pour traiter le dernier cas de

congruence de la Trigonométrie sphérique ([1]) (p. 345), la prostaphérèse (p. 348), etc., etc. Qu'un homme d'une érudition universelle comme M. Wolf, dans le cours des longues études préliminaires qu'il a consacrées pendant tant d'années à la recherche des matériaux de son livre, ait dû recueillir un grand nombre de faits nouveaux et importants, c'est à quoi l'on devait s'attendre; pour en donner quelques exemples, citons ses renseignements inattendus sur la Société astronomique de Cassel, que le landgrave Guillaume avait su rassembler autour de lui (p. 266 et suiv.), les documents qu'il donne sur l'invention du niveau (p. 573) et sur celle de la lunette montée parallactiquement (p. 589). Nous pourrions indiquer encore une foule de détails non moins remarquables; mais, par cette même raison, nous nous voyons forcé à les passer sous silence et à renvoyer le lecteur à l'Ouvrage lui-même.

Nous rappellerons seulement encore qu'ici le dessein poursuivi, mais avec un succès bien incomplet, par l'auteur dont nous nous sommes occupé précédemment se trouve entièrement réalisé par M. Wolf, qui a su faire ressortir la dépendance intime entre l'histoire de la science et celle de la culture générale; il suffira, pour s'en convaincre, de lire ses remarques sur les superstitions touchant les comètes, ainsi que les éclaircissements sur la sphère de Heynfogel.

Pour donner au lecteur de cette analyse qui n'aurait pas encore l'Ouvrage lui-même entre les mains une idée superficielle au moins de la marche de l'exposition, nous allons prendre un Chapitre quelconque et analyser les objets qui y sont traités. Nous choisirons le Chapitre VI, le deuxième du second Livre ([2]). Ce Chapitre commence par les progrès du calcul numérique, inaugurés par Stifel, Stevin et Bürgi, où il est particulièrement question de la multiplication abrégée; l'auteur esquisse ensuite le développement de la Trigonométrie plane et sphérique; il s'étend avec détail sur le procédé de calcul par la prostaphérèse et sur l'invention des

---

([1]) A côté de ce procédé, on peut citer, comme terme de comparaison, la théorie du cas polairement conjugué, chef-d'œuvre de simplicité mathématique, que l'on doit à Johann Werner, et dont l'auteur de cet article s'est longuement occupé dans le cinquième fascicule de ses *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie*.

([2]) *Voir* la division indiquée plus haut.

logarithmes, qui en sont précisément la contre-partie, et il termine cette première Partie, principalement mathématique, par l'énumération des machines à calcul remarquables au point de vue historique. L'auteur passe de là aux instruments d'Optique, dont il tire au clair l'ancienne histoire, plus ou moins fabuleuse ; il montre que les lunettes ont été ajustées aux instruments de mesure et ont été reconnues comme pouvant servir aux observations de jour. Arrivant au perfectionnement des méthodes de mesure, il donne un aperçu des idées de Nonius, de Brahe, de Vernier, et fait voir comment elles ont conduit à compléter le principal instrument de cette époque, le quadrant azimutal ; vient alors une histoire détaillée de l'invention de l'horloge à pendule ([1]). A cette histoire succède la description des méthodes d'observation ; les différents procédés employés alors pour la détermination des coordonnées géographiques sont examinés à fond ; à une analyse des catalogues d'étoiles, trop peu appréciés jusqu'ici, dus aux astronomes hessois, se rattachent « les observations de Tycho et de Hevel », et à celles-ci « les mesures de degrés de Snellius, de Norwood et de Riccioli ». Enfin, dans les deux derniers paragraphes, l'auteur rend compte des progrès effectués dans les méthodes de projection des cartes et dans le calcul des parallaxes. On voit que la lecture de ce Chapitre nous offre une image claire de l'état de l'Astronomie pratique dans l'intervalle des années 1550 et 1650.

Vouloir adresser des critiques quelconques à un Ouvrage si riche en matériaux et si merveilleusement rempli, cela pourrait passer pour une entreprise tout à fait superflue. Et, en effet, nous n'aurions pas cru avoir qualité pour cela, si nous n'avions pas tenu à démontrer par là l'ardeur que nous avons apportée à l'étude approfondie de ce livre. D'ailleurs, l'examen des détails n'aurait eu au-

---

([1]) L'auteur de cet article croit qu'il est de son devoir, dans l'intérêt de la vérité, de faire observer que l'opinion adoptée par lui dans ses *Vermischte Untersuchungen* (voir *Bulletin*, XI, 108), et partagée aussi par M. Wolf, suivant laquelle Galilée aurait complétement échoué dans ses tentatives pour l'invention d'un échappement automatique, n'est peut-être pas bien démontrée. Une certaine source de renseignements avait été indiquée alors par nous comme n'ayant pu être consultée, et d'après une communication verbale d'un des savants les plus versés dans l'histoire de Galilée, M. Wohlwill, à Hambourg, cette même source doit fournir d'importants éclaircissements sur cette question.

cune raison d'être s'il se fût agi d'un traité esquissant à grands traits la marche générale de l'histoire; mais, en face d'un auteur qui consacre tant d'attention à relever les plus minces détails dès qu'ils lui semblent présenter quelque intérêt historique, nous croyons par nos remarques entrer pleinement dans ses intentions.

A la page 113, l'auteur ne s'étant pas prononcé sur l'origine du mot *colure*, nous ferons observer que l'étymologie de ce mot, objet de tant de contestations, a été définitivement établie par Heis dans son journal hebdomadaire (*Wochenschrift*).

L'assertion de la page 101 : « Tandis que Hartmann était venu du dehors, Jean Schoener ou Schoner, au contraire, était un vrai enfant de Nuremberg », nous paraît douteuse; nous avions cru jusqu'ici que Schoner était natif de la petite ville de Karlstadt, dans le voisinage de Wurzbourg.

Lorsqu'il est question, page 245, de la part que Longomontanus fait au système de Copernic, en conservant du moins la rotation de la Terre autour de son axe, il eût été bon de faire ressortir encore davantage l'importance historique de ce système de conciliation : deux savants, dont M. Wolf n'a pas parlé, le mathématicien bohème Origanus et le physicien Patritius, ont donné leur adhésion à ce système.

L'article sur l'attraction des montagnes, malgré la haute importance que cette question a prise dans ces derniers temps au point de vue de la Géodésie astronomique, n'a pas été traité avec tous les développements désirables. Le fait que Bouguer a le premier observé ce phénomène n'aurait pas dû être passé sous silence, non plus que la monographie complète de Keller sur ce sujet (p. 628).

A la page 763, l'*Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, publié par Hindenburg, est cité avec cette mention, qu'il contient beaucoup de choses intéressantes pour l'Astronomie. On y rencontre, en effet, plusieurs Mémoires dont l'auteur ne s'est pas servi : par exemple, un Mémoire de Beitler, à Mitau, sur la détermination de la hauteur du pôle, et un travail qui n'est pas sans importance, d'un astronome amateur bien connu, le comte Brühl, sur les cercles astronomiques, travail qui, joint aux annotations de Zach sur les motifs qui ont à cette époque fait adopter les cercles entiers à la place des secteurs, offre au lecteur bien des points de vue nouveaux.

Au sujet de quelques autres désaccords entre l'auteur et nous, relatifs à d'autres parties du livre, nous nous étions déjà expliqué l'un et l'autre dans l'*Allgemeine Zeitung*.

Chaque fois que nous ouvrons l'*Histoire de l'Astronomie* de Wolf, c'est pour nous un sentiment de joie de voir que les études sur l'histoire des Mathématiques s'y trouvent enfin assises sur une base si sûre pour leurs progrès futurs. Nous espérons que les lecteurs du *Bulletin* retrouveront aussi dans notre article l'impression de ce sentiment. Nous terminerons maintenant en faisant des vœux pour que l'auteur chargé de l'*Histoire de la Physique,* qui doit encore paraître dans la grande collection bavaroise, fasse une œuvre digne de celle de son prédécesseur. Nous ne pouvons faire pour lui un meilleur souhait.

S. Günther.

ENNEPER (A.). — Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien (¹).

Dans ce travail étendu, l'auteur s'est proposé de reprendre à nouveau l'importante question de l'étude et de la recherche des surfaces à lignes de courbure planes et sphériques. Après un historique rapide dans lequel sont mentionnés les travaux de Joachimsthal, de MM. O. Bonnet et Serret, M. Enneper définit le but de son travail et indique la marche qu'il emploiera. Cette marche est toute différente de celle qui a été suivie par les inventeurs, et on peut la caractériser par ce fait, qu'au lieu d'avoir à intégrer des équations aux dérivées partielles, M. Enneper ne rencontre, dans sa méthode, que des équations différentielles ordinaires, équations que l'on peut toujours intégrer en donnant des formes convenables aux fonctions arbitraires qui y figurent. L'auteur étudie, d'une manière très-détaillée, les différentes espèces de surfaces à lignes de courbure planes; mais un seul article est consacré à des surfaces à lignes de courbure sphériques, celles pour lesquelles les lignes

---

(¹) *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* t. XXIII, 1878.

de courbure de l'un des systèmes sont planes et les autres sphériques.

Un dernier article du Mémoire est consacré à la généralisation de la notion des surfaces parallèles. On sait que Steiner, dans un Mémoire inséré au *Journal de Crelle*, a fait connaître une extension de la théorie des surfaces parallèles, qu'il a obtenue en considérant deux surfaces quelconques, et en appelant points correspondants sur ces deux surfaces les points pour lesquels les plans tangents sont parallèles. M. Enneper a établi, au sujet de ce mode de correspondance, un théorème curieux dont il fait l'application aux surfaces à lignes de courbure planes. G. D.

MÉLANGES.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. G. DARBOUX.

Trouver la figure d'équilibre d'un fil flexible et inextensible non pesant, traversé par un courant et soumis à l'influence du pôle d'un aimant.

Rapportons le fil à trois axes rectangulaires, ayant leur origine O au pôle d'un aimant. Les composantes de l'action de ce pôle sur un élément ds du fil seront

$$\frac{\mu(y\,dz - z\,dy)}{r^3}, \quad \frac{\mu(z\,dx - x\,dz)}{r^3}, \quad \frac{\mu(x\,dy - y\,dx)}{r^3},$$

r désignant la distance de cet élément à l'origine et μ une constante; par conséquent, les équations d'équilibre du fil seront, en désignant par T la tension,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) + \mu\frac{y\,dz - z\,dy}{r^3} &= 0, \\ d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) + \mu\frac{z\,dx - x\,dz}{r^3} &= 0, \\ d\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right) + \mu\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ce sont ces équations qu'il s'agit d'intégrer.

En les multipliant par dx, dy, dz et les ajoutant, on obtient

$$dT = 0; \tag{2}$$

donc la tension est constante. Ce résultat était évident *a priori*, puisque la force appliquée à chaque élément est normale à cet élément.

Ajoutons maintenant les équations (1) après les avoir multipliées par x, y, z respectivement. Nous trouverons, en tenant compte de l'équation (2),

$$T\left(x d\frac{dx}{ds} + y d\frac{dy}{ds} + z d\frac{dz}{ds}\right) = 0. \tag{3}$$

Cette équation exprime que la normale principale en un point de la courbe d'équilibre est perpendiculaire au rayon vecteur de ce point, c'est-à-dire que *la figure d'équilibre est une ligne géodésique du cône ayant son sommet à l'origine et contenant cette courbe*.

Comme la précédente, cette proposition pouvait se prévoir *a priori*. L'action sur l'élément du fil est normale au cône passant par le fil et ayant son sommet à l'origine; or on sait que le plan osculateur de la figure d'équilibre doit contenir cette force : il est donc normal au cône précédent.

On peut du reste trouver trois intégrales premières des équations (1). Ajoutons, par exemple, la deuxième et la troisième de ces équations, après les avoir multipliées par $-z$, y respectivement. Nous aurons

$$d\left[T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right)\right] + \mu\left(\frac{x\,dr}{r^2} - \frac{dx}{r}\right) = 0,$$

ou, en intégrant,

$$T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\mu x}{r} + \alpha.$$

On aura, par des combinaisons analogues, deux autres intégrales premières qui, jointes à la précédente, constituent le système sui-

vant :

$$(4)\quad \begin{cases} T\left(y\dfrac{dz}{ds} - z\dfrac{dy}{ds}\right) = \mu\dfrac{x}{r} + \alpha, \\ T\left(z\dfrac{dx}{ds} - x\dfrac{dz}{ds}\right) = \mu\dfrac{y}{r} + \beta, \\ T\left(x\dfrac{dy}{ds} - y\dfrac{dx}{ds}\right) = \mu\dfrac{z}{r} + \gamma. \end{cases}$$

Multiplions ces équations par x, y, z respectivement et ajoutons-les. Nous aurons

$$(5)\qquad \mu r + \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

C'est l'équation d'une surface contenant le fil en équilibre. Or cette surface est évidemment un cône de révolution, ayant son sommet à l'origine et d'ailleurs quelconque. On a donc le théorème suivant :

Si un fil flexible et inextensible non pesant traversé par un courant est soumis à l'action du pôle d'un aimant, sa figure d'équilibre sera une ligne géodésique d'un cône de révolution ayant son sommet au pôle de l'aimant.

Il ne nous reste, pour terminer, qu'à indiquer comment, étant données les positions des deux extrémités du fil et sa longueur totale, on déterminera le cône sur lequel il doit se trouver.

Soient A et B les deux extrémités du fil et l la longueur de ce fil; la question revient à construire un cône de révolution connaissant deux de ses génératrices OA, OB et la longueur l de la ligne géodésique qui réunit les deux points A et B.

Voici comment on peut résoudre ce problème. Je suppose le cône inconnu développé sur un quelconque de ses plans tangents. OA sera venu en Oa, OB en Ob et la figure d'équilibre se sera transformée dans la droite ab. On connaît donc les trois côtés du triangle Oab et, par conséquent, l'angle aOb. Ce point étant acquis, on est ramené au problème suivant :

Faire passer par deux droites OA, OB *un cône de révolution tel que, après le développement de ce cône sur un plan, l'angle des droites* AOB *se transforme en un angle de grandeur donnée.*

Soient α, β les points des droites OA, OB à une distance s de l'origine. La sphère ayant son centre au point O coupera le cône suivant un cercle. On connaît, à la fois, l'arc $\alpha\beta$ et la corde $\alpha\beta$ de ce cercle. En effet, l'arc $\alpha\beta$ se transforme dans le développement du cône en un arc de cercle et mesure l'angle que nous avons appelé aOb. La question est donc ramenée à construire un cercle connaissant la longueur d'un de ses arcs et de la corde de cet arc, problème qui conduit à une équation transcendante bien connue.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GUNTHER (S.). — STUDIEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN GEOGRAPHIE. II Heft.

Les Arabes (p. 57-93, 2 *fig.*).

Le deuxième fascicule renferme l'étude spéciale de la doctrine de la sphéricité et du mouvement de la Terre au moyen âge, chez les Arabes et les Hébreux.

La culture scientifique des peuples arabes s'est ressentie nettement de l'influence indienne et de l'influence grecque. Le point de départ des travaux des Arabes a été, en effet, la traduction des écrits de Ptolémée et d'Euclide. Al Birouni nous rapporte que la théorie de Ptolémée devint ainsi familière aux savants astronomes qui illustrèrent la cour du calife de Bagdad Al Mamoun (772 ap. J.-C.).

Un des successeurs de ce calife, le célèbre Abdallah al Mamoun, essaya de donner à ces théories une base plus scientifique, en les mettant mieux d'accord avec celles des anciens Grecs, et il produisit de la sorte, pour l'ensemble des connaissances, un procédé de liaison des plus fructueux.

Au temps même du règne d'Al Mamoun, il faut placer une entreprise scientifique de premier ordre, la mesure d'un arc de méridien. Il nous paraît difficile d'admettre que les Arabes aient voulu procéder d'après la méthode des Grecs. Les noms des géodésiens grecs Ératosthène et Posidonius pouvaient n'être pas bien connus à l'époque des premiers débuts de l'étude de l'Almageste. Le projet d'une mesure directe de la Terre peut donc avoir pris naissance spontanément, ou avoir été inspiré par une tradition indienne.

Le célèbre astronome Mohammed ben Katir al Fergani, que l'on a aussi appelé Alfraganus, paraît avoir vécu à cette époque (812). Cependant les historiens de l'Astronomie ne sont pas d'accord sur sa biographie. On lui doit la mesure d'un arc de méridien terrestre dans les plaines de la Mésopotamie. Regiomontanus l'a mentionnée dans ses Ouvrages.

Arrêtons-nous un moment sur les représentants de la science exacte.

Nous voyons que déjà l'Arabe Alfraganus avait assuré une base plus logique à la notion de la sphéricité. Birnbaum a reconnu que cet astronome ne se contentait pas d'arguments spécieux, mais qu'il lui fallait des données mathématiques : l'égalité parfaite du temps écoulé entre l'apparition des étoiles à l'horizon, leur passage au méridien et leur disparition à l'horizon, leurs mouvements suivant des cercles parallèles, etc. Au Chapitre III, il examine pourquoi la Terre, avec toutes ses régions continentales et marines, est semblable à une sphère. A des preuves positives il en ajoute une indirecte : « Si la Terre était un plan développé, rien de ce que nous disons n'arriverait, et le cours des astres serait identique sur toutes les parties de la Terre. Si un observateur se déplaçait entre le nord et le midi, il ne verrait se coucher aucune des étoiles qui sont toujours visibles, ni se lever aucune de celles qui sont toujours cachées. »

Il est curieux de chercher des preuves positives de la théorie de la sphère chez les Arabes, d'autant plus qu'un passage de Peschel pourrait éveiller quelques doutes. « Seul », dit-il, « Ibn el Ouardi rapporte que la Terre a été supposée tantôt en forme de table, tantôt hémisphérique, ou bien sphérique ou creuse, ou avec un axe de mouvement. » Voyons ce que nous avons à remarquer, réservant pour la suite les hypothèses non compatibles avec la Science.

Nous trouvons une discussion profonde et véritablement scientifique de la sphéricité dans les récits d'Aboul Hha'san Ali, de Maroc, dont Sédillot a fait connaître d'une manière si concluante l'Astronomie pratique. L'Astronomie, dit-il, prouve que les montagnes et vallées n'ont pas d'influence marquée sur la sphéricité de la Terre; que sur la figure de la Terre on peut représenter des hommes debout aux extrémités d'un même diamètre; que deux perpendiculaires à la surface ne peuvent être, à vrai dire, parallèles; qu'enfin des distances mesurées sur la Terre même ressemblent absolument à des arcs de la sphère céleste. La définition qu'il donne de l'horizon est caractéristique et digne de remarque : « En quelque point de la Terre qu'un homme soit placé, il voit la moitié du ciel, à une quantité insensible près, et l'autre moitié lui est cachée, à une quantité près aussi insensible. »

Cette notion, qui reposait sur une base scientifique, paraît avoir

servi à d'autres écrivains arabes, et en particulier à Abou Bekr er Rasi (ou Rhazès), qui a composé un Livre où il est dit nettement que la Terre a une forme sphérique. On retrouve cette notion chez Ibn al Kofti, Ibn Ali Oseibia, Kosta ben Luca et Thabit ben Korra, qui tous affirment l'existence des antipodes. Cependant les Arabes ont généralement admis qu'une partie ou une zone de la Terre était inhabitable. Alfraganus, par exemple, l'appelle la *quatrième zone* et indique les variations du jour et de la nuit en cette région.

Les méthodes de détermination des positions géographiques contribuèrent à donner une notion beaucoup plus nette de la sphéricité. Peschel a fort bien exposé les progrès dont nous sommes redevables à Arzachel, Aboul Hha'san et Al Birouni, et Vasco de Gama apprit d'un navigateur arabe l'emploi du meilleur instrument connu à cette époque pour la détermination des latitudes. Les exigences de la vie civile et religieuse développèrent chez les Arabes l'étude de la mesure du temps, de la gnomonique et de l'orientation de la Kaâba, vers laquelle ils devaient tourner leurs regards. Sédillot nous a laissé une savante et minutieuse étude de tous les progrès accomplis dans cette voie.

Une troisième conséquence de la forme de la Terre a été l'invention d'une méthode de projection, permettant de représenter la surface terrestre sur un plan d'après des règles mathématiques; mais cette méthode de projection n'offre pas grand mérite par elle-même. Les Arabes ont mieux réussi dans la construction des sphères terrestres, comme le montre le Traité de Kosta ben Luca, et dans la représentation géométrique du ciel sur un globe, comme l'a exposé Messala; mais, en Géographie, ils semblent avoir négligé les notions assez précises que les Grecs avaient adoptées.

Nous voyons se former, au xe siècle, une secte arabe philosophique et franc-maçonnique, dont les théories méritent quelque attention au point de vue de la sphéricité de la Terre. Dieterici en a fait un examen détaillé dans deux intéressantes monographies. Les partisans de cette philosophie comparent l'univers, ou le Macrocosme, à un géant humain, à un organisme doué d'individualité. La Terre est de forme sphérique; elle est entourée de l'atmosphère, comme le jaune de l'œuf est entouré de blanc : comparaison qui a été faite également par les Occidentaux. Neuf sphères emboîtées l'une dans l'autre environnent le monde, comme le ferait la pelure d'un oignon.

Cette comparaison, tirée de Ptolémée, est devenue familière à tout l'Orient. La septième sphère est le ciel, dans l'acception du Koran.

Quant à la grandeur de la Terre, elle est basée sur l'évaluation du diamètre à 2167 $\frac{11}{22}$ parasanges, valeur qui n'est pas exactement d'accord avec la mesure du degré par Al Mamoun, en prenant le nombre π donné par Archimède.

Il est intéressant de constater, dès cette époque, la notion d'une conséquence de la sphéricité qui, plus tard, devait passer pour mystérieuse auprès des navigateurs portugais. Bien qu'il ne fût point mathématicien, puisqu'il regardait la Terre comme quadrangulaire, Aboulfeda démontra que, si deux voyageurs partent d'une même localité et suivent des directions opposées, ils constateront, au moment de leur retour au point de départ, une différence de deux jours pleins entre les nombres de jours qu'ils auront passés en route. Les compagnons de Magellan vérifièrent le fait pour la première fois en 1522, mais sans réussir à l'expliquer.

Un Persan de nation, Zakarija ben Mohammed ben Mâhmoud, connu plus généralement sous le nom d'El Kazouini, a rédigé, au XIIIe siècle, une description détaillée du monde connu de son temps. Son Ouvrage, dont il existe une bonne traduction allemande, renferme de précieux matériaux pour l'histoire de la Géographie astronomique. L'auteur se déclare nettement partisan de la sphéricité, mais il en donne une définition beaucoup moins correcte que celle des mathématiciens, et, par suite, son système est défectueux. Sa projection consiste en une série de cordes parallèles qui divisent le cercle en zones, dans lesquelles il suppose que se trouvent les contrées qui répondent à peu près à une même latitude ; mais, à l'échelle de sa carte, l'équateur se trouverait sur la ligne qui joint les points SE et SO.

L'indication des opinions diverses des anciens sur la forme et la situation de la Terre donne à l'auteur le sujet de détails intéressants. « Les uns », dit-il, « ont supposé que la Terre était plane; d'autres, qu'elle avait la forme d'un bouclier, ou d'une grande coupe, ou d'une demi-sphère. » His'âm ben el Hakem admet l'existence d'un socle qui soutient la Terre et l'empêche de tomber : réminiscence de l'ancienne mythologie des Hindous. On y trouve encore l'hypothèse d'une attraction magnétique, qui s'exerce de tous les points de la sphère universelle et agit avec la même intensité sur

la Terre. Kazouini dit aussi que la Terre est située au centre du ciel, et par ce centre il faut, en réalité, entendre la région inférieure; elle est de forme ronde et couverte d'inégalités produites par les montagnes qui s'élèvent à sa surface et par les vallées qui forment des sillons; mais elle ne perd pas pour cela sa forme sphérique si l'on tient compte de toute sa masse.

Dans le Chapitre suivant, qui traite de la grandeur du globe terrestre, Kazouini ne parle que des mesures de Ptolémée et garde le silence au sujet des travaux de ses contemporains.

Les écrits d'un astronome arabe, contemporain de Kazouini, mais un peu plus ancien que lui, renferment des énoncés beaucoup plus précis : nous voulons parler de l'Ouvrage de Schems Eddin Abdallah Mohammed ed Demitschki (ou de Damas). Comme l'orientaliste danois Mehren vient d'en publier une excellente traduction française, il sera intéressant de signaler en particulier le passage où il est question de la Terre : « En général, elle est ronde, avec des inégalités causées par des montagnes qui s'élèvent à sa surface et des bas-fonds qui la creusent, ce qui n'altère pas sa rotondité fondamentale. Elle est située au milieu de la sphère céleste, mais ne peut en aucune manière y être prise en considération, la moindre étoile fixe la surpassant de beaucoup en grandeur. » Parmi les comparaisons que l'auteur emploie pour mieux faire saisir ses démonstrations, il a recours à une hypothèse imaginée plus tard par Maupertuis : « Si l'on perçait la Terre en passant par le centre en ligne droite jusqu'au point opposé, on rencontrerait de l'autre côté des pieds humains; ainsi les habitants de la Chine et ceux de l'Espagne, qui occupent les points extérieurs du diamètre de la Terre, sont antipodes, et le lever du Soleil et de la Lune d'un côté correspond au coucher de l'autre, comme la nuit des uns au jour des autres, et réciproquement. » Si l'image est exacte, la désignation des deux contrées est mal choisie.

La théorie du mouvement de la Terre a compté chez les Arabes de nombreux partisans, bien qu'elle ait rencontré de grandes difficultés pour s'établir à cette époque. Nous avons déjà vu, par Ibn el Ouardi, que plusieurs savants admettaient un axe de mouvement pour la Terre. Le témoignage de Kazouini n'est pas moins probant. « Parmi les anciens, dit-il, se trouvent plusieurs disciples de Pythagore qui affirment que la Terre se meut et tourne circu-

lairement, et que toutes les orbites circulaires, que nous voyons décrire aux étoiles, ne sont autres que le cours apparent de la Terre et n'appartiennent pas en réalité aux étoiles. »

Les philosophes arabes franc-maçons, dont nous avons déjà parlé, ont qualifié de chimérique l'hypothèse du mouvement des planètes de l'ouest vers l'est. Mais ce passage a encore besoin d'être éclairci. Dans le livre de Demitschki, on en trouve un aussi douteux, que Mehren traduit ainsi : « Le Soleil se meut autour de son propre centre, qui n'est pas le centre de la Terre. »

Au reste, nous trouvons encore, dans un ouvrage de M. Sprenger, la preuve intéressante que les Arabes avaient une idée de la doctrine helléno-indienne de la rotation de la Terre. « M. Sédillot », dit-il, « a publié, je crois, divers articles qui démontrent que les Arabes étaient au courant du système d'Astronomie de Copernic; mais voici un extrait du *Hikmat al' Ayn,* de Katîbi (paru vers 1272), qui ne sera pas lu sans intérêt :

« Quelques philosophes », dit Katîbi, « s'imaginent que la Terre se meut vers l'est, et que le lever des corps célestes à l'orient et leur coucher à l'occident doivent être attribués à ce mouvement, et non au mouvement de la sphère céleste, infiniment plus éloignée, et à laquelle ils supposent l'immobilité. Cette idée est une erreur. Je ne puis cependant avancer, comme argument à opposer, que, si tel était le cas, un oiseau dirigeant son vol dans le sens du mouvement de la Terre serait capable de la suivre exactement, parce que le mouvement de la Terre pourrait être beaucoup plus rapide que celui de l'oiseau pour que ce dernier se retrouvât à son point de départ après un jour et une nuit. Un pareil argument n'est pas concluant, parce qu'on pourrait faire valoir que l'atmosphère qui environne la Terre partage son mouvement, de même que l'éther participe au mouvement de la sphère céleste. Mais je n'accepte pas cette théorie, parce que tous les mouvements terrestres s'effectuent suivant une ligne droite, et que, par suite, nous ne pouvons admettre que la Terre doive se mouvoir dans un cercle. Telle est la théorie d'Aristote : il n'y a que les corps célestes qui soient animés du plus parfait mouvement, du mouvement circulaire. »

L'Ouvrage de Katîbi, dont nous avons extrait ce passage remarquable, semble devoir résumer des doctrines philosophiques enseignées chez les Arabes de cette époque.

Il nous reste à examiner maintenant l'évolution de la théorie du second mouvement de la Terre chez les Arabes au moyen âge.

La Science arabe jeta le plus vif éclat dès le début, mais elle avait tout emprunté aux Grecs et aux Hindous. Plus tard, lorsqu'elle eut trouvé une base pour s'établir, elle commença à se modifier. L'exemple le plus intéressant de ce fait nous est donné par la théorie de la trépidation, système qualifié de malheureux par Delambre, qui paraît n'en avoir pas assez apprécié le mérite, et qu'il a jugé trop superficiellement. Ce n'est pas la seule assertion que M. Günther ait relevée dans les écrits de Delambre. Il lui a reproché de n'avoir pas accordé assez d'attention à certains astronomes du moyen âge; mais, en revanche, M. Günther n'a pas négligé de lui rendre justice quand il en a rencontré l'occasion.

Au milieu de ces Arabes qui, animés d'un inconscient pressentiment de la vérité, commençaient à battre en brèche le système de Ptolémée encore en vigueur, nous devons placer au premier rang un Espagnol, nommé Bitrogi ou Alpetragius, né au Maroc, d'après certains auteurs, et qui fut contemporain et disciple d'un philosophe également célèbre, Abou Bekr Ibn Tofeil. Alpetragius mérite une mention toute spéciale dans notre étude, mais nous ne pouvons citer de longs extraits de ses écrits. Voici au moins une courte Notice de Munk qui nous renseigne sur son compte : « Dès le commencement du XIIIe siècle, les astronomes arabes d'Espagne reconnurent ce qu'il y avait d'invraisemblable dans cette hypothèse par laquelle Ptolémée cherche à expliquer certaines anomalies dans le mouvement de diverses planètes. Ibn Badja s'éleva le premier contre l'hypothèse des épicycles, et Ibn Tofeil rejeta à la fois les excentriques et les épicycles.... Un peu plus tard, Abou Is'hak al Bitrodji, ou Alpetragius, essaya de substituer d'autres hypothèses à celle de Ptolémée. » Ce passage est extrait du fameux Traité de Théologie et de Philosophie de Moïse ben Maimon, le *Guide des Égarés,* traduit par Munk.

Les idées d'Alpetragius ont exercé une sérieuse influence sur les savants de son époque. Plusieurs écrivains, entre autres le biographe Baldi, le juif Calo Calonymos, Delambre, Mädler, ont essayé de préciser la portée de ses découvertes.

Le mouvement d'opposition aux théories de Ptolémée ne fut pas universellement suivi. Zarkali se montra zélé partisan de la théorie

de la trépidation des étoiles fixes, tandis qu'Averroès ne fit connaître que des améliorations générales. Mais les tendances à une réforme sont beaucoup plus accentuées dans les écrits de Geber, Maure d'Andalousie, dont le nom arabe est Abou Mohammed Djâber Ibn Aflah. Le plus important Ouvrage d'Astronomie de Geber a été traduit de bonne heure, et il en a été fait de nombreux Commentaires.

Le principal reproche qu'il adresse au système de Ptolémée, c'est d'être obscur et prolixe; mais il ne songe pas à enlever à la Terre son immobilité au centre de l'univers. Il discute le mouvement de deux planètes, Mercure et Vénus, et n'admet pas que Ptolémée les ait fait mouvoir entre le Soleil et la Terre. Il est certain que Ptolémée avait commis une erreur en contestant la possibilité d'assigner une parallaxe à ces deux planètes, et, tandis que Geber en détermine une, Ptolémée est dans le vrai; mais ses conclusions vont beaucoup plus loin, et nous devons reconnaître, par exception, l'opinion de Delambre. « Geber », dit-il, « est donc inattentif et injuste. Sa critique porte entièrement à faux, et le système qu'il embrasse pour les deux planètes est aussi faux que celui de Ptolémée; il a raison seulement quand il soutient, contre l'assertion de Ptolémée, que Vénus peut se trouver sous le rayon visuel mené de la Terre au Soleil. »

Ainsi, bien que Geber ait tenté de réformer ou de détruire le système des Grecs, son projet doit être ramené à des proportions fort modestes.

Parmi les adversaires des théories de Ptolémée, nous devons signaler Ibn Tofeil et surtout un astronome qui paraît avoir joué un rôle très-important, Abou Bekr Ibn al Saïek, contemporain plus âgé que Maimonides, et que l'on peut, suivant toute probabilité, identifier avec Ibn Badja. Maimonides nous a laissé un Commentaire complet des écrits de cet astronome. A côté d'une objection faite par Ibn Badja à la théorie du mouvement de Mercure et de Vénus, on trouve une argumentation contre l'hypothèse des cercles épicycles et excentriques, auxquels il reproche de conduire à une foule d'absurdités. Poursuivant son étude, Maimonides affirme qu'il a appris, par ouï-dire, qu'Ibn Badja avait conçu un système particulier, dans lequel n'entraient plus d'épicycles, mais rien que des excentriques. Mais nous n'avons pas assez d'indications sur ce

sujet. Maimonides revient encore à Ibn Badja. « Tu sais », dit-il, « qu'Abou Bekr Ibn al Saïek, dans son Discours sur la Physique, exprime ce doute : Si Aristote a connu l'excentricité du Soleil, et si, la passant sous silence, il ne s'est préoccupé que de ce qui résulte de l'inclinaison, — l'effet de l'excentricité n'étant point distinct de celui de l'inclinaison, — ou bien s'il ne l'a point connue. » A cette question, Maimonides répond qu'Aristote n'a pas eu la notion de l'excentricité. Mais ce passage pourrait très-bien signifier aussi que le savant auteur Ibn Badja avait rejeté les épicycles de la théorie des planètes et cherché à en expliquer toutes les apparences au moyen d'un double mouvement de la Terre.

Le nom d'un roi chrétien, Alphonse X (1223-1284), marque la fin de l'époque du mouvement de réforme espagnol et musulman. Ce roi encouragea puissamment les sciences mathématiques. Il fut lui-même un des savants astronomes de son époque. Il présida aux travaux d'un congrès scientifique dont il fut le promoteur, et auquel on doit les célèbres Tables Alphonsines. Deux Arabes, Abenragel et Alkabitius, se trouvaient au nombre des membres de ce congrès.

L'analyse que Mädler a faite de l'édition des OEuvres d'Alphonse, publiée par les soins de Rico y Sinobas, facilite l'étude de cette volumineuse compilation. « Parmi les figures qu'elle renferme, la plus digne de remarque se trouve à la page 282. Tandis que toutes les autres donnent des cercles concentriques ou excentriques, celle-là, en particulier, nous montre l'orbite de Mercure sous la forme d'une ellipse dont le petit axe est à peu près les $\frac{9}{11}$ du grand. Toutefois, le Soleil ne se trouve pas figuré au foyer, mais bien au centre de la courbe. L'éditeur Rico y Sinobas note, à ce propos, qu'il faut chercher la cause de cette courbure elliptique dans la déformation hygroscopique que nous observons dans le parchemin des caisses de tambour; mais il est facile de reconnaître l'insuffisance d'une pareille explication. La supposition qu'il en déduit, que Kepler ait pu avoir connaissance de cette figure et avoir été conduit ainsi à ses ellipses, n'est pas moins insoutenable. Kepler ne donne, avec une pleine franchise, autre chose que le résultat, la voie qu'il a suivie pour y arriver, et même la fausse route qu'il avait ouverte au début. Son ellipse est tout autre que celle d'Alphonse, empruntée à Azarquiel, et ce n'était pas à l'orbite de Mercure, mais bien à celle de Mars, qu'il avait appliqué directement ses

recherches, fondées sur les observations de Tycho. Toutefois, cette représentation de l'orbite de Mercure restera toujours comme une preuve curieuse de ce fait, que l'on avait reconnu de bonne heure l'impossibilité de suffire à tous les cas à l'aide des excentriques. »

Azarquiel, dont parle ici Mädler, est inconnu; peut-être serait-ce en réalité Arzachel, qui vivait deux siècles avant Alphonse.

Il est naturel que des efforts isolés, tentés dans le but de dépasser Ptolémée, ne pouvaient produire un effet durable. En résumé, les Tables espagnoles ne se distinguent pas essentiellement des Tables Alexandrines. Alphonse lui-même ne trouva dans les résultats obtenus aucun encouragement répondant aux énormes fatigues et dépenses auxquelles ils avaient donné lieu. Il était persuadé que toute la Science de son temps ne pouvait établir un accord passable entre la théorie et l'observation, mais son titre de roi ne peut l'excuser d'avoir exprimé en ces termes la contrariété que cet insuccès lui fit éprouver : « J'aurais », disait-il, « beaucoup mieux établi que Dieu le système des mouvements célestes. »

Le rôle des Arabes comme précurseurs de Copernic paraît s'être arrêté au temps d'Alphonse de Castille. La fougue religieuse cessa de les exciter, et, depuis, leur esprit est retombé dans une sorte d'engourdissement. Il n'y a donc plus rien à attendre de leur part, et il nous faudra revenir désormais aux peuples de l'Occident.

Les Hébreux (p. 94-127, 6 *fig.*).

L'histoire de la Géographie chez les Hébreux forme le troisième Chapitre de ces intéressantes recherches. Nous allons encore y puiser des renseignements curieux.

Le premier que l'on ait à signaler est donné par le *Baraïtha*, sorte d'encyclopédie scientifique et religieuse qui plus tard fut incorporée au Talmud. Zunz, qui en a fait une analyse comme pour la plupart des Livres hébreux relatifs à la Géographie, nous montre que, dès le IIe siècle de notre ère, les Juifs avaient la notion de la sphéricité de notre planète.

Le second témoignage dans l'ordre chronologique se rencontre dans le Baraïtha d'un certain rabbin Samuel, que l'on a confondu souvent avec le Baraïtha d'Éliéser. Cet Ouvrage a dû être écrit entre les années 776 et 860. Il renferme un exposé très-clair de la

situation des planètes et de l'origine de la durée de l'année. Plusieurs écrivains, entre autres Donolo et Abraham ben Chiija, y ont puisé des indications.

L'Almageste fut considéré par les Juifs et par les Arabes comme Livre fondamental. C'est à lui que toute l'Astronomie orientale emprunta cette comparaison singulière de l'emboîtement des sphères à celui des pelures d'oignon.

Depuis la dispersion des Juifs, Abraham ben Chiija est le premier qui ait conçu un plan systématique d'Astronomie. On n'est pas d'accord sur sa nationalité, espagnole ou française, ni sur l'époque de sa vie, le XIe ou le XIIe siècle. Son Ouvrage intitulé *Zurat ha-arez* (Forme de la Terre) est une Géographie astronomique et une Astronomie en dix Chapitres. Il en existe deux traductions latines, publiées à Bâle en 1546, et dues à Seb. Münster et à Osw. Schreckenfuchs.

Le premier Chapitre renferme l'étude de la forme du ciel et de la Terre, de leurs distances mutuelles, et de la figure du mouvement et de ses particularités. Il débute par la notion de la sphéricité du ciel, qui résulte de l'invariabilité des dimensions apparentes des corps célestes. Si pourtant le Soleil et la Lune semblent plus gros à l'horizon que près du zénith, il faut en chercher la cause dans le fait que la densité variable de l'air détermine une réfraction variable. De là vient, dit-il, qu'une pierre paraît agrandie si on la plonge dans l'eau. Il reproduit l'argumentation classique de la sphéricité générale de notre planète : « On a, comme pour le ciel, attribué à la Terre et à sa qualité une forme sphérique semblable à celle d'un globe. Les montagnes et vallées qui sont à sa surface ne doivent pas nous préoccuper, parce qu'elles n'ont aucune comparaison ni proportion avec la totalité de sa masse. » Il expose, avec plus de détails que ne l'avait fait Alfraganus, les conséquences de la sphéricité de la Terre relatives à l'observation des phases d'une éclipse de Lune. L'auteur examine également ce qui résulterait de l'hypothèse d'une forme plane ou concave.

Le Chapitre VI renferme une description et une classification des climats, ainsi qu'une Carte de l'hémisphère boréal, sur laquelle on retrouve les bizarreries des cartographes arabes; mais la forme générale de l'Afrique est assez fidèlement représentée.

La dernière Partie de l'Ouvrage contient un exposé des mesures

de la grandeur réelle du globe terrestre. A ce sujet, M. Günther emprunte à Wackerbarth une intéressante discussion de ces mesures. Il revient ensuite avec plus d'attention sur la doctrine de la sphéricité chez les Juifs au moyen âge.

Maimonides a considéré la sphéricité comme une qualité qui se comprend par elle-même. « L'univers entier », dit-il, « est sphérique et renferme le globe terrestre, autour duquel se trouvent disposées, en ordre ascendant, des enveloppes sphériques de la matière de l'eau, de l'air, du feu et de l'éther, qui constitue en dernier lieu les corps célestes. »

Le Juif caraïte Jehouda Hadossi publia une théorie analogue dans un Ouvrage paru à Jérusalem en 1149. Il est intéressant d'y observer que l'auteur attribue au firmament une influence magnétique qui retient la Terre au centre de l'univers.

On doit aux Israélites de sérieuses données sur la Géographie et sur la pratique même des observations. Steinschneider signale comme ayant perfectionné et inventé soit des théories, soit des instruments, Ibn Esra et une dizaine d'autres.

Le Juif Esthori ben Mose ha-Parci, contemporain de l'Arabe Aboulfeda, a laissé une description très-minutieuse de la Palestine, qui a été analysée par Zunz.

Un Juif de Tolède, Isaak ben Joussef ben Israël, a publié en 1310 un Traité des éléments de l'univers, dans lequel on trouve une excellente étude de la parallaxe de la Lune.

Le Juif Asarja ben Mose dei Rossi, de Mantoue, compte au nombre des polymathes du XVI[e] siècle. Son Ouvrage le plus important, *Menor Enaijm* (ou le Flambeau), paru en 1573, renferme comme donnée principale un parallèle entre les théories du Talmud et des profanes. Il base ses recherches sur la huitième question du Thamid : Quelle est la plus grande distance, celle entre l'est et l'ouest ou bien celle entre le ciel et la Terre? Il trouve que la première est deux fois plus grande que la seconde. Il rappelle que, dans le livre du Sohar, ainsi que dans le Talmud de Jérusalem et le Midrasch, la Terre est regardée comme sphérique. Misraschi, auteur d'un remarquable Traité d'Arithmétique, a discuté l'assertion d'Asarja dei Rossi relative aux distances dont il vient d'être question.

Un passage du Thamid a donné lieu de croire que les antipodes

se trouvaient nettement indiqués, mais les anciens rabbins n'ont rien su de la sphéricité de la Terre, parce qu'ils n'ont observé que des contradictions dans les témoignages des écrivains profanes. Aristote combat énergiquement la théorie de la forme large et plate; Plutarque expose les théories erronées d'Anaximène, de Leucippe et de Démocrite.

Le rabbin Éliéser comparait la Terre à un portique dont le nord n'était pas couvert. Les rabbins Salomon, Nisim, Josua ben Schoeib admirent comme Éliéser la forme aplatie de notre planète, et cette doctrine rencontra des partisans jusqu'au XIV[e] siècle.

Asarja arrive à parler de l'enfer, c'est-à-dire de ce qui se trouve sous nos pieds, et il propose l'idée reprise dans la suite par Dante et Maupertuis. Il ajoute que l'entrée de l'enfer serait juste aux antipodes de Jérusalem.

Asarja se rallie nettement à la théorie de la sphéricité. Tous les doutes au sujet de la forme ronde de la Terre doivent s'évanouir, dit-il, depuis que les premiers circumnavigateurs espagnols sont revenus de leur expédition, qui les avait conduits jusqu'à nos antipodes.

Nous laisserons ici pour le moment le savant historien, sur les écrits duquel nous sommes loin d'avoir épuisé ce qu'il y avait à dire d'intéressant pour l'histoire de la Géographie, quitte à y revenir ultérieurement.

Nous arrivons à l'histoire des précurseurs de Copernic, et nous constatons que dès le moyen âge la théorie du mouvement de la Terre était représentée chez les Juifs. Dans le cours du XIII[e] siècle parut un Ouvrage dû au rabbin espagnol Schemtob ben Joussef ibn Phalkera. Ce savant a connu, puis rejeté, comme l'Arabe Katibi, la doctrine du mouvement de la Terre, qu'il a regardée comme exemple d'idée faussse.

L'affirmation effective de la rotation est un incontestable titre de gloire pour une secte de la religion juive, la secte des Cabalistes, dont l'œuvre principale est le livre du Sohar, vaste compilation littéraire et astrologique due à plusieurs écrivains. Ce Livre renferme entre autres un passage d'un certain rabbin Hamnuna l'Ancien, qui offre un très-grand intérêt. Zunz en a reproduit le texte hébreu accompagné de la traduction allemande. Le professeur Wackerbarth, d'Upsal, a donné aussi une version qui paraît pré-

férable, parce qu'elle embrasse une plus grande partie du texte original. Hamnuna l'Ancien affirme clairement que la Terre est sphérique de toutes parts et que des hommes s'y trouvent en situation d'antipodes. Les uns voient le Soleil en même temps que d'autres sont plongés dans la nuit. Il existe aussi une localité où le jour est très-long et la nuit très-courte.

La partie linguistique de l'Ouvrage renferme des hypothèses erronées. Mais nous avons vu que, chez les Arabes eux-mêmes, la doctrine de la rotation de la Terre a été connue comme théorie pythagoricienne sans rencontrer de sympathies. Katibi nous offre un exemple de cette inconséquence. En ce qui se rapporte à la théorie du mouvement des planètes, les Juifs se montrèrent généralement partisans des théories de Ptolémée durant le moyen âge. Plus tard, ils essayèrent de règles empiriques qui avaient le mérite de se plier aux exigences du dogme. Le rabbin Gamaliel remarqua fort bien que le mouvement de la Lune était tantôt plus lent, tantôt plus rapide. Hurwitz, qui rapporte ce fait, y voit une preuve que les observateurs avaient évalué la durée du mois lunaire avec une très-grande précision.

En général, les Juifs adoptèrent la théorie des Intelligences qui devaient présider aux mouvements célestes, mais ils lui donnèrent une forme plus pure. La bibliothèque du Vatican renferme un écrit du Juif alexandrin Joussef ben Isaak, où l'auteur attribue le mouvement à une force et à des Intelligences séparées. D'après cela, suivant Munk, il n'y en aurait en tout que neuf, dont la dernière, comme dans la théorie d'Ibn Sinâ ou Avicenne, est l'intellect actif.

Asarja dei Rossi et Maimonides ont fait revivre la théorie pythagoricienne de la musique des sphères. C'est une des opinions anciennes répandues chez les philosophes et la généralité des hommes, dit Maimonides, que le mouvement des sphères célestes fait un grand bruit fort effrayant.

Un examen plus détaillé de ce passage donnerait encore la preuve que l'hypothèse de la musique des sphères a été en réalité perfectionnée, en ce sens que les rabbins supposèrent que le son devenait plus élevé à mesure que la sphère elle-même était plus éloignée et que son mouvement était plus rapide.

Les astronomes hébreux adoptèrent volontiers la théorie de l'Almageste avec ses excentriques et ses épicycles, et ils la suivirent

pour la construction de leurs Tables numériques. Maimonides seul n'a pas cru devoir accepter de confiance les hypothèses à l'aide desquelles on expliquait les mouvements célestes depuis Hipparque et Apollonius.

Au XXIV[e] Chapitre de la deuxième Partie de son *Guide*, Maimonides adresse à l'Arabe espagnol Ibn Badja le reproche d'avoir rejeté les cercles de Ptolémée sans en avoir tiré profit au point de vue philosophique, attendu que la rotation autour du centre immatériel d'un cercle excentrique est une chose incompréhensible. Il exprime cette objection avec emphase : « Et ceci », dit-il, « est une observation qui m'appartient. » Puis, exposant avec détails l'enchaînement des cercles de Ptolémée, il indique les positions respectives des centres des cercles décrits par les planètes supérieures. « Vois, par conséquent », dit-il, « combien toutes ces choses s'éloignent de la spéculation physique. » Il développe ensuite le rôle des sphères homocentriques et conclut à l'impossibilité de se ranger, au point de vue philosophique, à un système aussi compliqué. « Regarde, par conséquent », dit-il, « combien tout cela est obscur ; si ce qu'Aristote dit dans la Science physique est la vérité, il n'y a ni épicycle ni excentrique, et tout tourne autour du centre de la Terre. » Il aperçoit la difficulté qui en résulterait pour l'explication des éclipses, par exemple, mais il ne parvient pas à la résoudre.

Maimonides se trouva ainsi conduit à imaginer un double système, participant à la fois à celui des sphères homocentriques d'Eudoxe et à celui des dix Intelligences d'Aristote.

Ces tentatives n'eurent aucun succès parmi les astronomes, et Maimonides lui-même, qui attaque ici les hypothèses de Ptolémée au point de vue philosophique, n'hésite pas, dans son Traité de la fixation des Néoménies, à les admettre dans toute leur étendue et à les prendre pour bases de ses calculs astronomiques.

Abraham ben Chiija, dont nous avons parlé déjà, rappelle que Ptolémée et ses disciples attribuent aux étoiles fixes un mouvement de circulation sur le firmament, tandis que pour l'École indienne les étoiles sont fixes. La discussion à laquelle il se livre à propos de leurs latitudes par le zodiaque prouve qu'il admettait l'invariabilité de distance des étoiles à l'écliptique. Nous étions primitivement fondés à rapporter cette opinion à la doctrine indienne de la trépidation, qui affecte seulement les latitudes astro-

nomiques, et il demeure acquis maintenant qu'il faut voir, dans les paroles d'Abraham ben Chiija, un dernier écho affaibli de cette doctrine du mouvement de la Terre dont le géomètre hindou Aryabhatta avait conçu le plan.

De toutes ces recherches, nous pouvons conclure que l'opinion des Juifs du moyen âge sur la rotation de la Terre n'a rien emprunté à des étrangers. C'est à ce titre qu'elle méritait d'être appuyée de preuves certaines et de faire l'objet d'une étude spéciale.

H. B.

BILLWILLER (R.). — Kepler als Reformator der Astronomie. Von Robert Billwiller. — Zürich, Druck von Zürcher & Furrer, 1877; 24 p., 1 pl.

Les travaux de spéculation mathématique de Kepler sont universellement connus; la petite brochure dont nous venons de citer le titre considère ce grand esprit sous un nouvel aspect, sous celui de nouveau fondateur de l'Astronomie physique. L'auteur s'occupe principalement et avec détail de l'*hypothesis physica*, de la divination de la loi de l'inertie, de la remarquable théorie du magnétisme céleste et d'autres sujets analogues. Cette Notice peut être, pour le fond, considérée comme un extrait court, mais très-clair, des Ouvrages écrits de main de maître sur le même objet par Apelt, et recommandé à ce titre aux admirateurs du génie de Kepler.

S. Günther.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME II; 1878. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages

Abu Bekr Muhammed ben Alhusein Alkharki. — Hafî fîl hisâb, bearbeitet von Dr Ad. Hochheim 236-237

Albeggiani (L.). — Geometria dello spazio in coordinate tetraedriche secondo i concetti delle *Vorlesungen über Geometrie* di A. Clebsch 12

Alexéief (N.). — *Integrirovanié....* Intégration des équations différentielles. 1re livraison 393-402

Bertini (E.). — Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano 212-213

Bianchi (L.). — Sulle superficie applicabili 211-212

Billwiller (R.). — Kepler als Reformator der Astronomie 452

Bockwoldt (G.). — Ueber die Enneper'schen Flächen mit constantem positivem Krümmungsmaas, bei denen die eine Schaar der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wird 369-370

Bonsdorff (E.). — Härledning och geometrisk tydning af vigtigaste combinanterna i det ternära kubiska formsystemet 7-8

Boussinesq (J.). — Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale 426-433

Bruns (H.). — Die Figur der Erde. Ein Beitrag zur europäischen Gradmessung 265-268

Casorati (F.). — Sui determinanti di funzioni 276-277

Catalan (E.). — Notes d'Algèbre et d'Analyse 237-240

— Sur quelques formules relatives aux intégrales eulériennes 278

Celoria (G.). — Sopra alcuni scandagli del cielo e sulla distribuzione generale delle stelle nello spazio 233-235

Darboux (G.). — Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes, appliquées en des points déterminés d'un corps solide, quand ce corps change de direction dans l'espace 278-281

Pages.
Dostor (G.). — Éléments de la théorie des déterminants 242-244
Du Bois-Reymond (P.). — Zwei Sätze über Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen 13-14
— Ueber die Paradoxen des Infinitarcalculs 26-27
Enneper (A.). — Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien 425-426
Falk (M.). — Bearbetning af några teorier angående differentialeqvationer. 5-6
Frischauf (J.). — Elemente der Geometrie. 2. Auflage 27-29
Genocchi (A.). — Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les Géométries non euclidiennes 207-209
— Intorno all' equazione differenziale del moltiplicatore 277
Gerhardt (C.-I.). — Geschichte der Mathematik 201-206
Gilbert (Ph.). — Cours de Mécanique analytique. Partie élémentaire 14-15
— Cours d'Analyse infinitésimale. Partie élémentaire 244-246
Gomes Teixeira (F.). — Sobre o emprego dos eixos coordenados obliquos na Mecanica analytica 146
Gruey. — Sur le bolide du 14 juin 1877 305-306
Günther (S.). — Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung 145-146
— Studien zur Geschichte der mathematischen und physischen Geographie. Fasc. 1 et 2 .... 402-419 et 437-452
Gyldén (H.). — Framställning af Astronomin i dess historiska utveckling och på dess nuvarande ståndpunkt. — Die Grundlehren der Astronomie nach ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt 55-60
Hall (Asaph). — Observations et orbites des deux satellites de Mars, avec les données pour les éphémérides en 1879 269-270
Haretu (Spiru). — Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires 213-216
Heine (E.). — Handbuch der Kugelfunctionen. Theorie und Anwendungen. I. Bd. 2. Auflage 371-372
Kowalski (M.). — Recherches sur la réfraction astronomique 357-369
Krause (M.). — Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen 20
— Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und ihre Anwendungen auf die Zahlentheorie 21
Levänen (S.). — Integration af några differentialeqvationer af andra ordningen 11-12
Loewy (M.). — Détermination des ascensions droites de culmination lunaire et de longitude; éphémérides de ces étoiles pour 1878 15-17
— Détermination de la latitude d'un lieu par l'observation d'une hauteur de l'étoile polaire 18
— Tables générales de réduction des observations méridiennes 19-20
Lorenzoni (G.). — Giovanni Santini, la sua vita e le sue opere 13
Magnac (A. de). — *Voir* Villarceau (Y.) et de Magnac (A.) 22-24
Mailly (E.). — Essai sur la vie et les Ouvrages de L.-A.-J. Quetelet 240-242
Matthiessen (L.). — Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen 270-272
Mayer (A.). — Geschichte des Princips der kleinsten Action 49-55
Mellberg (H.). — Teorin för determinant-kalkylen 6-7
Mittag-Leffler (G.). — En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska funktionerna 5-11
Paolis (R. de). — Le trasformazioni piane doppie 209-210
Pellet (A.-E.). — Thèses : I. Sur la théorie des équations algébriques. II. Sur la théorie des surfaces 281-284
Périgaud. — Exposé de la méthode de Hansen pour le calcul des perturbations spéciales des petites planètes 97-100

Pages.
PETERSEN (J.). — Beweis eines Lehrsatzes betreffend die Integration algebraischer Differentialausdrücke, beziehungsweise algebraischer Differentialgleichungen unter geschlossener Form........................ 272-274
— Theorie der algebraischen Gleichungen................ 275-276
STURM (R.). — Elementi di Geometria descrittiva. Tradotti da JUNG.......... 206-207
TOEPLITZ (E.). — Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung................. 25-26
VILLARCEAU (Y.) et DE MAGNAC (A.). — Nouvelle navigation astronomique... 22-24
WOLF (R.). — Geschichte der Astronomie............................ 420-425

MÉLANGES.

ANDRÉIEFSKY. — Sur la réduction des intégrales indéfinies................. 246-260
BAILLAUD (B.). — Sur la méthode de Hansen pour la détermination des perturbations absolues des petites planètes............................ 261-263
— Sur une transformation trigonométrique employée par Hansen dans la théorie des perturbations.. 292-298
DARBOUX (G.). — Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré.................... 60-96, 123-144 et 151-200
— Sur un problème de Géométrie élémentaire........... 298-304
— Sur le mouvement d'une figure invariable; propriétés relatives aux aires, aux arcs des courbes décrites et aux volumes des surfaces trajectoires... 333-366
— Problèmes de Mécanique.. 433-436
DEWULF (ED.). — Essai d'une théorie géométrique des polaires inclinées. Ire *Partie*............. .. .. 41-48 et 372-392
ELLIOT. — Sur les points d'inflexion des courbes algébriques.............. 216-232
GAILLOT. — Le Verrier et son œuvre 29-40
LIGUINE (V.). — Sur les aires des trajectoires décrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable................................. 306-333
RAYET (G.). — Résultat des observations du passage de Vénus recueillies dans les stations anglaises.................................... .. 147-151
SABININE (M.-G.). — Développements analytiques pour servir à compléter la discussion de la variation seconde des intégrales définies multiples... 100-123
— Sur l'intégration des équations différentielles par les séries............ 284-292

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME II.

Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel,* Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

4638 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME II. — ANNÉE 1878.

(TOME XIII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1878

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK; gegründet von J.-A. GRUNERT, fortgesetzt von R. HOPPE (¹).

Tome LXI; 1877-1878.

Zahradník (*K.*). — Courbes planes rationnelles du troisième ordre. (*Fin*). (1-18).

Voir *Archiv*, LVIII, 23; *Bulletin*, XI, 217.

Application au folium de Descartes. Sécante et tangente. Conique d'involution. Normale, développée. Quadrature. Construction du folium. — Application à la strophoïde. Sécante et tangente. Normale, développée. Intersection avec un cercle. Cercle de courbure, développée. Quadrature. Construction de la strophoïde.

Naegelsbach (*Hans*). — Études sur la nouvelle méthode de Fürstenau, pour la représentation et le calcul des racines des équa-

---

(¹) Voir *Bulletin*, I (2ᵉ série, II), 159.

tions algébriques au moyen des déterminants des coefficients. (*Suite*). (19-85).

Voir *Archiv*, LIX, 147; *Bulletin*, I_2, 160.

Hoppe (*R.*). — Sur les triangles et les tétraèdres rationnels. (86-98).

Fischer (*F.-W.*). — Sur un instrument simple pour la mesure des angles, à l'usage des écoles. (99-107).

Hoza (*F.*). — Description d'un modèle pour le premier enseignement de la Goniométrie. (108-110).

Meutzner (*P.*). — Sur un théorème de Steiner. (111).

Hoppe (*R.*). — Relation entre les sytèmes de coefficients orthogonaux. (111-112).

Koppe. — Illustration géométrique du théorème du binôme. (113-121).

Extension d'une méthode élémentaire pour le développement des transcendantes les plus simples, publiée par Schellbach dans le t. XVII du *Journal de Crelle*.

Siebel (*A.*). — Recherches sur les équations algébriques. (6e article). (122-143).

Voir *Archiv*, LX, 138; *Bulletin*, I_2, 163.

Étude spéciale du problème d'approximation. — (A). Représentation des racines par des séries de puissances. — (B). Expression de x en fonction de a.

Appell (*P.*) — Sur les lignes asymptotiques de la surface représentée par l'équation $XYZ = T^3$. (144-145; fr.).

Hoppe (*R.*). — Sur la cinématique de l'œil. (146-159).

§ 1. Changement direct général de position par une rotation. — § 2. Dépendance entre la position de l'œil et la direction de la vision. — § 3. Mouvement de l'œil poursuivant une ligne droite. — § 4. Rotation conduisant l'œil d'une position à une autre. — § 5. Mouvements spéciaux de l'œil.

Dostor (*G.*). — Propriétés nouvelles de la tangente et de la normale aux courbes du second degré. (160-171; fr.).

Dostor (*G.*). — Propositions sur les coniques. (171-176; fr.).

Hain (*Em.*). — Le point des transversales parallèles égales. (177-182).

Hain (*Em.*). — Droite correspondante isogonalement au triangle. (182-184).

Nell. — Sur l'interpolation. (185-217).

Étude sur les moyens de réduire l'étendue des Tables numériques, en facilitant l'interpolation par des formules convenables. Applications : 1° à la Table des fonctions $\Lambda(p) = p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2})$; 2° à la Table des logarithmes naturels; 3° à la Table des valeurs logarithmiques de la fonction Γ; 4° à la recherche de x, connaissant $\Gamma(x)$; 5° à la Table qui donne $\log(1-x)$, connaissant x.

Hoza (*F.*). — Note sur les tangentes conjuguées. (218-220).

Zahradník (*K.*). — Lieu des points correspondant à une corde de contact constante par rapport à une conique. (220-224).

Hoppe (*R.*). — Sommation d'une série. (224).

Greiner (*M.*). — Sur le triangle. (225-263).

L'auteur s'occupe particulièrement des cercles inscrits et du cercle circonscrit au triangle, et des propriétés de quelques points remarquables du triangle, en considérant surtout les théorèmes relatifs au pôle et à la polaire du triangle.

Hoppe (*R.*). — Déplacement du sommet de l'orbite d'un pendule de petit écart, avec application au pendule de Foucault. (264-269).

Hoppe (*R.*). — Premiers théorèmes sur les intégrales définies, développés indépendamment de la notion de différentielle. (270-285).

L'établissement de la théorie des intégrales définies indépendamment de la notion de différentielle est surtout important pour l'étude du théorème de Fourier. M. J. Thomae a repris, à ce point de vue, l'exposition des principes dans son Mémoire intitulé : *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale*. M. Hoppe a cru devoir traiter de nouveau ce sujet, d'abord parce que, dans le travail de M. Thomae, la représentation de l'intégrale comme limite de somme introduit dans le calcul des éléments superflus, et n'a pas par conséquent toute la simplicité possible. Ensuite, M. Thomae, au milieu de la suite de ses théorèmes, invoque sans nécessité la notion de différentielle, ce qui obscurcit l'enchaînement logique.

Weber (*L.*). — Sur la théorie de l'induction magnétique. (286-320).

Strnad (*A.*). — Sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques. (321-323).

Hoppe (*R.*). — Sur les notations. (323-328).

Spitzer (*S.*). — Détermination de l'aire des courbes données par l'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1$, m étant un nombre entier et positif. — Détermination du volume des surfaces données par l'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2m} = 1$, m étant un nombre entier et positif. (329-332).

Dobiński (*G.*). — Sommation de la série $\sum \frac{n^m}{n!}$ pour m égal à 1, 2, 3, 4, 5, ... (333-336).

Klekler (*K.*). — Nouvelle méthode pour la résolution de l'angle trièdre. (337-343).

Meutzner (*P.*). — Sur la théorie du coin. (344-350).

Čubr (*E.*). — Surfaces coniques du second degré ayant un axe de symptose. (351-358).

Appell (*P.*). — Sur une représentation des points imaginaires en Géométrie plane. (359-360; fr.).

Klug (*L.*). — Sur les sphères qui touchent les faces d'un tétraèdre. (361-365).

Genocchi (*A.*). — Éclaircissements sur une Note relative à la fonction $\log \Gamma x$. (366-384; fr.).

I. Formule de Nicole. — II. Formule de Lagrange et formule de Binet. — III. Convergence de la série de Binet. Évanouissement pour x infini. — IV. Factorielle de Gauss. Détermination de la quantité C. — V. Observation sur les valeurs infinies de la variable. — VI. Généralisation de la série de Binet.

Mack. — Sur les cercles de courbure de la parabole. Nouveaux principes pour leur théorie, et développements correspondants. (385-406).

Dostor (*G.*). — Recherche des systèmes de deux polygones réguliers étoilés, inscrits dans le même cercle, qui sont tels que la surface de l'un soit double de la surface de l'autre. (407-409; fr.).

Hoppe (*R.*). — Un problème de probabilité. (410-416).

Sur une ligne finie sont situés n points. Quelle est la probabilité qu'un segment de longueur donnée, pris sur cette ligne, ne contiendra aucun de ces points?

Hain (*Em.*). — Recherches sur le triangle. (417-426).

I. Propriétés du cercle circonscrit. — II. La conique des deux points de Steiner. — III. Sur le cercle polaire.

Külp (*L.*). — Expérience d'influence magnétique. (427-433).

Dobiński (*G.*). — Produits de quelques suites de facteurs. (434-438).

Hoppe (*R.*). — Expression la plus générale des cosinus de direction d'une droite en fractions rationnelles. (438-439).

Hoppe (*R.*). — Détermination des polygones au moyen des angles compris entre les côtés et les diagonales. (439-444).

I. Énumération des relations angulaires. — II. Relation transcendante du quadrilatère. — III. Application au polygone.

Sýkora (*A.*). — Théorème nouveau sur les coniques. — Sommation de deux séries. — Décomposition d'un nombre en une différence de deux carrés. — Nouvelle démonstration du théorème de Pythagore. (444-448).

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, diretti dal prof. F. BRIOSCHI, colla cooperazione dei professori L. CREMONA, E. BETTI, F. CASORATI ed E. BELTRAMI. Serie II [1].

Tome VIII; 1877.

Christoffel (*E.-B.*). — Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues. (1-10; fr.).

Bertini (*E.*). — Sur une classe de transformations univoques involutives. (11-23, et 146).

Brioschi (*F.*). — Sur une classe de formes binaires. (24-42).

Clebsch (*A.*), traduit avec Notes et Additions, par *F. Brioschi*. — Sur la théorie des formes binaires du sixième ordre et la trisec-

[1] Voir *Bulletin*, I_2, 1.

tion des fonctions hyperelliptiques. (*Suite et fin*). (43-55, et 146-158).

Lucas (*Éd.*). — Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler. (56-79; fr.).

§ 1. Lemmes préliminaires sur l'emploi des symboles. — § 2. Sur la sommation des puissances semblables des nombres naturels. — § 3. Sur les nombres de Bernoulli. — § 4. De la somme des puissances alternées des nombres naturels. — § 5. De la somme des puissances semblables des nombres impairs. — § 6. De la somme des puissances alternées des nombres impairs. — § 7. Relations mutuelles entre les nombres B, P, R, E et les intégrales définies correspondantes.

Christoffel (*E.-B.*) — Recherches sur les discontinuités compatibles avec l'existence des équations linéaires aux différentielles partielles. (81-112; all.).

I. Les conditions mécaniques du choc entre deux particules de fluide. — II. Les discontinuités compatibles avec l'existence des équations aux différentielles partielles. — III. Réflexion du choc sur des parois rigides de forme quelconque.

Geiser (*C.-F.*). — Sur l'équation quadratique dont dépendent les axes principaux d'une conique dans l'espace. (113-120; all.).

Dini (*U.*) — Sur certaines fonctions qui, dans tout un intervalle, n'ont jamais de dérivée. (121-137.).

Betti (*E.*) — Sur les systèmes triples de surfaces isothermes et orthogonales. (138-145).

Dini (*U.*). — Sur la représentation géographique d'une surface sur une autre. (161-186).

Lucas (*Éd.*). — Formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique. (187-192; fr.).

Christoffel (*E.-B.*). — Sur la propagation des chocs par les corps solides élastiques. (193-243; all.).

I. Les conditions complètes des mouvements à l'intérieur d'un corps solide élastique. — II. La propagation des discontinuités à l'intérieur d'un corps élastique. — III. La surface de discontinuité Σ et le système de rayons correspondant. — IV. Les discontinuités compatibles avec les équations aux différentielles partielles (*d*). — V. Sur la modification des discontinuités à la surface de séparation de deux milieux.

Bertini (*E.*). — Recherches sur les transformations univoques involutives dans le plan. (244-286).

§ 1. Réduction de certains systèmes linéaires à d'autres d'ordre inférieur par des

transformations quadratiques. — § 2. Systèmes linéaires correspondants à eux-mêmes dans les transformations involutives. — § 3. Transformations involutives pour lesquelles un (au moins) des α_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, h$) est l'unité. — § 4. Transformations involutives pour lesquelles un (au moins) des α_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, h$) est 2. — § 5. Transformations involutives pour lesquelles un (au moins) des α_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, h$) est 3. — § 6. Transformations involutives pour lesquelles il existe un système [L] de courbes unies ($\alpha_{ii} > 3$). — Appendice.

Hirst (*T.-A.*). — Note sur la corrélation de deux plans. (287-300; angl.).

Voir *Annali*, VI, 260; *Bulletin*, I_2, 6.

Introduction. — Corrélations satisfaisant à six conditions. — Corrélations centrales et axiales satisfaisant à six conditions élémentaires. — Corrélations axiales (ou centrales) satisfaisant à sept conditions élémentaires. — Corrélations ordinaires satisfaisant à huit conditions élémentaires.

Betti (*E.*). — Sur le mouvement d'un système d'un nombre quelconque de points qui s'attirent ou se repoussent mutuellement. (301-311).

Jonquières (*E. de*). — Note sur quelques théorèmes fondamentaux dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques, et sur une loi générale d'où l'on peut les faire dériver. (312-328; fr.).

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON (¹).

Tome XXXVII; novembre 1876 à juin 1877.

Lindsay (Lord). — Note sur une méthode propre à donner un mouvement équatorial à une lunette montée sur un pied altazimutal. (1-2).

Il suffit de relier par une barre rigide l'extrémité objective de la lunette à un point de la table sur laquelle le pied altazimutal est posé, choisi de telle sorte que la ligne qui joint ce point au centre des mouvements soit inclinée sur l'horizon d'un angle égal à la latitude du lieu.

(¹) Voir *Bulletin*, II, 149; III, 245; V, 103; VI, 299; VII, 15, 53; IX, 9, 107, 267; X, 37, 86; XI, 149, 194.

Thornthwaite (*W.-H.*). — Description d'un oculaire disposé pour la vision binoculaire des images d'un télescope à miroir. (3-4).

L'emploi d'une glace parallèle faiblement argentée et inclinée à 45 degrés permet de séparer en deux parties le faisceau lumineux convergent issu du miroir; on a alors deux images focales distinctes.

Langley (*S.-P.*). — Note sur la mesure directe de l'effet produit sur les climats par les taches solaires. (5-11).

En 1873 et 1874, M. Langley, dont l'observatoire était alors dans les Alleghanis, a fait, en promenant une pile thermo-électrique très-étroite dans une image du Soleil, amplifiée jusqu'à avoir 3 pieds de diamètre, de nombreuses expériences propres à comparer les pouvoirs émissifs de la photosphère, de la pénombre et du noyau d'une tache. Il a trouvé que, si l'on représente par 1 le pouvoir calorifique de la photosphère, le pouvoir émissif de la pénombre est 0,80, et celui du noyau 0,54. Tenant alors compte, d'après les mesures de M. W. de la Rue, de la grandeur relative de la surface solaire obscurcie par les taches à l'époque du maximum ou du minimum, M. Langley montre que la variation périodique des taches solaires ne peut changer que de 0°,29 la température moyenne d'un point de la Terre.

Tebbutt (*J.*). — Observation de l'éclipse de Soleil du 17 septembre 1876 à Windsor (N. S. W). (11-12).

Arcimis (*A.-T.*). — Observation de l'éclipse lunaire du 3 septembre 1876, faite à Cadix. (12-13).

Copeland (*R.*). — Observations de petites planètes, faites en 1875 au cercle méridien de Dunsink (Dublin). (14-15).

Finlay (*W.-H.*). — Note sur la formule à employer pour corriger de l'erreur des éléments adoptés le temps d'une occultation observée. (16-18).

Christie (*W.-H.-M.*). — Effet produit par l'usure sur la vis micrométrique du cercle des passages de Greenwich. (18-22).

Après avoir constaté l'existence de l'usure et mesuré les changements ainsi produits de 1868 à 1875 dans la valeur du pas, M. Christie conclut à la nécessité d'un examen périodique des vis micrométriques.

Christie et *Maudauer*. — Observations spectroscopiques sur le mouvement des étoiles dans la direction de la ligne de visée. (22-36).

Penrose (*F.-C.*). — Simplification de la méthode employée pour

tenir compte de la figure de la Terre dans la réduction des observations de la Lune. (37-40).

Williams (*W.-Mattieu*). — Réflexions sur les observations de M. Langley sur le pouvoir rayonnant des taches solaires. (41-42).

Christie et *Maudauer*. — Mesure spectroscopique de la rotation de Jupiter et du Soleil. (43-44).

Stone (*E.-J.*). — Note sur quelques phénomènes observés en 1769 et en 1874 lors des contacts internes de Vénus et du Soleil. (45-55).

M. Stone, qui, il y a quelques années, a déjà consacré un important Mémoire à une discussion nouvelle du passage de 1769, montre que les phénomènes de la goutte noire, du pont, etc., signalés par les anciens astronomes, ont été également aperçus dans les observations récentes; il faudra par conséquent corriger les instants des contacts intérieurs donnés par les observations de 1874 d'une quantité variable pour chacun d'eux avant de pouvoir les faire entrer dans le système des formules qui donnent ensuite la valeur de la parallaxe solaire.

Perry (*S.-J.*). — Note sur les expériences faites par M. André en vue de l'étude des phénomènes de diffraction dans les instruments astronomiques. (56-61).

M. André a lui-même analysé dans le *Bulletin* (I_1, 64) l'ensemble de ses recherches, ce qui rend inutile le résumé de l'étude qu'en donne le R. P. Perry.

Marth (*A.*). — Note sur l'orbite de α du Centaure. (61-64).

Wilson (*J.-M.*) et *Gledhill* (*J.*). — Liste préliminaire d'étoiles binaires ou d'étoiles doubles intéressantes. (64-77).

Le but de MM. Wilson et Gledhill est de signaler aux astronomes une série de 422 étoiles doubles ou binaires qui n'ont point été observées dans les dernières années et dont le véritable caractère n'est pas encore connu.

Darwin (*G.-H.*). — Note sur une erreur commise par Laplace dans la *Mécanique céleste* et sur la densité intérieure des planètes. (77-89).

M. Darwin montre que l'hypothèse faite par Laplace sur la loi de variation de la pression hydrostatique à l'intérieur de la Terre, hypothèse d'où il déduit la figure de notre globe, n'est applicable ni à Jupiter ni à Saturne : Jupiter doit être beaucoup plus dense à l'intérieur qu'à la surface, et il ne semble pas invraisemblable de supposer que la planète est formée d'un noyau central très-dense, enveloppé par une matière semi-nébuleuse sans surface bien limitée ; ainsi serait expliquée l'apparence nuageuse du disque. Saturne aurait probablement une constitution analogue.

Neison (*E.*). — Note sur le point le plus brillant du disque de Vénus. (89-90).

Christie (*W.-H.-M.*). — Note sur la gradation de la lumière à la surface du disque de Vénus. (90-91).

Cayley (*A.*). — Sur la Trigonométrie sphéroïdique.

Harkness (*W.*). — Théorie du photohéliographe horizontal. (93-95).

Le Mémoire de M. Harkness doit être publié ultérieurement dans les Mémoires de la Société Astronomique, et son analyse est très-incomplète.

Knott (*G.*). — Mesures micrométriques d'étoiles doubles. (95-96).

Les observations de M. Knott seront imprimées *in extenso* dans les Mémoires; elles ont été faites, de 1860 à 1873, à Woodcroft, avec un objectif de $7\frac{1}{3}$ pouces d'Alvan Clark, ayant appartenu à M. W.-R. Dawes.

Hind (*J.-R.*). — Sur l'orbite de α du Centaure. (96-98).

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites d'Uranus pour 1877. (98-101).

Plummer (*J.-I.*). — Sur la conjonction de Vénus et de λ Gémeaux. (101-105).

Les observations faites à Orwell-Park par M. Plummer sont des mesures de différences de déclinaison entre Vénus et λ Gémeaux; elles ont été faites dans l'espérance que leur comparaison avec des observations analogues de l'hémisphère austral donnerait une valeur directe de la parallaxe de la planète.

Denning (*W.-F.*). — Observations d'étoiles filantes faites à Bristol d'avril à décembre 1876. (105-115).

Airy (*G.-B.*). — Occultations d'étoiles et éclipses des satellites de Jupiter observées à Greenwich en 1876. (116-117).

Airy (*G.-B.*). — Étoiles à observer en même temps que Mars pendant l'opposition de 1877. (117-121).

Abbe (*Cleveland*). — Note sur les observations d'étoiles doubles faites par Mitchel à Cincinnati de 1845 à 1848. (121-124).

Lassell (*W.*). — Sur le pouvoir pénétrant de ses miroirs de 2 et 4 pieds. (124-126).

Le pouvoir pénétrant du télescope de 2 pieds est supérieur à celui des équato-

riaux de Poulkova et de Harvard College; quant au télescope de 4 pieds, son pouvoir éclairant et son pouvoir pénétrant sont très-supérieurs à ceux du précédent.

Brett (*J.*). — L'hypothèse de la réflexion spéculaire et son application au passage de Vénus. (126-127).

Erck (*Wentworth*). — Sur une nouvelle méthode d'observation du Soleil. (128).

Réunion annuelle de la Société Astronomique. (129-130).

Le nombre des membres de la Société Astronomique est de 620; ses recettes se sont, en 1876, élevées à 53650 francs.

Le volume XLI des Mémoires contenant les travaux relatifs aux éclipses de Soleil de 1868 à 1874 a enfin été publié.

Dans sa réunion du 9 février, la Société a reçu communication des rapports sur les travaux faits en 1876 dans les observatoires de Greenwich, de Radcliffe (Oxford), de l'Université d'Oxford, de Cambridge, de Dunsink (Dublin), Édimbourg, Glasgow, Kew, Liverpool, Rugby, Stonyhurst, Cap de Bonne-Espérance, Melbourne, etc.

Holden (*E.-S.*). — Nébuleuse d'Orion. (231-232).

M. Holden, qui étudie avec le 26 pouces de Washington la nébuleuse d'Orion, prie les astronomes de lui adresser les dessins de cette nébuleuse qu'ils peuvent avoir dans leurs mains.

Stone (*E.-J.*). — Note sur l'éclat des étoiles considéré comme une indication de leur distance à la Terre. (232-237).

M. Stone se propose de démontrer qu'une augmentation de distance à la Terre suffit pour expliquer l'accroissement rapide du nombre des étoiles à mesure que leur éclat diminue. Supposons, dit-il, que parmi les étoiles qui nous entourent il y en a de n différents degrés d'éclat absolu, et que, sur une surface donnée, toutes ces différentes classes d'étoiles se rencontrent dans une proportion déterminée. Puisque les étoiles, classées d'après leur éclat, forment une suite discontinue, nous pouvons aussi admettre qu'elles sont placées sur des sphères différentes de rayons croissants dans une proportion telle que, en passant de l'une à l'autre, l'éclat d'une même étoile diminuerait d'une unité. Avec ces hypothèses, on peut facilement trouver la formule qui représentera le nombre d'étoiles d'une grandeur quelconque visibles dans une région déterminée du ciel, et cette formule sera susceptible d'être traduite en nombres, si l'on emprunte à Herschel ou à Carrington le facteur numérique qui représente la décroissance d'éclat des étoiles en passant d'une classe à la suivante.

Les nombres ainsi obtenus par M. Stone s'accordent d'une manière très-satisfaisante avec les nombres donnés par Argelander pour le nombre des étoiles des divers ordres.

Newcomb (*S.*). — Sur les observations de contact des limbes de Vénus ou de Mercure avec le bord du disque solaire. (237-241).

De nombreuses observations faites avec un appareil reproduisant artificiellement

les passages d'une planète devant le Soleil, M. Newcomb conclut qu'on peut observer d'une manière voisine de l'exactitude les phases suivantes :

1° L'instant où la coche produite par Vénus avançant sur le Soleil devient visible;

2° L'instant où la lumière du Soleil se montre tout autour de la planète;

3° A la sortie, l'instant où la planète coupe pour la première fois le limbe du Soleil, et où l'espace joignant le limbe de la planète avec le ciel devient aussi noir que la planète elle-même;

4° Le temps où le dernier bord de Vénus quittant le Soleil disparaît à la vue.

Marth (*A.*). — Éphéméride pour l'observation physique de Jupiter en 1877. (241-243).

Hind (*J.-R.*). — Sur deux anciennes occultations de planètes qui ont été observées par les Chinois. (243-245).

Airy (*G.-B.*). — Note sur la théorie de la Lune. (245-246).

Neison (*E.*). — Sur les perturbations produites par Jupiter dans les mouvements de la Lune. (248-249).

Tupman (*G.-A.*). — Corrections aux positions de la Lune données dans le *Nautical Almanac* pour la période voisine de la date du passage de Vénus. (249-259).

Ces corrections, données pour la période comprise entre le 7 septembre 1874 et le 8 octobre 1874, sont déduites des observations de Greenwich, Paris, Königsberg, Strasbourg et Oxford.

Arcimis (*A.-T.*). — Note sur la visibilité de la portion non éclairée du disque de Vénus. (259).

Arcimis (*A.-T.*). — Éclipses des satellites de Jupiter et occultations d'étoiles observées à Cadix en 1876. (259-261).

Penrose (*F.-C.*) et *Perry* (*S.-J.*). — Note sur l'éclipse totale de Lune du 27 février 1877. (262-263).

Gasparis (*A. de*). — Sur la résolution du problème de Kepler. (263-265).

Le savant directeur de l'Observatoire de Naples indique un procédé qui permet d'arriver, par un petit nombre d'essais rapides, à la solution très-approchée de l'équation $M = E - e'' \sin E$.

Ball (*R.-S.*). — Sur une transformation des équations de Lagrange pour le mouvement des corps. (265-271).

Royston-Pigott. — Sur la photographie des passages du Soleil. (271-277).

Abney (*W. de W.*). — Effet produit par la rotation d'une étoile sur son spectre. (278-279).

Les lignes noires du spectre doivent devenir diffuses.

Knott (*G.*). — Sur l'étoile variable *u* des Gémeaux. (279).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double 62 de la 1re classe du catalogue de W. Herschel. (280).

Tebbutt (*J.*). — Note sur la grandeur de η d'Argo. (280-281).

Backhouse (*J.-W.*). — Observations sur la nomenclature des points radiants. (281-282).

Campbell (*W.-M.*). — Note sur son équation personnelle. (283-284).

L'équation personnelle est différente suivant que l'étoile se meut dans le champ de droite à gauche ou de gauche à droite.

Todd (*C.*). — Éclipses des satellites de Jupiter observées en 1876 à l'Observatoire d'Adélaïde. (284-300).

Marth (*A.*). — Éphéméride pour l'observation physique de Mars pendant l'opposition de 1877. (301-307).

Lindsay et Gill (*D.*). — Observations héliométriques de Junon, faites à Dun-Echt en novembre 1876 pour déterminer la parallaxe diurne de cette planète. (308-309).

Les observations donnent pour parallaxe du Soleil 8″,81.

Gill (*D.*). — Projet d'une expédition pour l'observation de la prochaine opposition de Mars. (310-326).

M. Gill propose d'envoyer à l'île de l'Ascension un astronome qui observerait à l'héliomètre la distance de la planète à des étoiles convenablement choisies; la méthode, étant la même que celle qui a été appliquée à Junon, donnerait sans doute d'aussi bons résultats.

Gill (*D.*). — L'opposition d'Ariane (43) en 1877 considérée comme un moyen de déterminer la parallaxe solaire. (327-333).

Stephan (*E.*). — Nébuleuses nouvelles découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (334-339).

Les nébuleuses de ce nouveau catalogue sont au nombre de 60.

Main (*R.*). — Occultations d'étoiles et éclipses des satellites de Jupiter, observées en 1875, 1876 et 1877 à l'Observatoire de Radcliffe (Oxford). (340-346).

Perry (*S.-J.*), *Rand Capron* (*J.*). — Note sur leur recherche infructueuse de la planète Vulcain. (347-349).

Denning (*W.-F.*). — Détermination de la position des points radiants d'après les observations faites en 1869-71 par le capitaine Tupman. (349-352).

Tupman (*G.-L.*). — Note sur le grand météore du 17 mars 1877. (353-354).

Ce météore a été observé le 17 mars vers 10 heures du matin dans les comtés ouest d'Angleterre; il se mouvait avec une vitesse d'environ 19 milles par seconde, dans une orbite parabolique.

Pritchard (*C.*). — Note sur deux solutions mécaniques du problème de Kepler. (354-358).

Les solutions de l'équation $M = u - e'' \sin u$, à l'aide des instruments fort ingénieux décrits par M. Pritchard, ne peuvent être approchées que si les appareils ont de grandes dimensions, et les calculateurs préféreront peut-être le procédé indiqué dans ce même volume par M. A. de Gasparis.

Neison (*E.*). — Sur l'inégalité dans la longitude de la Lune découverte par le professeur Newcomb. (358-359).

Winnecke. — Découverte de la comète 1877, II, faite à Strasbourg le 5 avril 1877. (359-360).

Pritchard (*C.*). — Note sur les comètes de 1877. (360-361).

Struve (*O.*). — Sur une remarquable déviation de la verticale observée en Crimée par M. Kortazzi. (362).

Airy (*G.-B.*). — Extrait de diverses lettres sur Vulcain. (363).

Howlett (*F.*). — Note sur six dessins du Soleil. (364-365).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Solution du problème de Kepler par les fonctions elliptiques. (366-386).

Angot (*A.*). — Étude sur les images photographiques obtenues au foyer des lunettes astronomiques et application de la Photographie à l'observation du passage de Vénus. (387-398).

Downing (*A.-W.*). — Détermination du demi-diamètre de Vénus à la moyenne distance du Soleil à la Terre. (398-399).

Par la discussion faite à l'instrument des passages de Washington de 1866 à 1872, M. Downing trouve, pour le demi-diamètre de Vénus, 8″,3693.

Arcimis (*A.-T.*). — Observation de l'éclipse de Lune faite à Cadix le 27 février 1877. (406).

Shadwell (vice-amiral *C.*). — Table propre à faciliter le calcul du temps moyen équinoxial pour les années comprises entre 1876 et la fin du siècle. (401-403).

Penrose (*F.-C.*). — Description d'un diagramme propre à faciliter la résolution graphique des triangles sphériques. (403-409).

De Boë. — Méthode pour détruire les vibrations d'un bain de mercure. (409-410).

Meigs (*M.-C.*). — Méthode de fabrication d'un pendule oscillant suivant un arc de cycloïde. (410-411).

Gill (*D.*). — Note sur l'opposition de Melpomène considérée au point de vue de la détermination de la parallaxe du Soleil. (412-422).

Proctor (*R.-A.*). — Sur la prochaine opposition de Mars. (423).

Proctor (*R.-A.*). — Note sur la distribution des étoiles. (424-425).

Johnson (*S.-J.*). — Table des passages de Mercure visibles à Greenwich jusqu'en l'an 2000. (425-426).

Les seuls passages complétement observables seront ceux des :

12 novembre 1907;
6 novembre 1914;
10 mai 1937;
9 novembre 1973.

Dreyer (*J.-L.-E.*). — Note sur les nébuleuses nouvelles découvertes par M. E. Stephan. (427-428).

Newcomb (*S.*). — Note sur les inégalités nouvelles de la longitude de la Lune indiquées par M. Neison. (428-430).

Lindsay. — Sur les spectres des comètes 1877, II, et 1877, III. (430).

La ligne jaune du spectre de la comète 1877, II, a pu être divisée en trois bandes. La position des bandes est loin d'être identique dans les deux spectres; ainsi l'on a, pour leurs longueurs d'onde :

	Comète 1877, II.	Comète 1877, III.
1re bande	555	528
2e bande	516	508
3e bande	472	468

Copeland (*R.*). — Note sur deux dépressions du bord de la Lune. (432-433).

Tebbutt. — Occultations observées à Windsor (N. S. W.) en 1876. (434).

Ellery (*R.-J.-L.*). — Observations de l'étoile double α Centaure, de 1863 à 1877. (435-436).

Plummer (*J.-J.*). — Sur l'éclat et la distribution des étoiles. (436-439).

Zenger. — Nouvel oculaire pour le Soleil. (439-441).

Lindsay. — Errata aux observations d'étoiles doubles contenues dans le premier volume des observations de Dun-Echt. (441-442).

John Roggers. — Lettre relative à la découverte des satellites de Mars par M. A. Hall. (443-445).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Solution du problème de Kepler. (445-458).

La solution est déduite de développements en séries.

Proctor (*R.-A.*). — Note sur l'arc lumineux ou autour de Vénus pendant son passage devant le Soleil. (459-460).

Russell (*H.-C.*). — Mesures de α Centaure, faites à Sidney de 1870 à 1877. (462-467).

Johnson (*S.-J.*). — Observation de l'éclipse de Lune du 23 août 1877, faite à Upton. (467-469).

Christie et *Maunder*. — Spectre de la comète 1877, II, et de la Lune pendant l'éclipse du 23 août 1877. (469-470).

G. R.

Математическій Сборникъ, издаваемый Московскимъ математическимъ Обществомъ (¹).

Tome VIII; 1876-1877.

Joukovsky (*N.-E.*). — Cinématique des corps liquides. (1-79 et 163-214) (²).

Liventsof (*A.-I.*). — Essai d'une exposition systématique du calcul des fonctions d'une seule variable indépendante. (80-160) (³).

Bougaïef (*N.-V.*). — Équations numériques du second degré. (239-253).

Résolution et discussion des racines des équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = E(a_1 x^2 + b_1 x + c_1).$$

Imschenetsky (*V.-G.*). — Intégration d'un système d'équations. (254-276).

L'auteur indique deux moyens de ramener aux quadratures l'intégration d'un système d'équations

$$dx : dy : dq : dp = Q : P : X : Y,$$

où

$$f(x+yi) = X + Yi \text{ et } \varphi(q+pi) = Q + Pi :$$

1° En appliquant la théorie, généralisée, du multiplicateur d'intégration;
2° En ramenant le système donné à la forme canonique.

Liventsof (*A.-I.*). — Des indices fonctionnels. (277-284).

Liventsof (*A.-I.*). — Expression d'une fonction par une intégrale définie. (285-287).

Peterson (*K.-M.*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. (291-361).

Bredikhine (*F.-A.*). — Raies spectrales des nébuleuses planétaires. (362-378).

D'après les observations faites et les mesures prises sur les positions de trois

(¹) Voir *Bulletin*, III, 11, 70, 200; V, 292; VI, 314; VII, 233; X, 96.
(²) Voir *Bulletin*, I_1, 98.
(³) Voir *Bulletin*, I_1, 141.

raies brillantes des spectres des nébuleuses planétaires, M. Bredikhine est conduit à croire que la raie la plus brillante de ces spectres, généralement attribuée à l'azote, coïncide avec la raie caractéristique du fer, et c'est probablement par les vapeurs de ce métal qu'elle est produite.

Ces observations ont été faites sur les nébuleuses nos 4628 et 4964 du catalogue de Herschel, observées déjà par Vogel, et les nos 4390, 4234 et 4373, non observées encore.

Sloudsky (*F.-A.*). — Du mouvement libre d'un fil flexible et inextensible. (381-386).

Joukovsky (*N.-E.*). — Un cas de mouvement d'un plan liquide sous l'action de l'inertie. (387-391).

Sloudsky (*F.-A.*). — A propos du problème relatif au nombre de positions d'équilibre d'un prisme triangulaire flottant. (392-398).

Hochmann (*H.*). — Méthode analytique de solution du problème des engrenages. (399-497).

Letnikof (*A.-V.*). — Remarque sur l'intégration de deux équations connues. (498-500).

Bougaïef (*N.-V.*). — Contribution à la théorie de divisibilité des nombres. (501-505).

M. Bougaïef indique le moyen d'obtenir les caractères de divisibilité d'un nombre quelconque par un nombre premier avec la base de numération, quelle que soit cette dernière.

A. P.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

Tome LXXXV; juillet-décembre 1877.

N° 1; 2 juillet.

Resal (*H.*). — Sur la génération de la courbe méridienne d'une surface de révolution dont la courbure varie suivant une loi donnée. (5).

---

(1) Voir *Bulletin*, I_2, p. 283.

Villarceau (*Y.*). — Remarques au sujet de la Lettre communiquée, dans la séance du 18 juin, par M. *Mouchez*. (14).

N° 2; 9 juillet.

Moncel (*Th. du*). — De la transmission électrique à travers le sol par l'intermédiaire des arbres. (55).

Boussinesq (*J.*). — Sur les mouvements quasi circulaires d'un point soumis à l'attraction d'un centre fixe. (65).

N° 3; 16 juillet.

Daubrée. — Expériences, d'après lesquelles la forme fragmentaire des fers météoriques peut être attribuée à une rupture sous l'action de gaz fortement comprimés, tels que ceux qui proviennent de l'explosion de la dynamite. (115).

Stephan (*E.*). — Observation de la comète périodique de d'Arrest, faite à l'Observatoire de Marseille. (131).

Frobenius. — Note sur la théorie des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables. (Extrait d'une Lettre à M. Hermite). (131).

Fouret (*G.*). — Démonstration de deux lois géométriques énoncées par M. Chasles. (134).

Lucas (*Éd.*). — Sur la division de la circonférence en parties égales. (136).

N° 4; 23 juillet.

Moncel (*Th. du*). — Sur la conductibilité électrique des arbres. (186).

Mannheim (*A.*). — Sur les courbes ayant les mêmes normales principales et sur la surface formée par ces normales. (212).

Fouret (*G.*). — Sur l'extension à l'espace de deux lois relatives aux courbes planes, données par M. Chasles. (216).

Duter (*É*.). — Sur l'aimantation des plaques circulaires où les lignes isodynamiques sont des circonférences concentriques. (222).

Broun (*J.-A.*). — Influence du Soleil et de la Lune sur les variations magnétiques et barométriques. (239).

N° 5; **30 juillet.**

Faye. — Sur la partie cosmique de la Météorologie. (247).

Daubrée. — Conséquences à tirer des expériences faites sur l'action des gaz produits par la dynamite, relativement aux météorites et à diverses circonstances de leur arrivée dans l'atmosphère. (253).

Cayley (*A.*). — Sur un exemple de réduction d'intégrales abéliennes aux fonctions elliptiques. (265).

N° 6; **6 août.**

Serret (*J.-A.*). — Condition pour que les normales principales d'une courbe soient normales principales d'une seconde courbe. (307).

Daubrée. — Recherches expérimentales faites avec les gaz produits par l'explosion de la dynamite, sur divers caractères des météorites et des bolides qui les apportent. (314).

Giraud-Teulon. — Réfraction sphérique; exposition des lois et formules de Gauss en partant du principe de l'équivalence des forces physiques. (326).

Pepin (le P.). — Sur la formule $2^{2^n} + 1$. (329).

Aoust (l'abbé). — Observations relatives au Mémoire de M. *Haton de la Goupillière*, ayant pour titre : « Des développoïdes directes et inverses des divers ordres ». (331).

Stephan (*E.*). — Observations des planètes (170), (171) et (172) à l'Observatoire de Marseille; découverte de la planète (173) par M. *Borrelly*. (334).

Bossert (J.). — Éléments et éphémérides de la planète (148) Gallia. (336).

N° 7; 13 août.

Faye. — Communication du Bureau des Longitudes, relative à de nouvelles opérations de Géodésie astronomique. (359).

Mouchez. — Gravure représentant l'auréole de Vénus, mission de l'île Saint-Paul. (360).

Chasles (M.). — Une loi générale des courbes géométriques, concernant l'intervention commune de chaque point d'une courbe et de la tangente de ce point, dans les questions de lieux géométriques ou de courbes enveloppes. (362).

Janssen (J.). — Note sur la reproduction par la photographie des « grains de riz » à la surface solaire. (368).

Cayley (A.). — Sur un exemple de réduction d'intégrales abéliennes aux fonctions elliptiques. (373).

Flammarion (C.). — Le système de Sirius. (386).

Wolf (R.). — Remarques à propos d'une Communication récente de M. *Faye*, sur la relation entre les taches solaires et les variations de la déclinaison magnétique. (390).

Genocchi (A.). — Sur l'équation de Riccati. (391).

Niewenglowski. — Note sur les courbes qui ont les mêmes normales principales. (394).

N° 8; 20 août.

Le Verrier. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. *G.-B. Airy*) et à l'Observatoire de Paris, pendant le deuxième trimestre de l'année 1877. (419).

Faye. — Observations à propos d'un récent travail de M. *F.-F. Hébert*, relatif à l'hiver exceptionnel 1876-1877. (421).

La Gournerie (de). — Recherche de documents relatifs à l'expédition scientifique faite au Pérou, de 1735 à 1743. (423).

Cayley (*A.*). — Sur un exemple de réduction d'intégrales abéliennes aux fonctions elliptiques. (426).

Boileau (*P.*). — Propriétés communes aux tuyaux de conduite, aux canaux et aux rivières à régime uniforme. (429).

Henry (*J.*). — Découverte d'une nouvelle planète, par M. *Watson*. (436).

Henry (*J.*). — Découverte de deux satellites de Mars, par M. *Hall*. (437).

Flammarion (*C.*). — Sur un système stellaire en mouvement propre rapide. (439).

Chapelas. — Observations des étoiles filantes du mois d'août. (450).

Govi (*G.*). — De la chaleur que peut dégager le mouvement des météorites à travers l'atmosphère. (451).

N° 9; 27 août.

Faye. — Note sur le catalogue des étoiles de longitude et de culmination lunaires de M. *Lœwy*. (459).

Chasles (*M.*). — Deux lois générales des courbes géométriques d'ordre et de classe m et n. (460).

Moncel (*Th. du*). — Sur le rapport qui doit exister entre le diamètre des noyaux de fer des électro-aimants et l'épaisseur de leur hélice magnétisante. (466).

Cayley (*A.*). — Sur un exemple de réduction d'intégrales abéliennes aux fonctions elliptiques. (472).

Stephan (*E.*). — Observations des planètes (173) et (174), et remarques relatives à la découverte de cette dernière planète. (475).

Flammarion (*C.*). — Carte géographique provisoire de la planète Mars. (476).

Bérigny (*Ad.*). — Variations de la température pendant l'éclipse totale de Lune du 24 août 1877. (487).

Faye. — Remarques à l'occasion de la Communication de M. *Bérigny*. (488).

N° 10; 3 septembre.

Villarceau (*Y.*). — Présentation de la « Nouvelle navigation astronomique », par MM. *Y. Villarceau* et *de Magnac*. (491).

Moncel (*Th. du*). — Considérations sur l'interprétation qu'on doit donner aux conditions de maxima relatives aux calculs des forces électro-magnétiques. (497).

Haretu (*F.-C.*). — Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires. (504).

Henry (*Paul*) et *Henry* (*Pr.*). — Satellite de Mars observé à l'Observatoire de Paris. (510).

Flammarion (*C.*). — Nouveau système stellaire en mouvement propre rapide. (510).

N° 11; 10 septembre.

Faye. — Sur l'observation des deux satellites de Mars à l'Observatoire de Washington. (536).

Lamey (*Ch.*). — Observations tendant à faire admettre l'existence d'un anneau d'astéroïdes, autour de la planète Mars. (538).

Henry (*J.*). — Découverte d'une nouvelle petite planète par M. *Watson*. (359).

Boussinesq (*J.*). — Théorie des petits mouvements d'un point pesant sur une surface décrite autour d'un axe de révolution vertical. (539).

N° 12; 17 septembre.

Faye. — Note sur l' « Atlas des mouvements supérieurs de l'atmosphère », de M. *Hildebrandsson*. (555).

Stephan (*E.*). — Découverte d'une nouvelle comète par M. *Cog-*

gia, et observation de l'un des satellites de Mars par M. *Borrelly*. (570).

Henry (*Paul*) et *Henry* (*Pr.*). — Observation du satellite extérieur de Mars, faite à l'équatorial du jardin de l'Observatoire de Paris. (571).

Boutigny (*P.-H.*). — Observation à propos des satellites de Mars. (571).

Durham (*V.*). — Sur un bolide aperçu à Boën (Loire) le 11 septembre, et sur une secousse de tremblement de terre constatée le 12 septembre. (577).

Faye. — Sur un Mémoire de M. *P. de Saint-Robert,* « Sur le mouvement sphérique du pendule, en ayant égard à la résistance de l'air et à la rotation de la Terre ». (578).

N° 13; 24 septembre.

Le Verrier. — Annonce de son décès, le 23 septembre 1877. (579).

Dumas (*J.-B.*). — Discours prononcé aux obsèques de M. *Le Verrier,* au nom du Conseil supérieur de l'Instruction publique. (580).

Bertrand (*J.*). — Lettre adressée à l'Académie au sujet de la perte qu'elle venait de faire dans la personne de M. *Le Verrier*. (583).

Villarceau (*Y.*). — Discours prononcé aux obsèques de M. *Le Verrier,* au nom des astronomes de l'Observatoire de Paris. (584).

Tresca. — Discours prononcé aux obsèques de M. *Le Verrier*, au nom du Conseil scientifique de l'Observatoire. (587).

Faye. — Discours prononcé aux obsèques de M. *Le Verrier,* au nom du Bureau des Longitudes. (590).

Janssen. — Discours prononcé aux obsèques de M. *Le Verrier,* au nom de la Section d'Astronomie. (591).

N° 14; 1er octobre.

Aoust (l'abbé). — Intégrales des développantes obliques d'un ordre quelconque. (609).

Gruey. — Trajectoire du bolide du 14 juin 1877. (632).

Salicis. — Sur un halo observé à Brest le 31 août 1877. (636).

Buys-Ballot. — Réflexions sur les travaux météorologiques de M. *Brault*. (636).

N° 15; 8 octobre.

Faye. — Sur un incident qui s'est produit au Congrès de Stuttgart. (645).

Moncel (*Th. du*). — Du rapport qui doit exister entre le diamètre des noyaux magnétiques des électro-aimants et leur longueur. (652).

Villarceau (*Y.*). — Découvertes d'une petite planète par M. *Palisa*, et d'une nouvelle comète par M. *Tempel*. (663).

Henry (*Paul*) et *Henry* (*Pr.*). — Observations de la planète (175) Palisa et de la nouvelle comète de Tempel, à l'équatorial du jardin de l'Observatoire. (663).

Callandreau (*O.*). — Sur une méthode générale de transformation des intégrales dépendant des racines carrées. Application à un problème fondamental de Géodésie. (664).

N° 16; 15 octobre.

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (689).

Tisserand (*F.*). — Note sur les mouvements des apsides des satellites de Saturne, et sur la détermination de la masse de l'anneau. (695).

Tennant. — Valeur de la parallaxe solaire, déduite de l'observation du dernier passage de Vénus. (706).

Watson (*J.*). — Réponse à une Note précédente de M. *Stephan*, relative à la découverte de la planète (174). (707).

Brioschi (*Fr.*). — Sur des cas de réduction des fonctions abéliennes aux fonctions elliptiques. (708).

Poey (*A.*). — Rapports entre les variations barométriques et la déclinaison du Soleil. (718).

N° 17; 22 octobre.

Tresca. — Tables d'Uranus et de Neptune de M. *Le Verrier*. (725).

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques (*suite*). (728).

Moncel (*Th. du*). — Modifications apportées aux conditions de maxima des électro-aimants par l'état de saturation magnétique plus ou moins complet de leur noyau magnétique. (743).

Brault (*L.*). — Réponse à une Note récente de M. *Buys-Ballot*, sur la division en temps et en carrés des cartes de Météorologie nautique. (765).

N° 18; 29 octobre.

Janssen. — Sur le réseau photosphérique. (775).

Henry (*Paul*) et *Henry* (*Pr.*). — Observations de la planète (175) Palisa, faites à l'Observatoire de Paris, à l'équatorial ouest du jardin. (782).

Flammarion (*C.*). — Systèmes stellaires de 36 Ophiuchus et de 40 Éridan. (783)

André (*D.*). — Forme générale des coefficients de certains développements. (786).

Mannheim (*A.*). — Nouveau mode de représentation plane de classes de surfaces réglées. (788).

Parville (*H. de*). — Sur les variations barométriques semi-diurnes. (797).

Boutigny (*P.-H.*). — Sur les satellites de Mars. (819).

N° 19; 5 novembre.

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques (*suite*). (821).

Faye. — Réponse à une Note récente de M. *de Parville,* « Sur la variation semi-diurne du baromètre ». (836).

Flammarion (*C.*). — Systèmes stellaires formés d'étoiles associées dans un mouvement propre commun et rapide. (841).

Fouret (*G.*). — Sur l'ordre (ou la classe) d'une courbe plane algébrique dont chaque point (ou chaque tangente) dépend d'un point correspondant d'une autre courbe plane, et de la tangente en ce point. Extension aux surfaces. (844).

Mannheim (*A.*). — Applications d'un mode de représentation plane de classes de surfaces réglées. (847).

N° 20; 12 novembre.

Faye. — Présentation, au nom du Bureau des Longitudes, du volume de la *Connaissance des Temps pour* 1879. (869).

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques (*suite*). (870).

Haton de la Goupillière. — Formules nouvelles pour l'étude du mouvement d'une figure plane. (895).

Henry (*Paul*). — Découverte d'une petite planète à l'Observatoire de Paris. (901).

Palisa. — Découverte d'une petite planète à l'Observatoire de Pola. (901).

Henry (*Paul*) et *Henry* (*Pr.*). — Observations des planètes (125) et (176), faites à l'Observatoire de Paris (équatorial du jardin). (901).

Flammarion (*C.*). — Nouveaux systèmes stellaires. (902).

Levy (*M.*). — Sur l'équation à dérivées partielles du troisième ordre, exprimant que le problème des lignes géodésiques, considéré comme problème de Mécanique, admet une intégrale algébrique du troisième degré. (904).

Parville (*H. de*). — Sur les variations semi-diurnes du baromètre. (912).

N° 21 ; 19 novembre.

Villarceau (*Y.*). — Observations méridiennes de petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. *G.-B. Airy*), et à l'Observatoire de Paris pendant le troisième trimestre de l'année 1877. (917).

Caligny (*A. de*). — Sur la théorie et les diverses manœuvres de l'appareil d'épargne construit à l'écluse de l'Aubois. (926).

Watson (*J.*). — Découverte d'une petite planète, le 12 novembre 1877. (934).

Flammarion (*C.*). — Carte générale des mouvements propres des étoiles. (935).

Levy (*M.*). — Sur l'équation à dérivées partielles du quatrième ordre, exprimant que le problème des lignes géodésiques, considéré comme problème de Mécanique, admet une intégrale du quatrième degré. (938).

Mannheim (*A.*). — Nouvelle application d'un mode de représentation plane de classes de surfaces réglées. (941).

Fouret (*G.*). — Sur les lois qui régissent l'ordre (ou la classe) des courbes planes algébriques, dont chaque point (ou chaque tangente) dépend à la fois d'un point et d'une tangente variables sur une courbe donnée. (944).

Fuchs. — Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite. (947).

Gohierre de Longchamps. — Sur la décomposition en facteurs premiers des nombres $2^n \pm 1$. (950).

N° 22; 26 novembre.

Mouchez (*E.*). — Positions géographiques des principaux points de la côte de Tunisie et Tripoli. (981).

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques (*suite*). (984).

Sylvester (*J.*). — Sur les invariants. (992).

Caligny (*A. de*). — Sur les ondes de diverses espèces qui résultent des manœuvres de l'écluse de l'Aubois. (995).

Brioschi (*F.*). — Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. (1000).

Watson (*J.-C.*). — Découverte et observations de la planète (175). (1006).

Flammarion (*C.*). — Sur les distances des planètes. (1006).

Levy (*M.*). — Sur l'intégrale intermédiaire du troisième ordre de l'équation à dérivées partielles du quatrième ordre exprimant que le problème des lignes géodésiques admet une intégrale du quatrième ordre. (1009).

Lalanne (*L.*). — Tables graphiques et géométrie anamorphique; réclamation de priorité. (1012).

N° 23; 3 décembre.

Sylvester (*J.*). — Sur les invariants. (1035).

Caligny (*A. de*). — Sur divers moyens d'accélérer le service dans les écluses de navigation. (1039).

Govi (*G.*). — De la loi d'absorption des radiations de toute espèce à travers les corps, et de son emploi dans l'analyse spectrale quantitative. (1046).

Léauté (*H.*). — Tracé pratique du cercle qu'il convient de substituer à une courbe donnée dans une étendue finie. (1049).

Baills. — Occultations, prédiction graphique. (1056).

Lœwy. — Observations relatives à la Communication précédente. (1059).

Cruls (*L.*). — Observations des taches et de la rotation de la planète Mars, pendant l'opposition de 1877, faites à l'Observatoire de Rio-de-Janeiro. (1060).

Callandreau (*O.*). — Sur un problème fondamental de Géodésie. Application d'une méthode générale de transformation des intégrales dépendant de racines carrées. (1062).

Levy (*M.*). — Sur les intégrales rationnelles du problème des lignes géodésiques. (1065).

N° 24; **10** décembre.

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques (*suite*). (1085).

Sylvester (*J.*). — Sur les invariants. (1091).

Caligny (*A. de*). — Sur les dispositions qui conduisent, pour le système d'écluse de navigation à oscillation unique, au maximum de rendement et au minimum de dépense de construction. (1093).

Govi (*G.*). — De la loi d'absorption des radiations à travers les corps, et de son emploi dans l'analyse spectrale quantitative. (1100).

André (*D.*). — Sur le développement des fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable. (1108).

Schrader (*Fr.*). — Orographe destiné au levé des montagnes. (1112).

N° 25; **17** décembre.

Tisserand (*F.*). — Note sur l'anneau de Saturne. (1131).

Boileau (*P.*). — Note concernant le travail intermoléculaire. (1135).

Caligny (*A. de*). — Sur un perfectionnement essentiel de l'écluse de navigation à oscillation mixte. (1139).

Levy (*M.*). — Sur les intégrales intermédiaires de l'équation à dérivées partielles générale exprimant que le problème des lignes géodésiques, considéré comme problème de Mécanique, admet une intégrale rationnelle par rapport aux composantes de la vitesse du mobile. (1150).

Baills. — Calcul de la longitude ou de l'heure de Paris, à la mer, par les occultations d'étoiles. (1153).

Lœwy. — Observations relatives à la Communication de M. *Baills*. (1156).

Boussinesq (*J.*). — Sur les conditions aux limites dans le problème des plaques élastiques. (1157).

Brioschi (*F.*). — Sur l'équation de Lamé. (1160).

Bertrand (*Ém.*). — De la mesure des angles dièdres des cristaux microscopiques. (1175).

N° 26; 24 décembre.

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques (*suite*). (1185).

Tisserand (*F.*). — Note sur l'anneau de Saturne. (1194).

Boileau (*P.*). — Notions concernant le travail intermoléculaire. (1199).

Tissot (*A.*). — Sur l'emploi des méthodes graphiques dans la prédiction des occultations. (1223).

Lœwy. — Observations relatives à la Communication précédente. (1224).

Fouret (*G.*). — Sur les transformations de contact des systèmes de surfaces. (1224).

N° 27; 31 décembre.

Janssen. — Sur la constitution de la surface solaire et sur la photographie envisagée comme moyen de découvertes en Astronomie physique. (1249).

Caligny (*A. de*). — Note sur les ondes et les remous de diverses espèces qui se présentent dans un canal dont le courant est alternativement intercepté ou rétabli, et dont on peut faire varier la profondeur. (1266).

Guyon (*Ém.*). — Cinématique et dynamique des ondes courantes sur un sphéroïde liquide. Application à l'évolution de la protubérance elliptique autour d'un sphéroïde déformé par l'attraction d'un astre éloigné. (1274).

Levy (*M.*). — Quelques observations au sujet d'une Note de M. *Boussinesq*, sur la condition aux limites dans le problème des plaques élastiques. (1277).

Gilbert (*Ph.*). — Sur un théorème de M. *Villarceau*. Remarques et conséquences. (1280).

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT (¹).

Tome VII; 1876.

Reidt. — Doit-on, dans l'enseignement de la Trigonométrie, faire prédominer le principe géométrique ou le principe arithmétique? (1-12).

L'auteur condamne absolument le mélange des deux méthodes, et donne la préférence à la méthode géométrique.

Kuckuck (*A.*). — Le calcul avec les fractions décimales, et sa place dans le programme de l'enseignement secondaire. (13-25).

Stammer. — Sur l'extraction de la racine cubique des nombres. (33-34).

Müller. — La méthode la plus courte pour l'extraction de la racine cubique. (34-39).

Bender (*C.*). — Minimum de déviation, et démonstration simple

---

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 157.

de l'équation entre les distances de l'image et de l'objet pour les lentilles sphériques. (39-40).

Matthiessen (*L.*). — Comparaison du *Cuttuca* des Hindous avec la règle *Ta yen* des Chinois. (78-81).

Méthodes usitées chez ces deux peuples pour la résolution des problèmes d'Analyse indéterminée.

Günther (*S.*). — Sur la manière de traiter élémentairement certains points de géographie mathématique. (91-99).

I. Calcul des arcs diurnes et nocturnes des étoiles. — II. Erreurs que l'on commet habituellement dans la discussion de l'attraction des montagnes. — III. Explication de la haute mer au nadir.

Diekmann (*Jos.*). — Sur la théorie des équations biquadratiques. (100-106).

Voir *Zeitschrift*, V, 317; *Bulletin*, VII, 96.

Emsmann (*G.*). — Sur la division de l'angle. (107-113 et 292).

Division en 2, 3, 4, 5 parties égales par la construction de certaines courbes.

Weinmeister. — Calcul du nombre π. (114-116).

Wiczorkewicz. — 1. Le cercle est-il une surface ou une courbe? — 2. Sur la nomenclature et l'orthographe mathématiques. — 3. Du rectangle et du losange. (116-119).

Schwarz. — Encore la notion de rapport. (121-125).

Les discussions sur cet objet et sur d'autres de même nature n'auront une fin que lorsqu'on aura banni de l'Arithmétique les distinctions entre les nombres concrets et les nombres abstraits (*benannte und unbenannte Zahlen*), et que l'on aura reconnu que les Mathématiques pures n'opèrent pas sur des êtres réels, mais uniquement sur des signes abstraits d'opérations.

Günther (*S.*). — Le principe des rayons réciproques. — Les services rendus par les Arabes dans la théorie des triangles de Pythagore. — Températures des couches d'air supérieures. — Sur la théorie des cyclones. (148-153).

Nécrologie pour l'année 1875. (165-168).

Müller (*Hubert*). — Théorie de la symétrie appropriée à l'enseignement. (169-178, et 257-265).

Schlegel (*V.*). — Sur le but et les méthodes dans l'enseignement scolaire de la Géométrie. (179-184).

Bielmayr (*F.*). — Démonstration de l'expérience du pendule de Foucault. (185-186).

Günther (*S.*) et *Pick* (*Ad.-Jos.*). — Nouvelles remarques sur le pendule de Foucault. (187-192).

Pick (*A.-J.*). — Proportion et règle conjointe. (193-196).

Henrici (*J.*). — Sur l'extraction de la racine cubique. (197-198).

Bardey (*E.*). — Un dernier mot sur les expressions « trois fois plus, trois fois moins ». (203-211).

Günther (*S.*). — La formule de Reye pour la mesure barométrique des hauteurs comparée à la formule ordinaire. (237-238).

Günther (*S.*). — Notice nécrologique sur *Gottfried Friedlein*. (246-249).

Pick (*A.-J.*). — Démonstration correcte de la loi du pendule de Foucault. (266-271).

Klekler (*K.*). — Nouvelle méthode pour la détermination de la vraie grandeur de l'angle de deux plans donnés par leurs traces. (286-288).

Pick (*Georg.-Al.*). — Remarque sur $\lim_{\omega=\infty} (1^{\omega})$, (voir Schlömilch, *Compendium d. h. Analysis,* et Helmes, *Elementar-Mathematik*). (289-291).

L'auteur croit que 1^{∞} peut avoir une autre limite que l'unité, et en donne pour preuve l'égalité $1 = z^0$, d'où $1^{\frac{1}{0}} = z$ (!!).

Kurz (*A.*). — Mélanges. (200-202, 288-289, 377-380).

Détermination du poids spécifique avec réduction au vide et à l'eau à 4 degrés. — Sur la machine d'Atwood. — Démonstration élémentaire de la loi de la torsion. — Pendule à deux points matériels. — Sur le choc, en particulier sur celui des corps élastiques. — Réduction d'un système donné de forces. — Nouvelle moyenne numérique. — La loi de Newton comme conséquence des deux lois de Kepler.

Müller. — Encore un mot sur l'extraction de la racine cubique. (292-295).

Belovic (*J*). — Le procédé de démonstration dans les opérations

inverses considéré au point de vue de la méthode génétique. (345-355).

Günther (*S.*). — Sur l'enseignement de l'Analyse supérieure. (356-369).

Revue critique des principaux Traités de Calcul infinitésimal publiés en Allemagne depuis un demi-siècle.

Matern. — Sur un appareil simple pour la détermination du coefficient de dilatation de l'air et des fluides non élastiques. (370-376).

Günther (*S.*). — Démonstration directe de la mesure de la courbure de Gauss. — Le théorème fondamental de la théorie des équations linéaires aux différentielles totales. — Sur la théorie de la probabilité géométrique. — Le vrai fondement de la théorie des parallèles. (404-408).

Erler. — Le principe géométrique et le principe arithmétique dans l'enseignement de la Trigonométrie. (435-439).

Tome VIII; 1877.

Hauck. — Sur la question du principe géométrique et du principe analytique dans l'enseignement de la Trigonométrie. (7-19).

L'auteur se prononce en faveur de l'Analyse.

Reis. — La tension considérée comme force fondamentale de la nature. (20-35).

Réponse de l'auteur aux critiques adressées à son *Lehrbuch der Physik* par M. Weissenborn.

Kurz (*A.*). — Mélanges. (39-42, 212-213, 400-402, 482-483).

Mesure barométrique des hauteurs. — Traction et pression. — Minimum de déviation du prisme. — Détermination élémentaire des moments d'inertie. — Réflexions sur le levier, le centre de gravité, le parallélogramme des forces. — Sur les moments composés des surfaces. — Sur la rotation des vents. — Problèmes sur la chute des corps et le son. — Réduction d'un système de forces dans des cas spéciaux.

Emsmann (*G.*). — Le rapporteur avec trisecteur. (42-43).

Schlegel (*V.*). — Système de la théorie de l'espace, d'après les

principes de la *Théorie de l'espace* de Grassmann, et comme Introduction à cette théorie. (Analyse de cet ouvrage par *S. Günther*). (45-59).

Erler. — Les sections coniques traitées synthétiquement. (99-130, et 297).

Schlegel (*V.*), *Mantel* (*W.*), *Pick* (*G.*) et *Bauer* (*A.*). — Sur la valeur de $\lim_{\omega=0} (1^\omega)$. (132-135, et 497-500).

Bode (*J.*) et *Weissenborn.* — Sur le *Lehrbuch der Physik* de *Reis.* (135-146).

Grassmann (*Robert*). — Die Formenlehre oder Mathematik. (Analyse par *S. Günther*). (148-152).

Günther (*S.*). — Courbes transcendantes fermées. — La loi de réciprocité dans sa dépendance organique. — Mathématiques des Assyriens. — Le véritable inventeur de la méthode cinématique des tangentes. (169-173).

M. Jacoli a mis hors de doute (*Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, t. VIII, p. 255 et suiv.) que Torricelli avait découvert avant Roberval la méthode des tangentes, que celui-ci inventa de son côté quelques années plus tard.

Nécrologie pour les années 1875-1876. (186-193).

Binder. — Résolution de trois problèmes de Géométrie élémentaire. (216-219).

Killing. — Sur quelques objections contre la Géométrie non-euclidienne. (220-222).

Frischauf (*J.*). — Réfutation du compte rendu fait par *F. Pietzker* des *Elemente der absoluten Geometrie* de Frischauf. (222-223).

Günther (*S.*). — Nouveau photomètre stellaire. — Nouveaux principes pour l'étude des petites planètes. — Scintillation des étoiles. — Observations astronomiques de Schwabe. — Le procès de Galilée. (248-252).

Draenert. — Sur la notation de la logarithmisation. — Remarques du *Rédacteur* sur le même sujet. (265-270).

Bauer (*A.*). — La méthode d'exhaustion, exposée d'une manière simple et rigoureusement scientifique, et appliquée à des problèmes de Mathématiques et de Physique. (273-296).

La méthode est fondée sur la détermination de la limite de $\frac{\Sigma n^{m-1}}{n^m}$, pour $n = \infty$.

Pick (*Ad.-Jos.*). — Détermination par une méthode élémentaire de l'amplitude ortive et de l'arc diurne d'un astre. (298-300).

Korneck (*H.*). — Sur la désignation des segments d'une droite. (300-301).

Pietzker. — Réplique aux observations de MM. Killing et Frischauf. (301-307).

Scheffer (*Hermann*). — Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Principien der abstracten Wissenschaften. 1re Livraison. (Analyse par *S. Günther*). (308-315).

Stoy (*H.*). — Sur l'histoire de l'enseignement du Calcul. (Analyse par *Treutlein*). (316-323).

Schröder (*E.*). — Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende. I. Bd. (Analyse par *Schwarz*). (323-335).

Günther (*S.*). — Le théorème de Peaucellier. — Résolution d'un système déterminé de congruences linéaires. — Représentation géométrique des fonctions de quatre variables. — Perfectionnement de la méthode d'approximation de Newton. — Courbes algébriques carrables. (346-351).

Schadwill (*C.-L.*). — La loi du pendule de Foucault. (371-388).

Binder (*G.*). — Sur l'expérience du pendule de Foucault. (389-393).

La conclusion de l'auteur est que toutes les démonstrations dites élémentaires de la loi du pendule de Foucault sont, nécessairement et sans exception, incomplètes.

Temme. — Problème mathématique relatif à la pratique des comptes de tutelle, avec la solution. — *Haberl*. Autre solution du même problème. (396-400).

Studnička (*F.-A.*), *Dränert*, *Erler*, *Bomhard* (*G.*), *Bardey*. —

Sur le nouveau signe proposé pour l'opération directe et inverse du logarithme. (403-406, et 484-490).

La nécessité d'introduire dans l'enseignement élémentaire de nouveaux signes, généralement bizarres et compliqués, et dont l'usage n'a aucune chance de s'introduire dans les hautes Mathématiques, nous semble au moins fort contestable. C'est aussi l'opinion du Dr *Bardey*.

L'Enseignement des Sciences mathématiques et physiques dans le nouveau plan d'étude des Gymnases et des Realschulen du royaume de Saxe. (459-474).

Mauritius. — L'expérience du pendule de Foucault faite avec un court pendule. (475-479).

Lieber (*H.*), *Lühmann* (*F. v.*), *Reidt, Hauck* (*G.*). — Suite de la discussion sur l'enseignement (géométrique ou analytique) de la Trigonométrie. (490-497).

Problèmes proposés. (501-502).

Günther (*S.*). — Sur la loi des nombres premiers. — Expression directe des nombres de Bernoulli. — Sur la symétrie. — L'espace au point de vue physiologique. — Le géomètre sicilien Maurolycus. (533-538).

J. H.

JOURNAL für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt.

Tome LXXXII; 1877.

Reye (*Th.*). — Sur des systèmes et tissus de surfaces algébriques. (1-20).

Pour expliquer en peu de mots les nouveaux termes de Géométrie employés par M. Reye et pour donner au lecteur quelque idée des nouvelles pensées et découvertes de l'auteur, nous croyons bon de retracer rapidement la définition des surfaces appelées *apolaires* par M. Reye, que nous avons reproduite au tome VII du *Bulletin*, p. 253.

Soit $\nu = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$: toute forme quaternaire du degré n par rapport aux variables α, β, γ, p peut être mise sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} m_i(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^n,$$

où les m_i sont des facteurs déterminés par ν équations linéaires, et les x_i, y_i, z_i sont des constantes tout à fait arbitraires, mais telles que les ν points, dont les coordonnées sont représentées par les x_i, y_i, z_i, ne soient pas situés sur une surface du degré ν.

Cela posé, l'équation

$$\Phi^k(\alpha, \beta, \gamma, p) = \Sigma_i m_i(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)^k = 0,$$

α, β, γ, p étant les coordonnées d'un plan, peut être envisagée comme l'équation générale d'une surface de la $k^{\text{ième}}$ classe. Soit encore

$$F^n(x, y, z) = \Sigma_j \mu_j(\alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j z - p_j)^n = 0$$

l'équation générale d'une surface d'ordre n. Alors la surface Φ^k est appelée *apolaire* à F^n si pour *toutes les valeurs* de x, y, z l'équation

$$\Sigma_j \Sigma_i \mu_j m_i(\alpha_j x_i + \beta_j y_i + \gamma_j z_i - p_j)^k (\alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j z - p_j)^{n-k} = 0$$

se trouve être *identiquement* satisfaite, ce qui aura lieu lorsque les coefficients de F^k satisfont à $\frac{1}{6}(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)$ équations de conditions. Si $k > n$, il faut donner l'exposant $k-n$ au facteur $\alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j z - p_j$; la relation de deux surfaces apolaires est réciproque : si Φ^k est apolaire à F^n, on aura aussi F^n apolaire à Φ^k, les équations de condition entre les coefficients des deux surfaces étant linéaires.

Soit maintenant

$$F^n = \mathbf{S} \frac{n!}{q!\,r!\,s!\,t!} \alpha^n_{qrst}\, x_1^q\, x_2^r\, x_3^s\, x_4^t = 0$$

l'équation d'une surface d'ordre n, et

$$\Phi^n = \mathbf{S} \frac{n!}{q!\,r!\,s!\,t!} a^n_{qrst}\, \xi_1^q\, \xi_2^r\, \xi_3^s\, \xi_4^t = 0$$

l'équation d'une surface de classe n. Toutes les surfaces F^n ou Φ^n dont les coordonnées satisfont à p équations de condition formeront en général un *système* F^n ou *tissu* Φ^n de $N(n)-p$ dimensions ou du *degré* (Stufe) $N(n)-p$ [où $N(n) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$]. D'après cela un système linéaire de premier et de deuxième degré est ce qu'on appelle à l'ordinaire *faisceau* et *réseau* de surfaces : § 1. Coordonnées de surfaces algébriques. Systèmes F^n et tissus Φ^n. — § 2. Ordre des systèmes F^n et tissus Φ^n algébriques. — § 3. Systèmes et tissus linéaires de surfaces algébriques. — § 4. Les systèmes F^n linéaires de degré $N(n)-1$ et la théorie des polaires de la surface de $n^{\text{ième}}$ classe. — § 5. Transformation linéaire de systèmes F^n et de tissus Φ^n.

Erdmann (*G.*). — Sur des solutions discontinues du calcul des variations. (21-30).

I. Déduction de la règle générale. Soit $V = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi(x, y, y')\,dx$ l'intégrale proposée. Si ξ et η sont les coordonnées d'un sommet de la courbe, la fonction $\frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi, \eta, p)$ doit être susceptible d'une même valeur pour deux valeurs de p différentes entre elles; la même chose devra avoir lieu dans la fonction $\varphi(\xi, \eta, p) - p\frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi, \eta, p)$

pour les mêmes valeurs de p. — II. Exemples où $\varphi(x, y, y')$ ne contient que y'. — III. Exemple où $\varphi(x, y, y')$ contient non-seulement y', mais encore x et y. — IV. Sur des discontinuités causées par des conditions.

Zincken (*H.*), dit *Sommer*. — Sur la réfraction d'un rayon de lumière par un système de lentilles. (31-44).

« La poursuite d'un rayon de lumière dans son chemin à travers un système de lentilles qui ont l'axe commun a formé le sujet de recherches nombreuses, mais peu fécondes, dès qu'on a soumis au calcul la déviation sphérique, l'épaisseur et la distance des lentilles..... Ce qui me paraît former un fait remarquable, c'est que la dépendance où est le rayon réfracté du rayon incident peut être représentée par des lois très-simples sans qu'on ait besoin de rien négliger. A cet effet, il faut généraliser les définitions de Gauss jusqu'à attribuer à chaque rayon selon sa position aussi bien des distances focales particulières que des points particuliers focaux, principaux et de croisement. Après avoir déterminé ces éléments fondamentaux, qui ne diffèrent de ceux de Gauss que de grandeurs du second ordre, on peut tracer tout de suite et *exactement* le chemin du rayon de lumière. »

M. Sommer, qui avait déjà publié, dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, l'énoncé géométrique des lois les plus importantes, les développe plus amplement dans ce nouveau Mémoire par le procédé analytique, et en fait saillir les premières conséquences. Voici les titres des différentes parties : Réfraction sur une surface. — Réfraction par une lentille. — Réfraction par une combinaison de deux lentilles à axe commun.

Stickelberger (*L.*). — Sur un théorème établi par Abel et relatif aux fonctions algébriques. (45-46).

Geiser. — Sur le problème des axes principaux des surfaces du second ordre. (47-53).

La décomposition en une somme de carrés du discriminant de l'équation cubique connue fait le sujet de la Note.

Reye (*Th.*). — Sur des systèmes et tissus linéaires de surfaces du second ordre. (54-83).

§ 1. Sur quelques systèmes spéciaux F^2 de degré inférieur. — § 2. Les systèmes et tissus des surfaces singulières du second ordre. — § 3. Le système F^2 linéaire du huitième degré et la surface de seconde classe. — § 4. Le système F^2 linéaire du septième degré et le faisceau Φ^2. — § 5. Le système F^2 linéaire du sixième degré et le réseau Φ^2. — § 6. Le système F^2 linéaire du cinquième degré et le tissu Φ^{n2} du troisième degré. — § 7. Les systèmes F^2 et les tissus Φ^2 linéaires et du quatrième degré.

Problèmes mathématiques du prix de la Société Jablonowskienne à Leipzig. (84).

Clausius (*R.*). — Sur la déduction d'une nouvelle loi fondamentale de l'Électrodynamique. (85-130).

§ 1. Différentes opinions sur l'électricité d'un courant. — § 2. Impossibilité de

concilier la loi fondamentale de Weber avec l'idée du mouvement d'une seule électricité dans un conducteur immobile. — § 3. Loi dynamique établie par Riemann, considérée sous le même point de vue. — § 4. Expressions des composantes de la force pour un système spécial de coordonnées. — § 5. Expressions des composantes de la force pour un système quelconque de coordonnées.

Soient e une molécule électrique, e' une autre molécule; soient de plus Xee', Yee', Zee' les composantes des forces qu'exercent ces deux molécules l'une sur l'autre. En désignant par X_1, X_2, X_3 la somme des termes dans X qui ne contiennent que les dérivées des coordonnées respectives de e, de e' et de toutes les deux à la fois, on obtiendra la composante X de la force élémentaire électrodynamique prise dans la direction des x, en ajoutant les trois parties X_1, X_2, X_3. (Explication nécessaire pour ce qui suit.) — § 6. Détermination des fonctions qui se rencontrent dans X_2. — § 7. Détermination des fonctions qui se rencontrent dans X_1. — § 8. Détermination des fonctions qui se rencontrent dans X_3. — § 9. Application des lois de l'induction. — § 10. Résumé des résultats gagnés jusqu'ici. — § 11. Application du principe de la conservation de l'énergie. — § 12. Le potentiel électrodynamique :

1° D'après Weber :

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2;$$

2° D'après Riemann :

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right];$$

3° D'après Clausius :

a, dans la forme la plus générale,

$$V = -ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt};$$

b, dans une forme réduite,

$$V = -ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+k_1\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt};$$

c, dans la forme la plus simple et par conséquent la plus vraisemblable,

$$V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

ou bien

$$V = k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

ou enfin

$$V = k\frac{ee'}{r}vv'\cos\varepsilon.$$

§ 13. Les composantes de la force déduites du potentiel. — § 14. Loi dynamique pour des éléments du courant.

Dans tous ses développements, M. Clausius suppose que ce n'est que l'une des deux électricités qui parcourt les conducteurs.

Weber (H.). — Sur les transcendantes de deuxième et de troisième

espèce dans la théorie des fonctions hyperelliptiques de premier ordre. (131-144).

Wangerin (*A.*). — Sur un système de surfaces triplement orthogonales, formé de certaines surfaces de quatrième ordre. (145-157).

Ce système de surfaces orthogonales a été découvert par M. Moutard et par M. Darboux, qui a publié la plupart des résultats des premiers paragraphes du Mémoire dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LIX, et dans les *Annales de l'École Normale*, t. II et III. Un autre problème a conduit M. Tisserand aux mêmes surfaces. Ce qui est nouveau dans cette publication, c'est la réduction de l'équation potentielle pour ces surfaces.

Schendel (*Leopold*). — Addition au Mémoire sur les fonctions sphériques, p. 86 du tome LXXX. (158-164).

Prym (*F.-E.*). — Sur la théorie de la fonction Γ. (165-172).

La fonction $\Gamma(z)$ satisfait aux équations

$$\text{(I)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(z+n)}{(n-1)!\,n^z} = 1,$$

$$\text{(II)} \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

L'auteur démontre que ces équations sont suffisantes pour déterminer complétement la fonction $\Gamma(z)$, ou bien une autre fonction un peu plus générale $pP(z) + qQ(z)$ qui devient identique avec la fonction Γ pour $p = q = 1$.

Reye (*Th.*). — Sur la réciprocité qu'il y a entre les systèmes F^2 et les tissus Φ^2 et sur les systèmes F^2 de huitième degré. (173-206).

§ 1. Transformations réciproques de l'espace de trois dimensions. — § 2. Transformations réciproques de systèmes F^2 et de tissus Φ^2. — § 3. Systèmes F^2 et tissus Φ^2 de huitième degré. — § 4. Contribution à la théorie des surfaces de quatrième ordre et de quatrième classe. — § 5. Le système nul de neuf dimensions.

Mertens (*F.*). — Sur les déterminants dont les éléments correspondants a_{pq} et a_{qp} sont égaux, mais de signes opposés. (207-211).

Nouvelle démonstration directe de la propriété connue de ces déterminants d'être égaux à un carré complet.

Kostka. — Sur la fonction de Borchardt. (212-229).

Il s'agit de la fonction génératrice de M. Borchardt pour toutes les fonctions entières symétriques; en particulier d'exprimer le numérateur de cette fonction par les coefficients de $f(t)$ et des combinaisons symétriques des différents t.

Frobenius (*G.*). — Sur le problème de Pfaff. (230-315).

Le problème de Pfaff a été traité à diverses reprises par Jacobi, Natani et Clebsch (t. II, LVIII, LX et LXI du même Journal. Dans son premier Mémoire (t. LX), Clebsch ramène la solution du problème à l'intégration de plusieurs systèmes d'équations homogènes linéaires aux différentielles partielles, ce qu'il effectue en se servant d'une méthode indirecte; mais plus tard (t. LXI), il avoue lui-même que cette méthode n'est guère propre à éclairer la nature des équations en question. C'est pourquoi, dans son second Mémoire, il a abordé le problème par une voie directe; cependant il s'y est borné aux équations différentielles

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \ldots + X_p dx_p = 0,$$

pour lesquelles le déterminant des quantités $a_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}$ ne s'évanouit pas. Traiter le problème dans toute sa généralité sans en excepter le cas où s'annule ce déterminant ou bien aussi en même temps un nombre de ses déterminants partiels; gagner des méthodes directes qui puissent conduire réellement au but sans laisser des doutes fondés comme les méthodes de Natani et Clebsch : voilà le point de vue qui a fait reprendre à M. Frobenius la recherche de ce fameux problème. La critique de quelques points obscurs ou problématiques des Mémoires de Clebsch fait un mérite d'autant plus remarquable de ce nouveau Mémoire de l'habile auteur, que l'illustre nom du regrettable Clebsch pourrait facilement servir à propager et appuyer des erreurs qui se trouvent dans ses travaux.

Introduction. — § 1. Nouvel énoncé du problème de Pfaff. — § 2. Le covariant bilinéaire.

I. Sur des équations linéaires et sur des formes bilinéaires alternées. — § 3. Sur des systèmes adjoints d'équations homogènes linéaires. — § 4. Sur la liaison qu'il y a entre les déterminants partiels d'un système d'éléments. — § 5. Déterminants gauches. — § 6. Transformation simultanée d'une forme bilinéaire et de plusieurs couples de formes linéaires. — § 7. Transformation simultanée congrue d'une forme bilinéaire alternée et d'une forme linéaire. L'invariant p. — § 8. L'équivalence des couples de formes à invariant pair $p = 2r$. — § 9. La forme réduite des couples de formes à classe paire. — § 10. Transformation la plus générale de deux couples de formes à invariants égaux, l'une dans l'autre. — § 11. L'équivalence des couples de formes à invariant impair $p = 2r + 1$. — § 12. Sur la transformation d'une forme bilinéaire en une autre qui a moins de variables.

II. Sur les conditions d'intégrabilité pour un système d'équations différentielles linéaires de premier ordre. — § 13. Sur des systèmes adjoints d'équations aux différentielles totales et partielles. — § 14. Les conditions d'intégrabilité déduites de la théorie des équations aux différentielles partielles selon Jacobi et Clebsch. — § 14[a]. Déduction directe des conditions d'intégrabilité selon Déahna. — § 15. Deuxième forme des conditions d'intégrabilité. — § 16. Troisième forme des conditions d'intégrabilité. — § 17. Nouvelle déduction des conditions d'intégrabilité. — § 18. Propriétés de systèmes complets. — § 19. Exemple d'un système complet. — § 20. Sur des systèmes incomplets d'équations différentielles linéaires de premier ordre.

III. Sur la transformation d'expressions différentielles linéaires de premier ordre. — § 21. L'invariant p. — § 22. Les équations aux différentielles partielles, appelées adjointes. — § 23. La forme réduite des expressions différentielles de premier ordre. — § 24. Transformation la plus générale dans la forme réduite d'une expression

différentielle. — § 25. L'équivalence des expressions différentielles à invariant pair $p = 2r$. — § 26. L'équivalence des expressions différentielles à invariant impair $p = 2r + 1$. — § 27. Transformation d'une expression différentielle en une autre qui a moins de variables.

Lipschitz (*R.*). — Observations sur le principe de Gauss. (316-342).

M. Lipschitz montre en quoi consiste la généralisation du principe de Gauss pour n variables indépendantes. A cet effet, il discute surtout la forme analytique de ce principe; car, comme Gauss n'a pas donné lui-même cette forme, il est possible d'interpréter son expression *mouvement libre* d'un point de deux manières différentes : à savoir, ou l'on a choisi les composantes de la vitesse des points matériels, de sorte qu'elles soient d'accord avec les l équations de conditions $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, ..., $\Phi_l = 0$, ou elles ont été choisies de manière à être en contradiction avec ces équations. Cette dernière supposition se trouve être inadmissible. Après cela M. Lipschitz parvient, à l'aide de sa théorie des formes quadratiques de différentielles, à généraliser le principe de Gauss pour n variables.

Hermite (*Ch.*). — Extrait d'une Lettre adressée à M. Fuchs. (343-347).

Wangerin (*A.*). — Note relative au Mémoire sur un système de surfaces triplement orthogonales, p. 145 du même volume. (348).

E. L.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé par J. LIOUVILLE et continué par H. RESAL. — 3e série (¹).

Mathieu (*Ém.*). — Mémoire sur les équations du mouvement d'un système de corps. (1-20).

Ce Mémoire est conçu dans le même esprit que le Mémoire du même auteur sur le problème des trois corps, dont nous avons rendu compte récemment (*Journal des Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 345). On peut d'abord substituer à $n+1$ corps, supposés libres et s'attirant réciproquement, un système de n points fictifs également libres, sollicités par une même fonction de forces, et pour lesquels aient lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires.

Ce système sera rapporté à chaque instant à des axes d'inertie, qui passent par l'origine. Désignons sous le nom d'*équateur* l'un des plans principaux. Les n points seront déterminés par leurs distances au plan de l'équateur et les coordonnées polaires de leurs projections sur ce plan. L'axe polaire sera la droite L suivant laquelle

---

(¹) Voir *Bulletin*, 2e série, t. I₂, p. 327.

le plan touche son enveloppe, ou la droite S suivant laquelle il rencontre le plan invariable du système. Quant au plan de l'équateur, il y a lieu d'étudier la façon dont il se déplace en roulant sur le cône lieu de la droite L, ainsi que le mouvement de la droite S. M. Mathieu fait cette étude en s'aidant de considérations géométriques : il parvient ainsi à une expression remarquable de la force vive, analogue à celle qu'il a obtenue dans le Mémoire que nous venons de citer, et il est conduit à $6n - 4$ équations canoniques, dont le principe des forces vives donne une première intégrale, et dont l'intégration complète résoudrait entièrement le problème proposé. Le temps s'éliminant immédiatement de ces équations, le système des équations différentielles n'est réellement que de l'ordre $6n - 6$, résultat auquel était déjà parvenu M. Radau [1].

M. Mathieu étend ensuite la solution du même problème au cas de n points sollicités par une même fonction de forces, mais soumis à certaines liaisons, de façon toutefois que le principe des forces vives et les trois intégrales des aires soient encore applicables : l'ordre du système d'équations différentielles est alors $6n - 6 - 2r$, r désignant le nombre des équations qui expriment les liaisons.

Selling (*Ed.*). — Les formes quadratiques binaires et ternaires. (21-60 et 153-206).

I. *Formes binaires définies.* — Nouvelles conditions de réductions. Coefficients homogènes. Rapports géométriques.

II. *Formes binaires indéfinies.* — (*a*). Les conditions de réduction ramenées à celles des formes positives. (*b*) Périodes. Réduites spéciales. (*c*) Les réduites principales de M. Hermite. (*d*) L'invariant, nombre carré négatif.

III. *Formes ternaires définies.* — (*a*) Coefficients homogènes. Nouvelles conditions de réduction. (*b*) Les transformations des formes en elles-mêmes. (*c*) Relations géométriques.

IV. *Formes ternaires indéfinies.* — (*a*) Relations entre les formes positives correspondantes. Formes réduites. (*b*) Points angulaires des champs de formes réduites. Axes de symétrie. (*c*) Manière de trouver les champs. (*d*) Réunion des points de croisement en territoires. Développement immédiat de ces territoires. (*e*) Les transformations des formes en elles-mêmes. (*f*) Des formes par lesquelles on peut rationnellement représenter le nombre zéro.

Collet (*J.*). — Sur le raccordement de deux alignements droits d'une ligne de chemin de fer horizontale. (61-78).

Lorsqu'un train de chemin de fer circule sur une voie courbe, on est amené à donner au rail extérieur un *surhaussement* ou *dévers* en rapport avec la courbure de la ligne et les limites des vitesses du train, afin que, la pesanteur s'opposant à la tendance que les voitures, en vertu de la force centrifuge, ont à se déplacer suivant le prolongement du rayon de courbure de la voie, la stabilité du train soit assurée. Les règles relatives au passage de l'alignement droit à la courbe et à la distribution des dévers dans le raccordement varie avec les Compagnies. M. Collet traite la question analytiquement.

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XIV.

Resal (*H.*). — Développements sur la question du mouvement d'un point matériel sur une surface. (79-98).

Le savant directeur du *Journal de Mathématiques* revient sur cette question traitée déjà bien des fois, mais non encore épuisée. Nous signalerons les théorèmes suivants :

La composante de la force extérieure suivant la perpendiculaire à la vitesse comprise dans le plan tangent est égale au produit de la vitesse par la courbure géodésique de la trajectoire.

La réaction de la surface est égale au quotient du carré de la vitesse par le rayon de courbure de la section normale menée par la direction de cette vitesse, diminué de la composante de la force extérieure normale à la surface, le sens positif de cette composante étant celui de la réaction.

Si les composantes de la force extérieure sont

$$X = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

et si

$$F(x, y, z) = 0$$

est l'équation de la surface, la trajectoire est déterminée par cette dernière équation et la suivante, où C désigne une constante,

$$(2\Psi + C)\left[\frac{dz^2}{ds^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dz}\right) + \frac{dx^2}{ds^2}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dy^2}{ds^2}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{dy}\right)\right]$$
$$= \left(\frac{dy}{ds}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{dz}{ds}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(\frac{dz}{ds}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{dy}{dc}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{d\Psi}{dz};$$

M. Resal donne ensuite des applications aux cas où la surface considérée est un cylindre, un hélicoïde gauche, une surface de révolution, une sphère.

Breton (*de Champ*). — Mémoire sur les lignes de faîte et de thalweg que l'on est conduit à considérer en topographie. (99-114).

En étudiant le réseau des lignes de plus grande pente d'une surface, on est amené à distinguer dans l'étendue de celle-ci un certain nombre de régions, auxquelles on peut donner le nom de *versants*, en vertu d'une analogie facile à saisir : chaque versant se termine dans sa partie supérieure à une ligne de *faîte*, dans sa partie inférieure à une ligne de *thalweg;* les lignes de faîte et de thalweg sont elles-mêmes des lignes de plus grande pente; une ligne ordinaire de plus grande pente partant d'un point voisin d'une ligne de faîte, descend en s'éloignant de cette dernière pour se rapprocher de la ligne de thalweg qui règne à la base du versant. M. Breton (de Champ) montre que *les équations des projections horizontales des lignes de faîte et de thalweg d'une surface sont nécessairement comprises parmi celles des intégrales de l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente de cette surface, qui peuvent être obtenues sans passer par l'intégrale générale de cette équation*, et applique cette proposition à la recherche des *lignes de faîte et de thalweg* de diverses surfaces simples.

En supposant $\Psi = 0$, on retombe naturellement sur l'équation différentielle des lignes géodésiques.

Resal (*H.*). — Recherches sur la poussée des terres et la stabilité des murs de soutènement. (115-146).

Boussinesq (*J.*). — Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans se croisant en un même point d'un corps, et sur celle des déformations qui se produisent autour d'un tel point. (147-152).

Bonnet (*O.*). — Extrait d'une lettre à M. Resal. (207-212).

M. Bonnet donne une démonstration simple des équations de Lagrange dans le cas d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface.

Flye Sainte-Marie (*C.*). — Note sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, dans un cas particulier. (213-215).

L'auteur démontre le théorème suivant : *Lorsqu'un corps tourne autour d'un point fixe sous l'action de forces dont le moment autour de l'axe instantané de rotation est constamment nul, la vitesse de rotation est proportionnelle au rayon vecteur de l'ellipsoïde d'inertie dirigé dans le sens de cet axe;*

Réciproquement, cette proportionnalité exige que la somme des moments des forces autour de l'axe instantané de rotation soit nulle.

Mathieu (*Ém.*). — Sur le problème des trois corps (Extrait d'une lettre à M. Resal). (216-218).

Levy (*M.*). — Mémoire sur la Théorie des plaques élastiques planes. (219-306).

Les formules données par Poisson et par Kirchhoff, pour représenter la flexion d'une plaque mince, conduisent à la même équation aux dérivées partielles du quatrième ordre; mais celle de Poisson comporte trois conditions à la surface, celle de Kirchhoff n'en comporte que deux : si les forces agissantes ne sont pas telles que les trois conditions de Poisson se réduisent à deux, on a affaire à un problème d'analyse impossible; ce qui ne peut arriver avec les formules de Kirchhoff, dont, en conséquence, on a généralement admis la théorie. Y avait-il une erreur dans les raisonnements de Poisson? M. Boussinesq a essayé de le prouver (*Journal de Liouville*, t. XVI); telles ne sont pas les conclusions de M. Levy : il montre que les deux théories, fondées toutes les deux sur des hypothèses approchées, ne s'appliquent toutes les deux qu'aux mêmes cas particuliers, et, lorsqu'elles sont valables, conduisent aux mêmes résultats, seulement les formules de Poisson manifestent d'elles-mêmes leur insuffisance lorsqu'elles donnent lieu à des équations contradictoires; et, dans les mêmes cas, celles de Kirchhoff donnent lieu à un système d'équations différentielles, qu'on peut résoudre, au point de vue analytique, mais qui ne convient pas à la solution du problème physique.

Au lieu de considérer, dès l'abord, une question d'approximation, M. Levy traite un certain nombre de problèmes rigoureux, relatifs à des cylindres de hauteur quelconque; il arrive ainsi à plusieurs résultats intéressants et de nature à élucider le problème des plaques; ainsi « quelles que soient les pressions exercées sur la

surface latérale d'un corps cylindrique sur la masse entière et sur les bases duquel n'agissent pas de forces, il est impossible qu'une ligne matérielle, naturellement droite et perpendiculaire sur les deux bases, se transforme, par suite de la déformation élastique, en une courbe algébrique d'un degré supérieur au troisième; pour qu'elle puisse se transformer en une courbe algébrique, il faut qu'entre la résultante de translation et le moment résultant des pressions agissant le long de chacune des génératrices de la surface latérale il existe une certaine relation. »

Les résultats relatifs à des cylindres de hauteur quelconque une fois obtenus, on peut les appliquer à des plaques; cette marche est assurément plus nette que celle qui consiste à faire des approximations sur les équations aux dérivées partielles qui servent de point de départ.

Le problème mis en équation en faisant abstraction des forces telles que la pesanteur agissant sur la masse entière de la plaque, l'auteur, pour introduire ces forces, modifie la forme des fonctions qui entrent dans les équations de façon telle que, sans cesser de satisfaire aux conditions sur les bases, lesquelles ne changent pas, elles puissent satisfaire aux nouvelles équations d'équilibre intérieur résultant de l'introduction des forces agissant sur la masse de la plaque et aux nouvelles conditions sur la surface latérale.

Cette théorie est appliquée à l'équilibre et au mouvement de la plaque circulaire, soit libre, soit appuyée, soit encastrée sur son pourtour. Dans le cas de l'équilibre, on obtient, en termes finis, la flèche au centre de la plaque, appuyée ou encastrée, quelle que soit la répartition des forces extérieures; dans le cas du mouvement, le mouvement vibratoire du centre de la plaque ne dépend que des déplacements moyens et des vitesses moyennes sur les circonférences concentriques à la plaque et non des déplacements initiaux et vitesses initiales imprimés à chaque point. Enfin, si l'on suppose tout symétrique autour du centre, les formules de M. Levy coïncident avec celles de Poisson, qui, dans ce cas particulier, le seul qu'il ait traité, se trouvent satisfaire à toutes les conditions du problème.

Resal (*H.*). — De la déformation qu'éprouve une pièce à simple ou à double courbure sous l'action de forces qui lui font subir en même temps une flexion et une torsion. (307-322).

Breton (*de Champ*). — Extrait d'une lettre à M. Resal. (323-324).

Au sujet d'un Mémoire, publié en 1840, *Sur les forces centrifuges développées dans les corps qui roulent.*

Laisant (*A.*). — Applications mécaniques du Calcul des quaternions. (325-400).

Première Partie : *Cinématique.* — Étude du mouvement d'un point matériel. — Mouvement d'un solide autour d'un point fixe. — Mouvements relatifs. Théorème de Coriolis.

Deuxième Partie : *Statique.* — Représentation des forces, des moments et des couples. — Centres de gravité. — Équilibre d'un corps solide. Composition générale des forces. — Moments d'inertie.

Troisième Partie : *Dynamique.* — Équation générale de la Dynamique. — Mou-

vement d'un corps solide autour d'un point fixe. — Mouvement d'un système de points matériels libres s'attirant réciproquement en raison inverse des carrés de leurs distances. — Mouvement d'un point matériel libre sollicité par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance. — Pendule de Foucault.

Saint-Germain (*A. de*). — Mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde. (401-414).

L'auteur s'occupe des lignes décrites par un point pesant, ou lignes de *thalweg*, sur un paraboloïde elliptique ou hyperbolique

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0,$$

dont l'axe est vertical. En partant des équations ordinaires du mouvement d'un point sur une surface, il obtient une équation de premier ordre à laquelle doivent satisfaire les lignes de thalweg. Quand on considère la projection sur le plan des xy, les variables x, y ne se séparent pas; mais l'intégration peut être ramenée aux quadratures en introduisant les paraboloïdes

$$\frac{x^2}{\lambda-p}+\frac{y^2}{\lambda-q}=\lambda-2z,\quad \frac{x^2}{p-\mu}-\frac{y^2}{\mu-q}=2z-\mu,$$

homofocaux du proposé; l'équation des lignes de thalweg prend alors la forme

$$\frac{\sqrt{\lambda}\pm d\lambda}{\sqrt{-f(\lambda)(\lambda-p)(\lambda-q)}}=\frac{\pm d\mu\sqrt{\mu}}{\sqrt{f(\mu)(p-\mu)(\mu-q)}},$$

où

$$f(u)=gu^2-(2h+gp+gq)u+cpq.$$

La méthode de Jacobi conduit ensuite naturellement à l'équation qui détermine la loi du mouvement sur cette ligne. M. de Saint-Germain étudie avec détail la forme des lignes de thalweg, et démontre, en particulier, une propriété analogue à celle que M. Puiseux a établie, dans le tome VII du *Journal de Mathématiques*, sur la différence d'azimut des points où la hauteur d'un pendule sphérique est maximum.

Enfin, en supposant que l'action de la pesanteur devienne nulle, l'équation des lignes de thalweg se réduit à celle des lignes géodésiques du paraboloïde; il y a quelque intérêt à considérer ces dernières directement, au lieu de n'en faire qu'un cas particulier des lignes géodésiques sur les surfaces du second ordre.

Francke (*J.*). — Sur la courbure des surfaces réciproques. (415-421).

Si l'on considère une surface réglée (S), l'une de ces génératrices S est la génératrice infiniment voisine S′ la perpendiculaire commune T à ces deux génératrices; engendre une seconde surface réglée (T), que Bour a appelée la *surface réciproque* de (S). M. Francke étudie la relation entre les courbures *centrales* des deux surfaces, c'est-à-dire leurs courbures aux points centraux sur les génératrices correspondantes. Menons par l'origine des coordonnées le cône directeur de la surface (S) et décrivons, de ce même point comme centre, une sphère de rayon 1; la sphère coupera le cône, suivant une courbe que l'on peut appeler l'*indicatrice sphérique* de

la surface proposée; soit $\frac{1}{r}$ la courbure géodésique de cette indicatrice et f l'angle < 180 degrés que la ligne de striction fait avec la génératrice S; soient enfin $\frac{1}{r_1}$, f_1 les quantités analogues relatives à la surface (T), on aura

$$\frac{1}{r}\frac{1}{r_1} = \cot f.\ \cot f_1.$$

M. Francke applique ses recherches à la détermination du pas réduit λ des hélices élémentaires, décrites simultanément par les points d'un corps solide se mouvant dans l'espace, il trouve

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{-K}}\ \frac{\cot f - \cot \varphi}{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho}},$$

où K est la courbure centrale de l'une ou de l'autre des deux surfaces réglées (S) et (Σ), telles que le roulement, avec glissement de (Σ) sur (S), reproduise le mouvement du corps solide, r et f étant les quantités précédemment définies, relatives à la première surface, ρ et φ les quantités analogues relatives à la seconde.

Allégret. — Note sur le problème des trois corps. (422-425).

Réplique à M. Ém. Mathieu.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

Tome LXXXVI; 1878, 1er semestre.

N° 1; 7 janvier.

Faye. — Présentation du premier volume des « Annales du Bureau des Longitudes ». (18).

Phillips. — Sur un nouveau spiral réglant plat des chronomètres et des montres. (26).

Caligny (A. de). — Sur le rendement et les propriétés d'un nouveau bélier aspirateur sans réservoir d'air, pouvant tirer l'eau de toutes les profondeurs. (32).

Amigues (E.). — Sur la quartique de Steiner. (38).

---

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 22.

Serret (*P.*). — Sur un principe unique, contenant toute la théorie des courbes et des surfaces d'ordre ou de classe quelconque. (39).

Gilbert (*Ph.*). — Sur un théorème de M. *Villarceau;* remarques et conséquences. (42).

N° 2; 14 janvier.

Faye. — Sur le récent tornado d'Ercildoun (comté de Chester, Pennsylvanie). (83).

Favé. — Les vibrations de la matière et les ondes de l'éther; conséquences vraisemblables du fait qui sert de base à la Théorie mécanique de la chaleur. (92).

Secchi (le P.). — Observations des protubérances solaires, pendant le premier semestre de l'année 1877. (98).

Boussinesq (*J.*). — Sur la question des conditions spéciales au contour des plaques élastiques. (108).

Lévy (*M.*). — Sur une application industrielle du théorème de Gauss, relatif à la courbure des surfaces. (111).

Escary. — Sur les fonctions qui naissent du développement de l'expression $(1 - 2\alpha x + a^2\alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}}$. (114).

Serret (*P.*). — Sur un théorème de M. *Chasles.* (116).

Lipschitz (*R.*). — Sur la fonction de Jacques Bernoulli et sur l'interpolation. (119).

N° 4; 28 janvier.

Prix des Sciences mathématiques, proposés pour 1878, 1879, 1880, et 1883.

Grand prix des Sciences mathématiques (1878). — Application de la théorie des transcendantes elliptiques ou abéliennes à l'étude des courbes algébriques.

Grand prix des Sciences mathématiques (1878). — On sait que le grand axe de l'orbite qu'une planète décrit autour du Soleil n'est affecté d'aucune inégalité séculaire de l'ordre des deux premières puissances des masses perturbatrices. Examiner s'il existe dans la valeur de ce grand axe des inégalités séculaires de l'ordre du cube des masses et, dans le cas où ces inégalités ne se détruiraient pas rigoureusement, donner le moyen d'en calculer la somme, au moins approximativement.

Grand prix des Sciences mathématiques (1878). — Étude de l'élasticité des corps cristallisés, au double point de vue expérimental et théorique.

Prix Poncelet (1878). — Décerné à l'auteur de l'ouvrage le plus utile aux progrès des Sciences mathématiques pures et appliquées.

Prix Montyon (1878). — Mécanique.

Prix Plumey (1878). — Décerné à l'auteur du perfectionnement le plus important relatif à la construction d'une ou de plusieurs machines hydrauliques, motrices ou autres.

Prix Dalmont (1879). — Décerné aux ingénieurs des Ponts et Chaussées qui auront présenté à l'Académie le meilleur travail ressortissant d'une de ses Sections.

Prix Fourneyron (1879). — Décerné au meilleur Mémoire ayant pour objet la construction d'une machine motrice propre au service de la traction des tramways.

Prix Bordin (1878). — Trouver le moyen de faire disparaître ou au moins d'atténuer sérieusement la gêne et les dangers que présentent les produits de la combustion sortant des cheminées sur les chemins de fer, sur les bâtiments à vapeur, ainsi que dans les villes à proximité des usines à feu.

Prix Lalande (1878). — Astronomie.

Prix Damoiseau (1879). — Revoir la théorie des satellites de Jupiter; discuter les observations et en déduire les constantes qu'elle renferme, et particulièrement celle qui fournit une dé-

termination directe de la vitesse de la lumière; enfin construire des Tables particulières pour chaque satellite.

Prix Valz (1878). — Décerné à l'auteur de l'observation astronomique la plus intéressante qui aura été faite dans le courant de l'année.

N° 5; 4 février.

Lœwy et *Perrier*. — Détermination télégraphique de la différence de longitude entre Paris et l'Observatoire du Dépôt de la guerre, à Alger (colonne Voirol). (261).

Mouchez (*E.*). — Instrument portatif pour la détermination des itinéraires et des positions géographiques dans les voyages d'exploration par terre. (267).

Abbadie (*A. d'*). — Remarques relatives à la Communication précédente. (270).

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (271).

Favé. — Les vibrations de la matière et les ondes de l'éther dans la phosphorescence et la fluorescence. (289).

Dubois (*P.*). — Vibrations transversales des liquides. (295).

Perrotin. — Découverte d'une petite planète à l'Observatoire de Toulouse. (300).

Cottenot. — Découverte d'une petite planète à l'Observatoire de Marseille. (300).

Lemoine (*J.*). — Note sur quelques conséquences du théorème de M. *Villarceau*. (301).

Hatt. — Sur l'emploi des méthodes graphiques pour la prédiction des occultations ou éclipses. (303).

Levy (*M.*). — Quelques observations sur une nouvelle Note de M. *Boussinesq* relative à la théorie des plaques élastiques. (304).

Pépin (le P.). — Sur la formule $2^n - 1$. (307).

Picquet. — Sur le déterminant dont les éléments sont tous les mineurs possibles d'ordre donné d'un déterminant donné. (310).

Lamey (le P.). — Sur l'analogie du réseau photographique du Soleil et des cratères de la Lune. (312).

Brioschi (*F.*). — Sur l'équation de Lamé. (313).

Cornu (*A.*). — Sur les raies sombres du spectre solaire et la constitution du Soleil. (315).

Lockyer (*N.*). — Les éléments présents dans la couche du Soleil qui produit le renversement des raies spectrales. (317).

Mascart. — Sur la réfraction des gaz et des vapeurs. (321).

Crookes (*W.*). — Sur la répulsion résultant de la radiation lumineuse (323).

Renou (*E.*). — Différences barométriques entre stations voisines. (358).

Broun (*J.-A.*).— Remarques, à propos d'une Communication précédente de M. *Faye,* sur les relations entre les phénomènes du magnétisme terrestre et la rotation du Soleil. (361).

N° 6; 11 février.

Tisserand (*F.*). — Observations des phénomènes des satellites de Jupiter, faites à l'Observatoire de Toulouse. (374).

Boileau (*P.*). — Notions concernant le travail intermoléculaire. (378).

Cottenot. — Observations de la planète (181), découverte à l'Observatoire de Marseille. (381).

Palisa. — Découverte de deux petites planètes, à l'Observatoire de Pola. (382).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte d'une petite planète à Clinton (New-York). (382).

Laguerre. — Sur le développement d'une fonction suivant les puissances d'un polynôme. (383).

Serret (*P.*). — Sur les foyers des courbes de $n^{\text{ième}}$ classe. (385).

Broun (*J.-A.*). — Nouvelles observations relatives aux relations entre les phénomènes du magnétisme terrestre et la rotation du Soleil. (388).

N° 7; 18 février.

Villarceau (*Y.*). — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. *G.-B. Airy*), et à l'Observatoire de Paris, pendant le quatrième trimestre de l'année 1877. (420).

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (422).

Favé. — Les vibrations de la matière et les ondes de l'éther dans la vision. (441).

Roche (*Éd.*). — Remarques sur les satellites de Mars. (443).

Sylvester (*J.*). — Sur la loi de réciprocité pour les invariants et covariants des quantics binaires. (446).

Sylvester (*J.*).— Sur la théorie des formes associées de MM. *Clebsch* et *Gordan.* (448).

Leveau (*G.*). — Théorie de Vesta. Perturbations dépendant de la première puissance des masses perturbatrices. (458).

Boussinesq (*J.*). — Sur les conditions spéciales au contour des plaques. (461).

Levy (*M.*). — Sur les conditions pour qu'une forme quadratique de n différentielles puisse être transformée de façon que ses coefficients perdent une partie ou la totalité des variables qu'ils renferment. (463).

Genocchi (*A.*). — Sur la formule sommatoire de Maclaurin et les fonctions interpolaires. (466).

R. G.

N° 8; 25 février.

Faye. — Note sur une nouvelle brochure de M. *Hirn,* intitulée : « La Musique et l'Acoustique ». (519).

Faye. — Sur les dernières Communications de M. *Broun,* et sur une Note de M. *Jenkins,* relatives aux taches du Soleil et au magnétisme terrestre. (520).

Favé. — Les vibrations de la matière et les ondes de l'éther dans l'ébullition. (524).

La Gournerie (de). — Rapport sur un Mémoire de M. *Haton de la Goupillière,* relatif aux lignes engendrées dans le mouvement d'une figure plane. (527).

Cornu (A.). — Sur quelques conséquences de la constitution du spectre solaire. (530).

Darboux (G.). — Sur les équations différentielles du premier ordre et du premier degré. (533).

N° 9; 4 mars.

Favé. — Les vibrations de la matière et les ondes de l'éther dans les combinaisons photochimiques. (560).

Cornu (A.) et *Baille (J.-B.).* — Étude de la résistance de l'air dans la balance de torsion. (571).

Peters (C.-H.-F.). — Découverte d'une petite planète, à Clinton (New-York). (581).

Perrotin. — Théorie de Vesta. (581).

Darboux (G.). — De l'emploi des solutions particulières d'une équation différentielle du premier ordre et du premier degré, dans la recherche de l'intégrale générale. (584).

Fouret (G.). — Sur les points fondamentaux du faisceau de courbes planes, défini par une équation différentielle du premier ordre algébrique. (586).

Callandreau (*O.*). — Sur la formule sommatoire de Maclaurin. (589).

Duclaux (*E.*). — Sur les forces élastiques des vapeurs émises par un mélange de deux liquides. (592).

N° 10; 11 mars.

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (622).

Favé. — Les vibrations de la matière et les ondes de l'éther dans les combinaisons chimiques. (640).

Cornu (*A.*). — Sur la polarisation elliptique par réflexion à la surface des corps transparents. (649).

Palisa. — Découverte d'une petite planète à l'Observatoire de Pola. — Observations de petites planètes. (653).

Fouret (*G.*). — Sur les points fondamentaux du réseau de surfaces défini par une équation aux dérivées partielles du premier ordre algébrique linéaire par rapport à ces dérivées. (654).

Picard (*E.*). — Sur une classe de fonctions transcendantes. (657).

Quet. — Sur les variations du magnétisme terrestre. (660).

N° 11; 18 mars.

Faye. — Mouvement de translation des cyclones; théorie du « rain motor ». (693).

Cornu (*A.*) et *Baille* (*J.-B.*). — Sur la mesure de la densité moyenne de la Terre. (699).

N° 12; 25 mars.

Tacchini. — Résultats des opérations faites en 1877, au bord du Soleil, sur les raies *b* et 1474 *k*. (756).

Beuf et *Perrin.* — Considérations nouvelles sur l'observation et la réduction des distances lunaires en mer. (758).

Broun. — Sur la période de rotation des taches solaires. (773).

N° 13; 1er avril.

Hermite (Ch.). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (777).

Saint-Venant (de). — Des paramètres d'élasticité des solides et leur détermination expérimentale. (781).

Faye. — Sur les mouvements des tempêtes. (792).

Belgrand. — Sur les tourbillons des cours d'eau. (798).

Quet. — Action que le Soleil exerce sur les fluides magnétiques et électriques de la Terre. (808)

Tannery (J.). — Sur l'équation différentielle qui relie au module la fonction complète de première espèce. (811).

Lévy (M.). — Sur la Cinématique des figures continues sur les surfaces courbes et, en général, dans les variétés planes ou courbes. (812).

Boussinesq (J.). — Calcul des dilatations éprouvées par les éléments matériels rectilignes appartenant à une petite portion d'une membrane élastique courbe que l'on déforme. (816).

Violle (J.). — Mesures actinométriques relevées en Algérie pendant l'été de 1877. (818).

Makarewitsch (J.). — Sur la réfraction astronomique. (821).

N° 14; 8 avril.

Hermite (Ch.). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques. (850).

Henry (Prosper). — Découverte d'une nouvelle petite planète, à l'Observatoire de Paris, le 6 avril 1878. (875).

Lévy (M.). — Sur les conditions que doit remplir un espace pour qu'on y puisse déplacer un système invariable, à partir de l'une quelconque de ses positions, dans une ou plusieurs directions. (875).

N° 15; 15 avril.

Faye. — Taches du Soleil et magnétisme. (909).

Bertrand (*J.*). — Sur l'homogénéité dans les formules de Physique. (916).

Stéphan (*E.*). — Observations des planètes (186) et (187), faites à l'Observatoire de Marseille. (947).

Lévy (*M.*). — Sur les conditions pour qu'une surface soit applicable sur une surface de révolution. (947).

Tannery (*J.*). — Sur quelques propriétés des fonctions complètes de première espèce. (950).

Appell. — Sur quelques applications de la fonction $\Gamma(x)$ et d'une autre fonction transcendante. (953).

Laguerre. — Sur le développement de $(x - z)^m$ suivant les puissances de $(z^2 - 1)$. (956).

Boussinesq (*J.*). — Théorie des mouvements quasi-circulaires d'un point pesant sur une surface de révolution creuse à axe vertical. (959).

Mathieu (*Ém.*). — Sur la définition de la solution simple. (962).

N° 16; 22 avril.

Cornu (*A.*) et *Baille* (*J.-B.*). — Influence des termes proportionnels au carré des écarts dans le mouvement oscillatoire de la balance de torsion. (1001).

Henry (*Paul*) et *Henry* (*Pr.*). — Observations de la planète (18.), faites à l'équatorial du jardin de l'Observatoire de Paris. (1007).

Tacchini (*P.*). — Observations des taches et des protubérances solaires, pendant le premier semestre de 1878. (1008).

Bigourdan (*G.*). — Sur les observations de Mercure, faites à la fin du siècle dernier, par Vidal, à Mirepoix. (1009).

Abbadie (*A. d'*). — Observations relatives à la Communication précédente. (1011).

Radau (*R.*). — Erreur commise dans une Note récente de M. Makarewitch. (1011).

Darboux (*G.*). — De l'emploi des solutions particulières algébriques dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles algébriques. (1012).

Escary. — Sur une proposition de Didon. (1014).

André (*D.*). — Sommation de certaines séries. (1017).

Mouchot. — Résultats d'expériences faites en divers points de l'Algérie, pour l'emploi industriel de la chaleur solaire. (1019).

N° 17; 29 avril.

Faye. — Remarques à l'occasion d'une Lettre de M. *Wolf*, de Zurich, sur la période des variations diurnes de la boussole de déclinaison. (1043).

Hébert (*F.-F.*). — Étude sur les grands mouvements de l'atmosphère et sur les lois de la formation et de la translation des tourbillons. (1059).

Lévy (*M.*). — Sur la composition des accélérations d'ordre quelconque et sur un problème plus général que celui de la composition des mouvements. (1068).

Pellet (*A.-E.*). — Sur la décomposition d'une fonction entière en facteurs irréductibles suivant un module premier p. (1071).

N° 18; 6 mai.

Faye. — Note, en réponse à M. *Broun*, sur la prétendue identité des périodes des taches solaires et de la variation diurne de la boussole de déclinaison. (1102).

Dupuy de Lôme. — Sur le nouveau Mémoire de M. *Bertin*, intitulé : « Observations de roulis et de tangage, faites avec l'oscillographe double, à bord de divers bâtiments »: (1110).

Picquet. — Analyse combinatoire des déterminants. (1118).

Cornu (*A.*). — Sur l'extension à la propagation de l'électricité des formules de Fourier relatives à la diffusion de la chaleur. (1120).

Schulhof. — Éléments de la comète II, 1873 (Tempel), et éphéméride pour 1878. (1124).

Broun. — Taches du Soleil et magnétisme. (1125).

Pellat. — De l'impossibilité de la propagation d'ondes longitudinales persistantes dans l'éther libre ou engagé dans un corps transparent. (1126).

N° 19; 13 mai.

Villarceau (*Y.*). — Observations sur la Lune, faites aux instruments méridiens de l'Observatoire de Paris, pendant l'année 1876. (1157).

Villarceau (*Y.*). — Théorie des sinus des ordres supérieurs. (1160).

Mouchez (*E.*). — Observation du passage de Mercure, le 6 mai, à l'Observatoire de Montsouris. (1166).

Reber.— Rapport sur deux Mémoires de M. *Achille Dien,* lesquels concernent : 1° les notes défectueuses des instruments à archet; 2° la résonnance de la septième mineure dans les cordes graves du piano. (1182).

Perrotin. — Observation du passage de Mercure du 6 mai 1878, faite à l'Observatoire de Toulouse. (1188).

Abbadie (*A. d'*).— Observations relatives à la Communication de M. Perrotin. (1189).

Faà de Bruno. — Sur la partition des nombres. (1189).

N° 20; 20 mai.

Villarceau (*Y.*). — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich et à l'Observatoire de Paris, pendant le premier trimestre de l'année 1878. (1215).

Villarceau (*Y.*). — Théorie des sinus des ordres supérieurs. (1216).

Gruey. — Théorèmes sur les accélérations simultanées des points d'un solide en mouvement. (1241).

Quet. — Sur les périodes qui, dans les phénomènes magnétiques de la Terre, dépendent de la vitesse de rotation du Soleil. (1244).

Guyou (*E.*). — Sur la Théorie complète de la stabilité de l'équilibre des corps flottants. (1246).

Tacchini (*P.*). — Observations du passage de Mercure, faites à Palerme, le 6 mai 1878. (1252).

Mannheim (*A.*). — De l'emploi de la courbe représentative de la surface des normales principales d'une courbe gauche pour la démonstration de propriétés relatives à cette courbe. (1254).

Laguerre. — Sur l'attraction qu'exerce un ellipsoïde homogène sur un point extérieur. (1257).

Faà de Bruno. — Sur la partition des nombres. (1259).

Boussinesq (*J.*). — Équilibre d'élasticité d'un sol isotrope sans pesanteur, supportant différents poids. (1260).

N° 21; 27 mai.

Villarceau (*Y.*). — Théorie des sinus des ordres supérieurs. (1287).

Phillips. — De la détermination des chaleurs spécifiques, à pression constante et à volume constant, d'un corps quelconque, et de celle de sa fonction caractéristique. (1290).

André (*D.*).—Sur les développements, par rapport au module, des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$, et de leurs puissances. (1323).

Pellat (*A.*). — Sur la transformation que subissent les formules de Cauchy, relatives à la réflexion de la lumière à la surface d'un corps transparent, quand on suppose une épaisseur sensible à la couche de transition. (1325).

N° 22; 3 juin.

Phillips. — De la détermination des chaleurs spécifiques, à pression constante et à volume constant, d'un corps quelconque, et de celle de sa fonction caractéristique. (1351).

Faye. — Détermination directe en mer de l'azimut de la route d'un navire. (1357).

Léauté (H.). — Engrenages à épicycloïdes et à développantes. Détermination du cercle à prendre pour le profil des dents. (1371).

André (Ch.). — Résultats des observations du passage de Mercure. (1380).

Observations du passage de Mercure aux États-Unis. (Extraits du *New-York Times*). (1383).

Schering (E.). — Théorie analytique des déterminants. (1387).

Gilbert (Ph.). — Sur le problème de la composition des accélérations d'ordre quelconque. (1390).

Lévy (M.). — Remarque, au sujet d'une Note de M. *Phillips*, sur la détermination des chaleurs spécifiques. (1391).

N° 23; 10 juin.

Villarceau (Y.). — Détermination des racines imaginaires des équations algébriques. (1427).

Sylvester (J.). — Détermination d'une limite supérieure au nombre total des invariants et covariants irréductibles des formes binaires. (1437).

Escary. — Sur les fonctions qui naissent du développement de l'exposition $(1 - 2\alpha x + a^2\alpha^2)^{\frac{2l+1}{2}}$. (1451).

Plarr. — Note relative aux §§ 439, 440 du « Traité élémentaire des quaternions » de M. *Tait*. (1454).

N° 24; 17 juin.

Phillips. — Sur les résultats fournis par les chronomètres munis de spiraux à courbes terminales théoriques, au concours de 1877, à l'Observatoire de Neuchâtel. (1479).

Sylvester (*J.*). — Détermination d'une limite supérieure au nombre total des invariants et covariants irréductibles des formes binaires. (1491).

Serres (l'amiral). — Observation des passage de Mercure à Paita. (1496).

André (*D.*). — Sur les développements des fonctions $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$ suivant les puissances croissantes du module. (1498).

N° 25; 24 juin.

Hermite (*Ch.*). — Sur la théorie des fonctions sphériques. (1515).

Sylvester (*J.*). — Sur le système complet des invariants et covariants irréductibles appartenant à la forme binaire du huitième degré. (1519).

Plantamour. — Sur le déplacement de la bulle des niveaux à bulle d'air. (1522).

Abbadie (*A. d'*). — Observations relatives à la Communication précédente. (1528).

Schulhof. — Éphéméride de la comète II, 1873. (1536).

Léauté (*H.*). — Étude sur le rapprochement de deux axes de courbe voisins, considérés dans une étendue finie. Application au cas d'un cercle et d'un arc de courbe ayant deux sommets voisins.

Potier. — Sur la direction des cassures dans un milieu isotrope. (1539).

Časopis pro pěstovaní Mathematiky a Fysiky, kterýž se zvláštním zřetelem k studujícím rediguje Dr. F.-J. Studnička, a vydává Jednota českých mathematiků (¹).

Tome VI; 1877.

Hromádko (*Fr.*). — Biographies de Fresnel et de Malus, d'après Arago. (1-9, 59-68, 105-111).

Bečka (*B.*). — Sur les points d'inflexion. (10-20).

Hoza (*F.*). — Contribution à la Théorie des déterminants mineurs. (21-34).

Studnička (*F.-J.*). — Remarque sur la Géométrie analytique. (35-40).

Baudys (*V.*). — L'œil réduit. (40-46).

Calcul de l'effet optique de l'œil humain normal, d'après les mesures de ses dimensions et des indices de réfraction de ses diverses parties, prises par Listing et vérifiées par Helmholtz.

Studnička (*F.-J.*). — Éléments de la théorie des déterminants, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire. (49-58, 97-105, 202-218).

Pánek (*A.*). — Sur l'espérance mathématique et morale. (69-76, 122-130, 218-224).

Seydler (*A.*). — Aperçu sur les progrès récents en Astronomie. (77-86, 111-122).

Hoza (*F.*). — Multiplication des déterminants, déduite de la théorie des combinaisons. (87-89).

Pelnář (*M.*). — Comment on peut obtenir l'aire du cercle. (89-91).

Jarolímek (*Č.*). — Remarque sur les séries arithmétiques. (91-92).

(¹) Voir *Bulletin* VI, 88; VII, 260; VIII, 122; XI, 79.

Studnička (*Al.*). — Sur la trisection de l'angle. (92-93).

D'après le *Scientific American*.

Hromádko (*Fr.*). — Le martohodographe, nouvel appareil de Physique. (93-94).

Cet appareil sert à représenter clairement le mouvement de la planète Mars, tel que nous l'observons sur la voûte du ciel.

Koláček (*Fr.*). — Sur les prismes de quartz taillés parallèlement à l'axe du cristal. (131-136, 225-235).

Hoza (*F.*). — Appareil propre à représenter les fonctions goniométriques. (137-138).

Zahradník (*K.*). — Sur le lieu d'un point dont la polaire relative à une conique détermine une corde de longueur constante. (139-142).

Fürst (*J.*). — Remarque relative aux polyèdres réguliers. (142-143).

Gruss (*G.*). — Remarque sur les proportions. (143).

Studnička (*F.-J.*). — Carl Friedrich Gauss. A l'occasion du centenaire de sa naissance. (145-174).

Introduction. Vie de Gauss. Caractère de Gauss. Travaux mathématiques de Gauss.

Kořistka (*K.*). — Sur les travaux et les inventions de Gauss concernant la Géodésie. (174-183).

Seydler (*A.*). — Sur les travaux astronomiques de Gauss. Sur les travaux de Physique de Gauss. (184-196).

Studnička (*F.-J.*). — Gaussiana. (197-200).

Pánek (*A.*). — Sur les triangles rationnels. (235-245).

Hoza (*F.* — Quelques propriétés des polyèdres réguliers convexes, à l'usage des élèves de l'enseignement moyen. (245-257).

Zahradník (*K.*). — Transformation des coordonnées rectangulaires. (257-262).

Gruss (*G.*). — Sur la détermination de l'inclinaison magnétique. (263-266).

Machovec (*F.*). — Démonstration simple de deux propositions sur les triangles dont les sommets sont situés sur trois droites concourant en un même point. (266-269).

Strnad (*A.*). — Sur les triangles et les quadrilatères. (269-273).

Šimerka (*V.*). — La *règle conjointe* relative aux congruences de nombres. (274-277).

Pastorček (*J.-M.*). — Contribution à l'évaluation du carré d'un nombre. (277-278).

Pelnář (*M.*). — Sur les sommes des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres de la série naturelle. (279-280).

Tome VII; 1878.

Hromádko (*F.*). — Biographie d'Alexandre Volta, d'après Arago. (1-8 et 49-59).

Hejzlar (*Fr.*). — Logarithmes hyperboliques. Aperçu historique. (8-19).

Seydler (*A.*). — Revue des progrès récents de l'Astronomie. (20-30, 55-77, 157-168 et 201-213).

II. Le Soleil. — 1. Aperçu historique. 2. Observations télescopiques sur le disque du Soleil. 3. Observations télescopiques sur le bord du Soleil. 4. Observations spectroscopiques sur le disque du Soleil.

Studnicka (*F.-J.*). — Remarque sur la théorie des déterminants. (31-33).

Houdek (*Fr.*). — Remarques sur quelques appareils de Physique. (33-43, 130-136 et 176-182).

1. Modèle des balances décimales de Neumann. 2. Appareil pour l'expérience d'Archimède. 3. Appareil à ondes de Mach. 4. Appareil à ondes de Wheatstone. 5. Double machine électrique de Poggendorff. 6. Machine électrique de Holtz. 7. Machine électrique à disques de caoutchouc.

8. Électromoteur de Martin Egger. 9. Appareil de Lippich pour la chute des graves. 10. Modèle de machine à vapeur à cylindre de verre.

11. Batterie à hélice de Smee. 12. Photomètre de Zenger. 13. Électroscope de Mach. 14. Appareil de Mach pour la réfraction et la réflexion de la lumière.

Hajniš (*Lad.*). — Quelques mots sur la démonstration de cette

assertion, que la cause du mouvement se trouve en dehors de la masse mobile. (43-47).

Pánek (*A.*). — Sur l'espérance mathématique et morale (2e article). (78-91).

Zahradník (*K.*). — Sur la liaison entre les critériums de convergence des séries infinies. (91-102).

Critériums de Cauchy, de Raabe, de Gauss, de Schlömilch, de Stern, d'Olivier.

Odstrčil (*J.*). — Nouvelle méthode pour calculer les racines des équations numériques du second degré. (102-113).

Kolářik (*A.*). — Le folium de Descartes. (113-121 et 146-157).

1 et 2. Différentes formes de l'équation du folium. 3. Interprétation des équations précédentes. 4. Sécantes du folium.

5. Tangente du folium. 6. Normale et développée. 7. Tangente, normale, soustangente et sous-normale. 8. Dépendance entre le cercle et le folium. 9. Construction du folium.

Machovec (*F.*). — Sur l'usage de quelques théorèmes de la Géométrie de position dans la Planimétrie et la Géométrie descriptive. (121-130).

Zahradník (*K.*). — Sur quelques courbes dérivant des sections coniques. (168-173).

Plašil (*J.*). — Contribution physique à la théorie des quantités imaginaires. (173-175).

Zdráhal (*Al.*). — Démonstration d'un théorème sur les coefficients binomiaux à l'aide du Calcul des probabilités. (175-176).

Hromádko (*Fr.*). — François Bacon de Verulam, réformateur des Sciences. (185-195).

Studnička (*F.-J.*). — La Voie lactée (195-201).

Procházka (*B.*). — Sur la projection stéréographique des surfaces du second degré en général. (213-218).

Odstrčil (*J.*). — Nouvelle méthode pour calculer les racines réelles des équations numériques du troisième degré. (218-235).

Šanda (*Fr.*). — Contribution à la détermination graphique des puissances. (235-243).

Filcik (*J.*). — Construction graphique des logarithmes. (243-145).

Zahradník (*K.*). — Contribution à la Trigonométrie. (245-248).

Zahradník (*K.*). — Sur la Géométrie analytique du plan. (248-252) (¹).

THE MESSENGER OF MATHEMATICS, edited by W.-Allen WITWORTH, C. TAYLOR, W.-J. LEWIS, R. PENDLEBURY, J.-W.-L. GLAISHER. London and Cambridge, Macmillan and C° (²).

Tome VII; 1877-1878.

Niven (*W.-D.*). — Sur les harmoniques sphériques. (1-12, 131-136).

« L'objet que l'auteur a en vue dans ces articles est de donner une méthode pour déduire, de ce qui est connu sous le nom d'*harmonique zonale de degré quelconque*, l'harmonique la plus générale du même degré.

» La méthode ayant été suggérée par la manière dont ce sujet a été traité par Clerk Maxwell, et les résultats établis ayant un rapport intime avec ceux qui sont contenus dans l'Ouvrage de cet auteur, *Electricity and Magnetism*, on s'est servi ici autant que possible de la même notation. »

Rayleigh (lord). — Sur la course irrégulière d'une balle de paume. (14).

Cayley (*A.*). — Note sur un système d'équations algébriques. (17).

Russell (*W.-H.-L.*). — Sur l'apparition des transcendantes d'ordre supérieur dans certains problèmes de Mécanique (18-21, 136-139).

L'auteur s'occupe des problèmes de Mécanique dans lesquels interviennent des fonctions elliptiques ou hyperelliptiques. Citons, par exemple, le suivant : Un tube infiniment petit ayant la forme d'un cercle peut tourner autour d'un de ses diamètres qui est vertical. Il contient un point matériel : déterminer le mouvement.

Taylor (*H.-M.*). — Sur certaines séries de Trigonométrie. (22).

(¹) Ces deux volumes contiennent, en outre, des énoncés de questions à résoudre, et des comptes rendus bibliographiques.

(²) Voir *Bulletin*, I_2, 338.

Martin (*Artemas*). — Réduction de quelques intégrales aux formes elliptiques. (24).

Cayley (*A.*). — Exemple d'application de la théorie des fonctions ϑ. (27).

u étant donné par l'équation

$$\alpha u = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

où X est un polynôme du quatrième degré à coefficients réels, l'illustre auteur se propose de faire connaître les formules qui permettent de calculer x en fonction de u, et il obtient ces formules en ramenant l'intégrale elliptique à la forme normale.

Lamb (*H.*). — Sur le potentiel d'un cylindre elliptique. (33).

L'auteur établit le lien entre deux démonstrations différentes du célèbre théorème de Helmholtz.

Niven (*W.-D.*). — Sur des méthodes spéciales d'interpolation. (35).

Lamb (*H.*). — Note sur un théorème d'Hydrodynamique. (41).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur le produit $1^1 . 2^2 . 3^3 \ldots n^n$ (43).

Expression approchée de ce produit pour n très-grand.

Cayley (*A.*). — Sur les fonctions ϑ triples. (48).

Martin (*Art.*). — Calcul de la racine cubique de 2. (50).

Gray (*P.*). — Vérification et extension de la valeur trouvée pour la racine cubique de 2. (51).

M. Gray fait connaître six chiffres de plus.

NOTES de Mathématiques. (57-69, 115-125, 156-159, 187-192).

Mansion (*P.*) : Sur quelques équations algébriques. Sur une série discontinue. — *Johnson* (*W.-Woolsey*) : Sur la détermination du signe d'un terme quelconque d'un déterminant. — *Croker* (*J.-M.*) : Sommation d'une série. — *Genese* (*R.-W.*) : Solution d'une équation cubique. Sur la théorie des enveloppes. — *Cayley* : Sur le même sujet. — *Tanner* (*H.-W.-Lloyd*) : Théorème d'Arithmétique. — *Rawson* (*Rob.*) : Sur une classe d'intégrales définies. — *Glaisher* (*J.-W.-L.*) : Théorème relatif à la différence entre les sommes des diviseurs pairs et impairs d'un nombre. Sur quelques fractions continues. — *Rayleigh* : Démonstration simple d'un théorème concernant le potentiel. — *Cayley* (*A.*) : Une identité.

Cayley (*A.*) : Sur deux fonctions quadriques liées entre elles. — *Lucas* (*Éd.*) : Sur le développement en séries. — *Hudson* (*W.-H.-H.*) : Sur un théorème dû à Ro-

drigues. — *Niven* (*C.*) : Démonstration des principes de la composition des couples en Statique. — *Glaisher* (*J.-W.-L.*) : Développement déduit de la série de Lagrange. — *Nanson* (*E.-V.*) : Démonstration élémentaire d'un théorème sur les déterminants fonctionnels. — *Croker* (*J.-M.*) : Démonstration de la formule qui donne $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$. — *Verdon* (*R.*) : Développement des produits de cosinus et de sinus. — *Cayley* (*A.*) : Une identité trigonométrique. Extrait d'une lettre.

Wilkinson (*M.-M.-U.*) : Une identité en fonctions elliptiques. — *Tanner* (*H.-W.-Lloyd*) : Note sur le calcul fonctionnel. Note sur l'Arithmétique. — *Cayley* (*A.*) : Note sur la méthode des dérivations d'Arbogast.

Cayley (*A.*) : Un problème de partition. — *Mansion* (*P.*) : Nouvelle démonstration de la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires. — *Hart* (*Henry*) : Sur le paradoxe cinématique de Sylvester. — *Kempe* (*A.-B.*) : Théorème de Cinématique. — *Glaisher* (*J.-W.-L.*) : Note d'Arithmétique.

Rawson (*Rob.*). — Sur des équations de Riccati liées entre elles. (69).

Thomson (*J.-J.*). — Sur la décomposition du produit de deux sommes de huit carrés en une somme de huit carrés. (73).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Séries et produits pour exprimer π et les puissances de π. (75).

Mansion (*P.*). — Sur un théorème arithmétique du professeur H.-J.-S. Smith. (81).

Lucas (*Éd.*). — Sur le développement de $\left(\frac{z}{1-e^z}\right)^\alpha$ en série. (82).

Lucas (*Éd.*). — Sur les sommations successives de

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + x^m.$$

(84).

Drach (*S.-M.*). — Racines cubiques des nombres premiers avec 31 décimales. (86).

Tableau s'étendant depuis $\sqrt[3]{2}$ jusqu'à $\sqrt[3]{127}$.

Tanner (*H.-W.-Lloyd.*). — Sur certaines équations aux différentielles partielles du second ordre, qui ont une intégrale première générale. (89).

Cayley (*A.*). — Projet d'un intégrateur mécanique pour le calcul de $\int (X\,dx + Y\,dy)$ le long d'un chemin arbitraire. (92).

Adams (*J.-C.*). — Sur une démonstration simple du théorème de Lambert. (97).

Mannheim (*A.*). — Sur la surface de l'onde. (100).

Le théorème démontré est le suivant : « Les plans parallèles aux plans tangents singuliers coupent la surface suivant des quartiques bicirculaires ».

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur de longues successions de nombres composés. (102-106, 171-176).

Tanner (*H.-W.-Lloyd*). — Note sur une équation différentielle. (107).

Nanson (*E.-J.*). — Sur les équations linéaires aux différentielles partielles du premier ordre. (111).

Leudesdorf (*C.*). — Théorème de Cinématique. (125).

Voir le Mémoire de M. Liguine, *Bulletin*, II_1.

Pendlebury (*R.*). — Sur les lentilles équivalentes. (129).

Lucas (*Éd.*). — Sur les nombres d'Euler. (139).

Thomson (*J.-J.*). — Extension de la méthode des dérivations d'Arbogast. (142).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une formule relative aux fonctions elliptiques.

Witworth (*W.-A.*). — La sous-factorielle N. (145).

Taylor (*H.-M.*). — Sur le porisme de l'anneau de cercles touchant deux cercles. (148).

Elliott (*E.-B.*). — Théorème sur les aires, renfermant celui de Holditch, avec son analogue pour les trois dimensions. (150).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une classe de déterminants. (160).

Kempe (*A.-B.*). — Note sur le théorème de Cinématique de M. Leudesdorf. (165).

Taylor (*W.-W.*). — Sur l'anneau de cercles touchant deux cercles, et sur des porismes analogues. (167).

Cayley (*A.*). — Formules renfermant les racines septièmes de l'unité. (177).

Nanson (*E.-J.*). — Note sur l'Hydrodynamique. (182).

Lucas (*Éd.*). — Sur l'interprétation d'un passage des œuvres de Mersenne. (185).

ATTI della R. Accademia dei Lincei. In-4° ([1]).

2e Série.

Tome III; 1875-1876.

Riccò (*A.*). — Sur les courbes parcourues par les poussières électrisées. (48-54, 1 pl.).

Brioschi (*F.*). — Sur la condition pour la décomposition d'une cubique en une conique et une droite. (89-90).

Brioschi (*F.*). — Sur les conditions qui doivent être vérifiées par les paramètres d'une courbe du quatrième ordre, pour que cette courbe soit une conique double. (91-92).

Armenante (*A.*). — Génération des connexes de second ordre et de seconde classe. (123-128).

Dini (*U.*). — Sur une fonction analogue à celle de Green. (129-137).

Ascoli (*G.*). — Note sur la série $\sum_0^n u_n z^n$. (156-159).

Casorati (*F.*). — Nouvelle théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre et du second degré entre deux variables. (160-167).

Govi (*G.*). — Sur les méthodes proposées en 1639 par *Bonaventura Cavalieri* pour obtenir directement le logarithme de la somme ou de la différence de deux nombres dont les logarithmes sont donnés, et pour résoudre au moyen des fonctions circulaires les équations du second degré. (173-178).

Cerruti (*V.*). — Sur les mouvements non périodiques d'un système de points matériels. (244-249).

([1]) Voir *Bulletin*, I$_2$, 19.

Brioschi (*F.*). — Sur une propriété des triangles tritangents à une surface cubique. (257-259).

D'Ovidio (*E.*). — Quelques propriétés métriques des complexes et des congruences linéaires en Géométrie projective. (260-268).

Cremona (*L.*). — Mémoire sur la correspondance entre la théorie des systèmes de droites et la théorie des surfaces. (285-302).

Minich (*S.-R.*). — Sur l'emploi analytique des différences entre les racines dans la théorie des équations algébriques. (303-352).

§ I. Équations élémentaires. — § II. Application de la méthode au calcul des fonctions symétriques des racines et au développement de l'équation aux carrés des différences. — § III. Autre méthode plus expéditive pour obtenir de proche en proche toute équation aux carrés des différences. — § IV. Sur les fonctions élémentaires des coefficients d'une équation quelconque, aux différences qui sont invariables par rapport aux racines de l'équation primitive. — § V. Nouvelles observations sur les théories du § IV, d'où l'on peut déduire d'autres procédés plus faciles. — § VI. Application aux fonctions cycliques ordinaires et à d'autres fonctions des différences des racines d'une équation donnée. — § VII. Autres exemples simples d'applications. Produit des carrés des différences entre les racines d'une équation du cinquième degré. — § VIII. Vérifications du résultat précédent. Nouveau mode de recherche des équations aux carrés des différences.

D'Ovidio (*E.*). — Sur les réseaux de complexes linéaires dans la Géométrie projective. (561-581).

D'Ovidio (*E.*). — Les séries triples et quadruples de complexes linéaires dans la Géométrie métrico-projective. (723-746).

Respighi (*L.*). — Observations du diamètre solaire faites à l'Observatoire du Capitole. Deuxième Note. (878-895).

3e Série.

Tome I; 1876-1877.

Respighi (*L.*). — Sur la latitude de l'Observatoire Royal du Capitole. Deuxième Mémoire. (3-32).

L'auteur trouve pour résultat 41° 53′ 33″,51.

Roiti (*Ant.*). — La vitesse théorique du son et la vitesse moléculaire des gaz. (39-45).

Smith (*H.-J.-S.*). — Mémoire sur les équations modulaires. (136-149; fr.).

Keller (*Fil.*). — Sur la direction de la pesanteur à la station Barberini, sur le mont Mario. (162-173).

Cerruti (*V.*). — Sur les petites oscillations d'un corps rigide entièrement libre. (345-370).

Uzielli (*G.*). — Études de cristallographie théorique. (427-480).

Introduction. — I. *Hypothèse des indices entiers.* Généralités. Relations trigonométriques entre cinq directions dans l'espace (points de la sphère). Relations algébriques correspondantes. Plans et zones orthogonaux dans les polyèdres cristallins. Résumé de la Ire Partie. — II. *Hypothèse de la superposition ou de la symétrie.* Généralités. Théorèmes dépendants de l'hypothèse de la superposition ou de la symétrie. Corrélations entre la loi des indices entiers et la loi de superposition ou de symétrie. Division rationnelle des polyèdres cristallins en sept systèmes, fondée sur les deux hypothèses de la rationnalité des indices et de la symétrie des faces. — III. *Corrélation entre la symétrie géométrique et la symétrie physique dans les corps cristallins.* — IV. *Hypothèse de la réductibilité de tous les systèmes à un système orthogonal et au monométrique.* — V. *Sur la réduction empirique de tous les types cristallins à un type orthogonal.* Possibilité empirique d'une telle réduction. Improbabilité de la réduction théorique d'un type cristallin à un type d'un autre système. Réduction empirique d'un cristal quelconque à un type orthogonal. Applications.

Notes. — I. Sur les valeurs que peut avoir un angle quand il est une partie aliquote de la circonférence, et que le carré de son cosinus est rationnel. — II. Sur les plans de symétrie binaire. — III. Résolution en nombres entiers de quelques équations indéterminées du second degré. Applications au système monométrique. — IV. Théorèmes sur les fractions continues.

Beltrami (*E.*). — Sur la détermination expérimentale de la densité électrique à la surface des corps conducteurs. (491-502).

De Paolis (*R.*). — Les transformations planes doubles. (511-544).

I. *Transformations d'ordre n et de genre p.* — § 1. Généralités, courbe double, courbe limite. Singularités des courbes correspondantes aux courbes du plan simple. § 2. Réseau des courbes correspondantes aux droites du plan double. § 3. Séries des courbes correspondantes aux droites du plan simple. § 4. Courbes fondamentales. § 5. Propriétés de la courbe limite et de la courbe double. Singularités des courbes correspondantes aux courbes du plan double. § 6. Les points doubles du plan simple. § 7. Sur quelques lieux et enveloppes relatifs à P et P'.

II. *Transformations d'ordre n et de genre* 0, 1. § 1. Transformations générales de genre 0, 1. Courbes et points fondamentaux de P'. Courbe double. § 2. Construction des points conjoints. § 3. La transformation double $n = 2$, $p = 0$. § 4. La transformation double $p = 0$, $n = 3$. § 5. La transformation double $p = 1$, $n = 3$. § 6. Résolution des équations (6), (7) par les transformations des dix premiers ordres. § 7. Les transformations rationnelles appliquées au plan simple et au plan double.

III. *Transformations d'ordre n et de genre* $p > 1$. § 1. Méthode pour trouver la position spéciale des points fondamentaux. La transformation $p = 2$, $n = 4$; une

transformation $p=2$, $n=5$. § 2. Une transformation $n=5$, $p=3$, et une transformation $n=6$, $p=3$.

Battaglini (*G.*). — Sur le mouvement suivant une ligne du second ordre. (631-638).

Veronese (*G.*). — Nouveaux théorèmes sur l'hexagramme mystique. (649-703).

Saviotti (*C.*). — Sur quelques points de Statique graphique. (704-740, 11 pl.).

« Le Mémoire se divise en trois Parties : la première concerne des questions qui ont une importance pratique, et où la multiplication des exemples peut être utile pour ceux qui s'appliquent à cette étude. La deuxième a le mérite d'un exercice très-varié et étendu à une théorie vraiment importante et qui devrait devenir familière aux ingénieurs. La troisième Partie enfin offre des exemples intéressants, même au point de vue géométrique, puisqu'elle rappelle diverses propriétés des coniques pour les appliquer à un but mécanique. La nombreuse collection de planches, exécutées avec soin et netteté, augmente la valeur et surtout l'utilité de ce travail. Bien que le Mémoire soit de nature plutôt didactique que scientifique, on ne peut refuser à l'auteur le mérite de l'invention, à cause du grand nombre de solutions originales et de constructions nouvelles qu'il donne des divers problèmes, outre le mérite incontestable du soin avec lequel le travail a été conduit. » (BATTAGLINI).

Gautero (*G.*). — Des turbines. (741-750).

Respighi (*L.*). — Observations du diamètre solaire, faites à l'Observatoire Royal du Capitole, en 1876. (751-761).

Roiti (*Ant.*). — Sur la propagation du son dans la théorie actuelle des fluides aériformes. (762-777).

Bellavitis (*G.*). — Sur la résolution des congruences numériques et sur les Tables qui donnent les *logarithmes* (*indices*) des entiers par rapport aux divers modules. (778-800).

On peut, comme Gauss l'a montré, remplacer le *Canon arithmeticus* de Jacobi par une Table des périodes dans la réduction en décimales des fractions qui ont pour dénominateurs les divers modules. Quelle que soit la base du système de numération adopté, le nombre total des chiffres des fractions périodiques ne varie pas. Il y a lieu, pour cette raison, de préférer au système décimal le système binaire. C'est à l'aide de cette remarque que M. Bellavitis a calculé sa Table d'indices jusqu'au module premier 383, et pour d'autres modules supérieurs. Il y a joint les Tables relatives au module 256 et à quelques modules entiers imaginaires.

Cremona (*L.*). — Théorèmes stéréométriques, desquels on déduit les propriétés de l'hexagramme de Pascal. (851-874).

D'Ovidio (*E.*). — Les fonctions métriques fondamentales dans

les espaces d'un nombre quelconque de dimensions et de courbure constante. (929-986).

Une *variété*, ou espace à $n-1$ dimensions, est constituée par l'ensemble de n variables, chaque *élément* ou point simple étant *individualisé* (déterminé d'une façon unique) par les rapports de $n-1$ de ces variables à la $n^{\text{ième}}$; les quantités proportionnelles aux valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ou $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de ces variables seront dites les coordonnées homogènes du point x ou y. Si l'on considère r points x, $x', \ldots, x^{r-1}$ $(r<n)$ de cet espace, tous les points $\lambda x + \lambda' x' + \ldots + \lambda^{r-1} x^{r-1}$, c'est-à-dire tous les points dont les coordonnées sont de la forme

$$\begin{array}{l} \lambda x_1 + \lambda' x'_1 + \ldots + \lambda^{r-1} x_1^{r-1}, \\ \lambda x_2 + \lambda' x'_2 + \ldots + \lambda^{r-1} x_2^{r-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda x_n + \lambda' x'_n + \ldots + \lambda^{r-1} x_n^{r-1}, \end{array}$$

constituent un espace à $r-1$ dimensions : un tel espace sera dit un r point, ou point r^{uple} de l'espace à $n-1$ dimensions; un point simple appartient à ce r point, si ses coordonnées peuvent être exprimées par les formules ci-dessus : on aperçoit de suite que les coordonnées de tout point simple, appartenant à un r point, satisfont à $n-r$ relations linéaires distinctes, et réciproquement: ainsi les coordonnées d'un $n-1$ point satisfont à une équation linéaire; il convient donc d'appeler *plan* ou *plan simple* un $n-1$ point; par analogie, un $n-r$ point sera un r plan, un $n-2$ point, ou un 2 plan sera une droite. On voit aussi que un r point et un r' point ont un k point commun quand $r+r'=n+k$, et n'ont, en général, aucun point commun quand $r+r'\leq n$; il est inutile d'insister sur les questions analogues relatives aux *multiplans*, précédemment définis d'après les *multipoints*. Quant aux coordonnées d'un r point individualisé par les r points simples $x, x', \ldots, x^{r-1}$, ce sont les déterminants d'ordre r tirés de la matrice

$$\left|\begin{array}{ccc} x_1 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{r-1} & \ldots & x_n^{r-1} \end{array}\right|;$$

l'analogie de cette notion et de celle des coordonnées pluckériennes d'une droite, dans l'espace ordinaire, est évidente; ces coordonnées satisfont à certaines relations quadratiques. On obtiendra d'une façon analogue les coordonnées d'un r plan. M. Cayley (¹) a donné le nom d'*absolu* de l'espace à $n-1$ dimensions un espace à $n-2$ dimensions, constitué par tous les points du premier espace qui satisfont à une certaine équation quadratique

$$\Sigma a_{ip} x_i x_p = 0.$$

La considération de la forme adjointe conduit simplement à la notion des multipoints conjugués. Si l'on considère deux points simples x, y, en écrivant qu'un point $\lambda x + \mu y$ de la droite qui les joint appartient à l'absolu, on obtient une équation quadratique en $\frac{\lambda}{\mu}$; le quotient des deux racines est le rapport anharmo-

(¹) *Sixth Memoir upon Quantics.* (*Phil. Trans.*, 1859.)

nique des deux points x, y et des deux points où la droite xy rencontre l'absolu : le logarithme de ce rapport, divisé par $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$, est la *distance des deux points*. Les deux points sont *orthogonaux* si cette distance est égale à $\frac{\pi}{2}$; les points de l'absolu doivent être regardés comme orthogonaux à eux-mêmes, et comme étant à une distance infinie de tout point de l'espace proposé à $n-1$ dimensions.

M. D'Ovidio définit ensuite l'orthogonalité *simple, double, parfaite* entre deux multipoints, puis leur *perpendicularité simple, double;* il détermine le nombre et les propriétés des droites perpendiculaires à la fois à deux multipoints donnés et traite de la projection d'un multipoint sur un multipoint.

La notion des diverses distances entre deux multipoints le conduit à celles de leur *moment* et de leur *comoment*, c'est-à-dire du produit des sinus et des cosinus de ces distances; et ces notions reçoivent ensuite une nouvelle extension.

Les multiplans donnent lieu à des recherches analogues.

L'*ampleur* d'un groupe de points et de plans est une conception analogue à celle de surface ou de volume, étendue à l'espace à $n-1$ dimensions : ce nouveau concept conduit à une série de théorèmes qui peuvent être regardés comme la généralisation des plus importantes propositions de Trigonométrie plane ou sphérique et de la tétraédrométrie.

Enfin, après avoir étudié le parallélisme des divers ordres des multipoints, l'auteur termine en discutant le cas important où le discriminant de l'absolu est nul; c'est le cas où rentre, pour $n=4$, l'espace *euclidien*.

Respighi (*L.*). — Sur les observations spectroscopiques du bord et des protubérances du Soleil, faites à l'Observatoire Royal du Capitole. (1271-1311, 6 pl.).

TRANSUNTI. — Tome I; 1876-1877.

Brioschi (*F.*). — Sur quelques résultats récents obtenus par M. *Klein* dans la résolution des équations du cinquième degré. (31-34).

Smith (*H.-J.-St.*). — Sur les intégrales elliptiques complètes. (42-44; fr.).

Smith (*H.-J.-St.*). — Sur les équations modulaires. (68-69; fr.).

Dini (*U.*). — Sur une classe de fonctions finies et continues qui n'ont jamais de dérivée. (70-72, 130-133).

Hirst (*T.-Archer*). — Sur la corrélation de deux plans. (86-92; fr.).

Bertini (*E.*). — Nouvelle propriété des courbes d'ordre n à point $(n-2)$-uple. (93-95).

Narducci (*E.*). — Sur un manuscrit de la bibliothèque alexandrine, contenant les *apices* de Boèce sans abaque, et avec une valeur de position. (129).

Tous les historiens des Mathématiques ont cru jusqu'ici que les chiffres appelés *apices* de Boèce, qui ont une forme analogue à la forme indienne, n'avaient été employés qu'isolément dans les colonnes de l'abaque. Mais il résulte d'un codex de la bibliothèque alexandrine, du XIIe siècle, que ces *apices* ont été employés sans abaque, sans zéro et avec une valeur de position. L'exemple qu'offre ce manuscrit est le seul connu.

Betti (*E.*). — Sur le mouvement d'un système d'un nombre quelconque de points. (129-130).

Démonstration de ce théorème : « L'intégration des équations du mouvement d'un système de n points, qui s'attirent ou se repoussent mutuellement en vertu de forces, fonctions de leurs seules distances, peut se réduire à l'intégration de $3n - 6$ équations différentielles du second ordre entre un pareil nombre de distances mutuelles, avec une variable indépendante, laquelle, une fois les intégrations effectuées, se détermine en fonction du temps au moyen d'une quadrature. Les distances mutuelles des points étant déterminées en fonction du temps, on en peut déduire, par une seule quadrature, le mouvement du système proposé par rapport à un plan invariable de direction, et à une droite de direction fixe dans ce plan.

Cerruti (*V.*). — Considérations sur les chaleurs spécifiques. (136-141).

Respighi (*L.*). — Sur les recherches de la planète Vulcain. (153-154).

De Gasparis (*A.*). — Sur la valeur du paramètre dans les orbites elliptiques ou paraboliques. (165-169, 246-247).

Roiti (*A.*). — Sur les rapports qui ont lieu entre la vitesse moléculaire des gaz et la vitesse théorique du son. (171-173).

Casorati (*F.*). — Recherches sur les équations différentielles à primitive générale algébrique. (185-189).

Keller (*F.*). — Sur la détermination de la composante horizontale du magnétisme terrestre, faite à la station magnétique de S. Pietro in Vincoli. (213-216).

Caporali (*E.-U.*). — Théorème sur les courbes du troisième ordre. — Théorème sur les faisceaux de courbes du troisième ordre. (236).

La première Partie concerne les systèmes de trois points conjugués par rapport

à une courbe de troisième ordre, c'est-à-dire tels que deux quelconques d'entre eux soient conjugués par rapport à la conique polaire du troisième. On exprime que trois points sont conjugués au moyen d'une seule condition. Ces trois points peuvent être situés sur une droite : tels sont les trois points d'intersection de la cubique et d'une droite quelconque. Plusieurs des propriétés énoncées par M. Caporali ont leurs analogues dans la théorie des coniques, par exemple celle-ci : Les points d'intersection des diagonales d'un quadrilatère, dont les quatre sommets sont situés sur une cubique, sont conjugués par rapport à cette cubique. L'auteur s'occupe aussi de systèmes de *quatre* points conjugués; ils sont tels que trois quelconques d'entre eux soient conjugués.

Dans la seconde Partie, M. Caporali considère un faisceau de cubiques. Les coniques polaires d'un point quelconque ont quatre points communs qui, lorsque le premier point décrit une droite, décrivent une courbe du quatrième ordre : l'ensemble des courbes du quatrième ordre qui correspondent aux diverses droites du plan forme un réseau. La jacobienne J est le lieu d'un point dont les coniques polaires se touchent; lorsque ce point décrit la courbe J, le point de contact des coniques polaires décrit une courbe H, et les deux autres points communs à ces coniques, une courbe K. L'auteur donne diverses propriétés des courbes J, K, H.

THE LONDON, EDINBURGH, AND DUBLIN PHILOSOPHICAL MAGAZINE AND JOURNAL OF SCIENCE. Conducted by sir Robert Kane, sir William Thomson and William Francis. — London, in-8° (¹).

Tome XLV (4ᵉ Série); janvier-juin 1873.

Mayer (*A.-M.*). — Sur un pyromètre acoustique. (18-22).

Moon (*R.*). — Sur la définition de l'intensité dans les théories de la lumière et du son. (38-40, 361-365).

Stolétof (*A.*). — Sur le pouvoir magnétique du fer doux. (40-57).

Voir *Bulletin*, IV, 126.

Mayer (*A.-M.*). — Sur la détermination expérimentale de l'intensité relative des sons, et sur la mesure des pouvoirs de diverses substances de réfléchir et de transmettre les vibrations sonores. (90-97).

Todhunter (*I.*). — Note sur l'histoire de certaines formules de Trigonométrie sphérique. (98-100).

Sur la découverte des formules connues sous le nom de *formules de Gauss*. On

---

(¹) Voir *Bulletin*, I_8, 123-146.

les trouve pour la première fois dans un article de Delambre, inséré dans la *Connaissance des Temps* pour l'année 1809, imprimée en 1807. On a généralement adopté une date fautive, d'après la première réclamation de Delambre, qui renvoie par erreur à la *Connaissance des Temps* pour l'année 1808.

Moon (*R.*). — Sur la loi de la pression des gaz. (100-104).

Heaviside (*O.*). — Sur la meilleure disposition du pont de Wheatstone pour mesurer une résistance donnée avec un galvanomètre et une batterie donnés. (114-120).

Everett. — Sur la théorie optique du mirage. (161-172, 248-260).

Bosanquet (*R.-H.-M.*) — Correction au Mémoire « Sur une détermination de la relation entre l'énergie et l'intensité apparente des sons de différentes hauteurs ». (173-175).

Voir *Philos. Magaz.*, XLIV, 381; *Bulletin*, I_2, 146.

Hopkinson (*J.*). — De l'effet du frottement intérieur sur la résonnance. (176-182).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur l'irrationnalité arithmétique. (191-198).

On admet ordinairement que les valeurs des transcendantes données approximativement par les Tables numériques sont, en général, irrationnelles. M. Glaisher en donne pour la première fois la démonstration.

Noble. — Sur la pression nécessaire pour imprimer une rotation aux projectiles des armes rayées. (204-215).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Note sur la mesure de l'intensité dans les théories de la lumière et du son. (215-218).

Salisbury (le marquis de). — Sur les lignes spectrales de basse température. (241-245).

Heaviside (*O.*). — Sur une méthode avantageuse d'employer le galvanomètre différentiel pour la mesure des petites résistances. (245-248).

Schwendler (*L.*). — Sur les galvanomètres différentiels. (263-273).

Glashan (*J.-C.*). — Sur la distillation fractionnelle. (273-276).

Sundell (*A.-F.*). — Sur l'induction galvanique. (283-296).

Davis (*A.-S.*). — Théorie mathématique des vibrations qu'éprou-

vent les métaux échauffés mis en contact avec un corps froid. (296-305).

Thomson (sir *W.*). — Sur les corpuscules ultramondains de Le Sage, et sur le mouvement des corps rigides dans un liquide circulant sans rotation à travers les perforations de ces corps ou dans un solide fixe. (321-345).

Hudson (*H.*). — Sur l'intensité de la lumière, etc. (359-361).

Bierens de Haan (*D.*). — Sur quelques anciennes Tables logarithmiques. (371-376).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les anciennes Tables logarithmiques et leurs calculateurs. (376-382).

Strutt (*J.-W.*). — Sur la loi des pressions des gaz. (438-439).

Muir (*Th.*). — La première extension du mot *aire* au cas d'un contour plan qui se coupe lui-même. (450-454).

Cette extension, attribuée à A. De Morgan, remonte en réalité à un Mémoire de A.-L.-Fr. Meister, publié dans les *Commentaires de Göttingue* pour 1769-70, et intitulé : *De genere figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus*.

Tome XLVI; juillet-décembre 1873.

Clausius (*R.*). — Sur les relations entre les quantités caractéristiques qui se rencontrent dans les mouvements autour d'un centre. (1-25).

Traduit des *Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen*, 1872. Voir *Bulletin*, IX, 279.

Walenn (*W.-H.*) — Sur les *unitats* négatifs et fractionnaires. (36-41).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur la forme des cellules des abeilles. (103-122).

Historique des recherches mathématiques auxquelles cette question a donné lieu.

Moon (*R.*). — Sur l'intégration de l'équation exacte représentant la transmission, suivant une direction, du son dans l'air, et déduite de la théorie ordinaire. (122-130).

Rowland (*H.-A.*). — Sur la perméabilité magnétique et le maximum de magnétisme du fer, de l'acier et du nickel. (140-159).

Challis. — Sur les objections récemment faites aux principes reçus de l'Hydrodynamique. (159-165).

Rayleigh (lord) [*J.-W. Strutt*]. — Sur les lignes nodales d'une plaque carrée. (166-171).

Moon (*R.*). — Sur la mesure du travail dans la théorie de l'énergie. (219-221).

Airy (*J.-B.*). — Expériences sur le pouvoir directeur de gros aimants d'acier, des barres de fer doux aimanté et des solénoïdes, dans leur action sur de petits aimants extérieurs. (221-231).

Stuart (*J.*). — Recherches sur l'attraction d'un solénoïde sur une petite masse magnétique. (231-236).

Clausius (*R.*). — Sur un nouveau théorème de Mécanique, relatif aux mouvements stationnaires. (236-244, 266-276).

Moon (*R.*). — Réponses à quelques remarques de M. *Challis* : « Sur les objections récemment faites aux principes reçus de l'Hydrodynamique ». (247-250).

Nichols (*R.-C.*). — Sur la détermination de la chaleur spécifique des gaz et des vapeurs sous volume constant. (289-290, 361-363).

Zöllner (*F.*). — Sur la température et la constitution physique du Soleil. (290-304, 343-356).

Birt (*W.-R.*). — Sur la libration de la Lune. (305-308).

Challis. — Sur les principes reçus de l'Hydrodynamique, en réponse à M. *Moon*. (309-312).

Reynolds (*O.*). — Sur l'action du sable insufflé pour couper les matières dures. (337-343).

Rayleigh (lord). — Sur les vibrations des systèmes approximativement simples. (357-361).

Challis. — Sur l'intégration des équations différentielles par les facteurs et par la différentiation, avec application au calcul des variations. (388-398).

Szily (*C.*). — Sur le principe dynamique de Hamilton en Thermodynamique. (426-434).

Rayleigh (lord). — Sur les modes fondamentaux des systèmes vibrants. (434).

Zenger (*Ch.-V.*). — Sur un nouveau spectroscope. (439-445).

Moon (*R.*). — Réplique aux nouvelles remarques de M. *Challis* : « Sur les principes reçus de l'Hydrodynamique ». (446-450).

Maxwell (*J.-Clerk*). — Discours sur les molécules. (458-469).

Heaviside (*O.*). — Sur le galvanomètre différentiel. (469-472).

Tome XLVII; janvier-juin 1874.

Challis. — Théorie de la source du magnétisme terrestre. (14-22).

Brough (*R.-S.*). — Sur le pont de Wheatstone. (22-24).

Challis. — Suite de la discussion des principes analytiques de l'Hydrodynamique, en réponse à M. *Moon*. (25-28).

Sundell (*A.-F.*). — Sur les forces électromotrice et thermo-électrique de quelques alliages métalliques en contact avec le cuivre. (28-48).

Rayleigh (lord). — Sur la fabrication et la théorie des réseaux de diffraction. (81-93, 193-205).

Heaviside (*O.*). — Sur le pont de Wheatstone. (93-94).

Croll (*J.*). — Sur les courants de l'Océan. — *III*[e] *Partie :* Sur la cause physique des courants de l'Océan. (94-122, 168-190).

Pickering (*Edw.-C.*). — Mesures de la polarisation de la lumière réfléchie par le ciel et par une ou plusieurs plaques de verre. (127-143).

Moon (*R.*). — Remarques sur les principes analytiques de la Mécanique, en réponse à M. *Challis*. (143-145).

Challis. — Théorie des effets produits par le brouillard et la vapeur de l'atmosphère sur l'intensité du son. (277-281).

Moon (*R.*). — Sur la mesure du travail dans la théorie de l'énergie. (291-294).

Muir (*Th.*). — Sur les formes de fractions continues de Sylvester et d'autres pour la quadrature du cercle. (331-334).

Hesse (*F.-G.*). — Solution directe d'un problème de Géométrie. (354-357).

Démontrer qu'un triangle dont deux bissectrices sont égales est isoscèle.

Herschel (capitaine *J.*). — Sur une nouvelle forme de calendrier au moyen de laquelle on peut trouver aisément l'un des quatre éléments d'une date (l'année, le mois, le quantième du mois ou le jour de la semaine), quand les trois autres sont donnés (357-358).

Carpenter (*W.-B.*). — Sur la cause physique des courants de l'Océan. (359-362).

Rayleigh (lord). — Contribution à la théorie des résonnateurs. (419-426).

Croll (*J.*). — Sur la cause physique des courants de l'Océan. (434-437).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Vérification d'une identité relative aux transcendantes elliptiques. (437-444).

Il s'agit de l'identité

$$e^{-x^2}+\sum_{1}^{\infty}{}_n\left[e^{-(x-na)^2}+e^{-(x+na)^2}\right]=\frac{2\sqrt{\pi}}{a}\left(\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}{}_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2}}\cos\frac{2n\pi x}{a}\right).$$

Cayley (*A.*). — Sur la théorie mathématique des isomères. (444-447).

Tome XLVIII; juillet-décembre 1874.

Clausius (*R.*). — Sur les différentes formules du viriel. (1-11).

Purvis (*F.-P.*). — Sur le planimètre d'Amsler. (11-13).

Wright (*A.-W.*). — Sur la polarisation de la lumière zodiacale. (13-21).

Schilling (baron *N.*). — Les courants constants de l'air et de la mer; essai pour les ramener à une cause commune. (21-38, 97-111, 166-180).

Mallet (*R.*). — Ralentissement de la rotation de la Terre dû aux marées. (38-41).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Nouvelle formule concernant les intégrales définies. (53-55).

Crookes (*W.*). — Sur l'attraction et la répulsion accompagnant la radiation. (81-95).

O'Kinealy (*J.*). — Le théorème de Fourier. (95-97).

Schwendler (*L.*). — Sur la théorie générale de la double télégraphie. (117-138).

Challis. — La théorie hydrodynamique de l'action d'une bobine galvanique sur un petit aimant extérieur. (180-200, 350-363, 430-445).

Stolétof (*A.*). — Sur le pouvoir magnétique des diverses masses de fer. (200-203).

Tylor (*A.*). — Sur les marées et les ondes. Théorie de la réflexion. (204-219).

Rayleigh (lord). — Sur les vibrations des systèmes approximativement simples. (258-262).

Davis (*W.-S.*). — Sur une méthode simple de mettre en évidence les principaux phénomènes du mouvement ondulatoire au moyen de cordes flexibles. (262-266).

Mayer (*A.-M.*). — Recherches d'Acoustique. N° V. (266-274).

Müller (*J.-J.*). — Sur un principe de Mécanique résultant de la théorie du mouvement de Hamilton. (274-295).

O'Kinealy (*J.*). — Sur une nouvelle formule pour les intégrales définies. (295-296).

Rowland (*H.-A.*). — Sur la perméabilité magnétique et le maximum de magnétisme du nickel et du cobalt. (321-340).

Schuster (*A.*). — Expériences sur les vibrations électriques. (340-350).

Thomson (sir *William*). — Sur les perturbations du compas produites par le roulis du navire. (363-369).

Reynolds (*O.*). — Sur les forces superficielles produites par la communication de la chaleur. (389-391).

Rayleigh (lord). — Un théorème de Statique. (452-456).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur le problème des huit reines. (457-467).

Lovering (*J.*). — L'état mathématique et philosophique des Sciences physiques. (493-507).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur le tempérament ou la division de l'octave. (507-511).

Sharpe (*S.*). — Sur les comètes et leurs queues. (512-513).

Tome XLIX; janvier-juin 1875.

Smyth (*Piazzi*). — Le carbone et l'hydrocarbone dans le spectroscope moderne. (24-33).

Galton (*Fr.*). — La Statistique par comparaison, avec des remarques sur la loi de fréquence de l'erreur. (33-46).

Herschel (*A.-S.*). — Sur le spectre de l'aurore boréale. (65-71).

Bouty (*E.*). — Études sur le magnétisme. (81-98, 186-206).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur la théorie mathématique de l'orgue à cordes de M. *Baillie Hamilton*. (98-104).

Watts (*W.-M.*). — Le carbone et l'hydrocarbone dans le spectroscope moderne. (104-106).

Attfield (*J.*). — Note sur le spectre du carbone. (106-108).

Schwendler (*L.*). — Sur la théorie générale de la double télégraphie. (*Suite*). (108-126).

Cockle (sir *J.*). — Sur les formes primaires. (134-142).

A propos du Traité de Boole « *On Differential Equations* », page 428, et « *Supplement* », pages 184 et 190.

Rayleigh (lord). — Un théorème de Statique. (183-185).

Rayleigh (lord). — Théorèmes généraux concernant l'équilibre et les mouvements initial et permanent. (218-224).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur les partitions. (307-311).

Rayleigh (lord). — Sur le travail que l'on peut gagner pendant le mélange des gaz. (311-319).

Walenn (*W.-H.*). — Sur l'unitation. III. Les *unitats* des puissances et des racines. (346-351).

Mayer (*A.*). — Recherches sur l'Acoustique. Nos VI et VII. (352-365, 428-432).

Foster (*G.-C.*). — Sur les méthodes graphiques pour résoudre certains problèmes simples d'électricité. (368-377).

Moon (*R.*). — Remarques touchant le Mémoire de *Helmholtz* sur la conservation de la forme. (377-385).

Foster (*G.-C.*) et *Lodge* (*O.-J.*). — Sur le flux d'électricité dans une surface conductrice plane et uniforme. *Ire Partie*. (385-400, 453-471).

Tome L; juillet-décembre 1875.

Adams (*W.-G.*). — Nouveau polariscope. (13-17).

Glashan (*J.-C.*). — Sur le mouvement d'une particule partant du repos vers un centre d'attraction; force $\propto$ (distance)$^{-2}$. (20-24).

Clausius (*R.*). — Sur le théorème de l'ergal moyen, et son application aux mouvements moléculaires des gaz. (27-46, 101-117, 191-200).

Abney. — Sur l'irradiation photographique. (46-42).

Kundt (*A.*) et *Warburg* (*E.*). — Sur le frottement et la conductibilité pour la chaleur dans les gaz raréfiés. (53-62).

Watts (*W.-M.*). — Sur une nouvelle forme de micromètre à l'usage de l'analyse spectrale. (81-85).

Walenn (*W.-H.*). — Sur l'unitation. IV. Les *unitats* des puis-

sances et des racines; leurs développements, avec applications. (117-122).

Rowland (*H.-A.*). — Note sur la détermination par *Kohlrausch* de la valeur absolue de l'unité en mercure de la résistance électrique de Siemens. (161-163).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur le tempérament ou la division de l'octave. N° II. (164-178).

Merriman (*Mansfield*). — Sur la flexion des sommiers continus. (179-191).

Thomson (sir *W.*). — Sur une erreur relevée dans la théorie des marées de Laplace. (227-242).

Croll (*J.*). — Vérification faite par le *Challenger* des théories de la circulation océanique par les vents ou par la gravitation. (242-250).

Chase (*P.-E.*). — Activité cosmique de la lumière. (250-253).

Rowland (*H.-A.*). — Études sur la distribution magnétique. *Ire Partie :* Distribution linéaire. (257-277, 348-367).

Airy (sir *G.-B.*). — Sur un point controversé de la théorie des marées de Laplace. (277-279).

Thomson (sir *W.*). — Note sur les *oscillations de première espèce* dans la théorie des marées de Laplace. (279-284).

Croll (*J.*). — La théorie de la circulation océanique par les vents. Examen des objections. (286-290).

Guthrie (*Fr.*). — Sur les ondes liquides stationnaires. (290-302, 377-388).

Kerr (*J.*). — Nouvelle relation entre l'électricité et la lumière : milieux biréfringents diélectrisés. (337-348, 446-478).

Lodge (*O.-J.*). — Sur les nœuds et les boucles dans leurs rapports avec les formules chimiques. (367-376).

Thomson (sir *W.*). — Intégration générale de l'équation des marées de Laplace. (388-402).

Carpenter (*W.-B.*). — Remarques sur les « vérifications » de M. *Croll*. (402-404).

Stolétof (*A.*). — Sur la détermination par Kohlrausch de la valeur absolue de l'unité en mercure de la résistance électrique de Siemens. (404-406).

Darwin (*G.*). — Sur les mappemondes. (431-434).

Cokle (sir *J.*). — Sur une criticoïde différentielle. (440-446).

Schwendler (*L.*). — Sur la théorie générale de la double télégraphie. (*Suite*). (458-475).

Foster (*G.-C.*) et *Lodge* (*O.*). — Sur le flux d'électricité dans une surface conductrice plane et uniforme. *II*e *Partie*. (475-489).

Croll (*J.*). — Nouvelles remarques au sujet de la « vérification ». (489-491).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur la polarisation de la lumière du Ciel. (497-521).

Walenn (*W.-H.*). — Sur l'unitation. V. Quelques applications et développements de la formule générale. (521-527).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur quelques identités déduites des formules relatives aux fonctions elliptiques. (539-542).

Challis. — Sur les principes mathématiques de la théorie des marées de Laplace. (544-548).

Tome I (5e Série); janvier-juin 1876.

Szily (*C.*). — La seconde proposition de la Théorie mécanique de la chaleur, déduite de la première. (22-31).

Heaviside (*O.*). — Sur la double télégraphie. (32-43).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur la représentation d'un nombre impair comme somme de quatre carrés, et comme somme d'un carré et de deux nombres triangulaires. (44-49).

Burbury (*S.-H.*). — Sur la seconde loi de la Thermodynamique dans ses rapports avec la théorie cinématique des gaz. (61-67).

Clausius (*R.*). — Sur une nouvelle loi fondamentale de l'électrodynamique. (69-71).

Cotterill (*J.-H.*). — Sur la distribution de l'énergie dans une masse de liquide en état de mouvement stationnaire. (108-111).

Stoney (*G.-Johnstone*). — Sur le radiomètre de Crookes. (177-181, 305-313).

Ferrel (*W.*). — Sur un point controversé de la théorie des marées de Laplace. (182-187).

Fromme (*C.*). — Sur le magnétisme des barres d'acier. (188-204, 293-305).

Clausius (*R.*). — Sur la relation de la loi fondamentale de l'électrodynamique avec le principe de la conservation de l'énergie, et sur la simplification de cette loi. (218-221).

Taylor (*H.-M.*). — Sur les valeurs relatives des pièces aux échecs. (221-229).

Rayleigh (lord). — Sur les ondes. (257-279).

Baily (*W.*). — Nouvelle disposition du micromètre du spectroscope automatique (314-315).

Chase (*P.-E.*). — « Au commencement ». I. Masse et position. (315-319).

Sabine (*R.*). — Sur une méthode pour la mesure des intervalles de temps très-petits. (337-346).

Nichols (*R.-C.*). — Sur la preuve de la seconde loi de la Thermodynamique. (369-373).

Lodge (*O.-J.*). — Sur quelques problèmes se rattachant au flux de l'électricité dans un plan. (373-389).

Browne (*C.-Orde*). — Sur la détermination de la longitude du Caire, faite à Greenwich par l'échange de signaux télégraphiques. (390-395).

Challis. — Théorie du radiomètre de M. Crookes. (395-397).

König (*R.*). — Sur la résonnance simultanée de deux notes. (417-446, 511-525).

Pictet (*R.*). — Application de la Théorie mécanique de la chaleur à l'étude des liquides volatils. Relations simples entre les chaleurs latentes, les poids atomiques et les tensions des vapeurs. (477-489).

Chase (*P.-E.*). — Sur l'hypothèse nébulaire. II. Action mutuelle. (507-510).

Schwendler (*L.*). — Sur la théorie générale de la double télégraphie. (*Suite*). (526-542).

Walenn (*W.-H.*). — Sur l'unitation. VI. Quelques applications et développements de la formule générale. (*Suite*). (546-549).

Tome II; juillet-décembre 1876.

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur une nouvelle forme de polariscope, et son application à l'observation du ciel. (20-28).

Chase (*P.-E.*). — Sur l'hypothèse nébulaire. III. Notre étoile binaire et ses satellites. (29-36). IV. Corrélation de force centrale. (198-202).

Lodge (*O.-J.*). — Sur quelques problèmes se rattachant au flux de l'électricité dans un plan. (*Suite*). (37-47).

Earnshaw (Rev. *S.*). — Quelques remarques sur l'intégration finie des équations linéaires aux différentielles partielles à coefficients constants. (47-49).

Moon (*R.*). — Quelques nouvelles remarques sur le Mémoire de Helmholtz sur la conservation de la force, et sur la manière plus moderne de présenter sa théorie. (114-123).

Heaviside (*O.*). — Sur l'extra-courant. (135-145).

Challis. — Discussion supplémentaire de la théorie hydrodynamique des forces attractives et répulsives. (172-191).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note concernant une différentiation multiple d'une certaine expression. (208-211, 522-524).

Croll (*J.*). — Sur la transformation de la gravité. (241-254).

Szily (*C.*), — Sur la signification dynamique des quantités qui se présentent dans la Théorie mécanique de la chaleur. (254-269).

Sylvester (*J.-J.*). — Note sur les harmoniques sphériques. (291-307).

Ketteler (*E.*). — Essai d'une théorie de la dispersion (anomale) de la lumière dans des milieux simplement ou doublement réfringents. (332-345, 414-422, 508-522).

Walenn (*W.-H.*). — Sur les restes de la division en Arithmétique. (345-352).

Lodge (*O.-J.*). — Sur un moyen d'illustrer mécaniquement le passage de l'électricité à travers les métaux, les électrolytes et les diélectriques, conformément à la théorie de Maxwell. (353-374).

Challis. — Explications théoriques de phénomènes nouveaux du radiomètre. (374-379).

Rayleigh (lord). — Sur la résistance des fluides. (430-441).

Rayleigh (lord). — Notes sur l'Hydrodynamique. (441-447).

Forel. — Note sur les *seiches* des lacs suisses. (447-449).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur l'application de la Thermodynamique à l'étude des variations de l'énergie potentielle des surfaces liquides. Conséquences diverses. (450-458).

Mayer (*A.-M.*). — Recherches d'Acoustique. (500-507).

Lodge (*O.-J.*). — Sur une illustration mécanique des phénomènes thermo-électriques. (524-543).

Tome III; janvier-juin 1877.

Muir (*Th.*). — Théorème sur les continuants. (137-138).

Voir *Bulletin*, I_2, 98.

Darwin (*G.-H.*). — Sur une explication proposée de l'obliquité des axes des planètes sur leurs orbites. (188-192).

Chase (*P.-E.*). — Sur l'hypothèse nébulaire. V. Nœuds de l'éther. (203-211).

Heaviside (*O.*). — Sur la rapidité des signaux à travers des circuits télégraphiques hétérogènes. (211-221).

Niven (*C.*). — Sur la théorie d'un solide élastique imparfaitement homogène. (241-260).

Ennis (*J.*). — Principes physiques et mathématiques de la théorie nébulaire. (261-271).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Notes sur la théorie du son. (271-278, 343-349, 418-424).

Challis. — Théorie de l'action du radiomètre à palettes creuses, brillantes sur les deux faces. (278-281).

Trowbridge (*J.*). — Sur les tourbillons annulaires liquides. (290-295).

Kerr (*J.*). — Sur la rotation du plan de polarisation par réflexion sur le pôle d'un aimant.

Lodge (*O.-J.*). — Réponse au professeur *Avenarius*. (349-353).

Muir (*Th.*). — Extension d'un théorème sur les continuants, avec une application importante. (360-366).

Hicks (*W.-M.*). — Sur quelques effets de la dissociation sur les propriétés physiques des gaz. (401-418).

Preston (*S.-T.*). — Le mode de propagation du son, et la condition physique déterminant sa vitesse, fondée sur la théorie cinétique des gaz. (441-453).

Rayleigh (lord). — Observation d'Acoustique. (456-464).

Tome IV; juillet-décembre 1877.

Darwin (*G.-H.*). — Sur les mesures fautives des quantités variables, et sur la manière de traiter les observations météorologiques. (1-14).

Heat (*J.-M.*). — Sur la production de la chaleur par l'action dynamique dans la compression des gaz. (14-18).

Smith (*H.-J.-S.*). — Sur les conditions de perpendicularité dans un système parallélépipédal. (18-25).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Notes sur la théorie du son. (*Suite*). (25-39, 125-136, 216-222).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur l'application de la Thermodynamique à l'étude des variations de l'énergie potentielle des surfaces liquides. (*Suite*). (40-48).

Thompson (*S.-P.*). — Sur l'aberration chromatique de l'œil dans ses rapports avec la perception de la distance. (48-60).

Thompson (*S.-P.*). — Note sur un curieux effet de l'absorption de la lumière. (61-62).

Burbury (*S.-H.*). — Sur l'action à distance dans les diélectriques. (62-67).

Baily (*W.*). — Nouveau mouvement automatique pour le spectroscope. (100-104).

Brough (*R.-S.*). — Sur un cas d'éclair, avec une évaluation du potentiel et de la quantité de la décharge en mesure absolue. (105-110).

Preston (*S.-T.*). — Sur la nature de ce qu'on nomme communément le *vide*. (110-114).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur une généralisation du théorème de Taylor. (136-140).

Hicks (*W.-M.*). — Sur quelques effets de la dissociation sur les propriétés physiques des gaz. (*Suite*). (174-184).

Preston (*S.-T.*). — Sur quelques conditions dynamiques applicables à la théorie de la gravitation de Le Sage. (206-213, 364-375).

Earnshaw (*S.*). — Les intégrales finies de certaines équations aux différentielles partielles qui se présentent dans les recherches physiques. (213-215).

Stoney (*G.-J.*). — Sur la nature de ce qu'on nomme communément *le vide*. (222-223).

Brough (*R.-S.*). — Sur le diamètre du fil qu'il faut employer pour entourer un électro-aimant, afin de produire l'effet magnétique maximum. (253-257).

Chase (*P.-E.*). — Sur l'hypothèse nébulaire. VI. Moment et force vive. (291-298).

Clarke (colonel *A.-R.*). — Sur une correction des latitudes observées. (302-305).

Walenn (*W.-H.*). — Sur l'unitation. VII. Remarques pratiques sur cette opération, avec exemples. (375-379).

Gladstone (*J.-H.*). — Sur quelques points se rattachant aux éléments chimiques constituants du système solaire. (379-385).

Stoney (*G.-J.*). — Sur la pénétration de la chaleur à travers les couches de gaz. (424-443).

Brough (*R.-S.*). — Déduction théorique de la meilleure résistance d'un récepteur télégraphique. (449-453).

Clausius (*R.*). — Sur un théorème général concernant l'influence électrique (454-458).

Clarke (*A.-R.*). — Sur le potentiel d'un ellipsoïde en un point extérieur. (458-461).

Tome V; janvier-juin 1878.

Thomson (*W.*). — Sur les propriétés thermo-élastiques, thermomagnétiques et pyro-électriques de la matière. (4-27).

Weber (*H.-F.*). — Mesures absolues électromagnétiques et calorimétriques : valeur absolue de l'unité de résistance de Siemens en mesure électromagnétique; relation entre le travail d'un courant et le développement de chaleur dans les courants galvaniques stationnaires, et valeurs absolues de quelques forces hydro-électromotrices en mesure électromagnétique. (Comparaison résumée des résultats d'une série de recherches). (30-43, 127-139, 189-197).

Croll (*J.*). — La théorie de la gravitation de Le Sage. (45-46).

Cayley (*A.*). — De la distribution électrique sur deux surfaces sphériques. (54-60).

Aitken (*J.*). — Compte rendu de certaines expériences sur la rigidité produite par la force centrifuge. (81-105).

Lodge (*O.-J.*). — Sur une méthode pour mesurer la conductibilité thermale absolue des cristaux et d'autres substances rares. (110-117).

Preston (*S.-T.*). — Application de la théorie cinétique des gaz à la gravitation. (117-127).

Kerr (*J.*). — Sur la réflexion de la lumière polarisée sur la surface équatoriale d'un aimant. (161-179).

Sylvester (*J.-J.*). — Démonstration du théorème des invariants non démontré jusqu'ici. (178-188).

Walenn (*W.-H.*). — Sur l'unitation. VIII. Remarques pratiques sur ce sujet, avec des exemples. (214-218).

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Expériences sur la conductibilité thermique de la pierre, fondées sur la *Théorie de la Chaleur* de Fourier. (241-267).

Chase (*P.-E.*). — Sur l'hypothèse nébulaire. VII. Ondulation. (292-297). VIII. Critériums. (362-367).

Preston (*S.-T.*). — Comparaison de la théorie cinétique de la gravitation avec les phénomènes de la cohésion et de l'action chimique, avec les importantes inductions qui s'y rattachent concernant l'existence de réservoirs de mouvement dans l'espace. (297-311).

Helmholtz. — Sur les courants galvaniques causés par des différences de concentration. Inductions tirées de la Théorie mécanique de la chaleur. (348-358).

Challis. — Explications théoriques des actions du radiomètre, de l'othéoscope et du téléphone (452-457).

ATTI dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. In-4° (1).

Tome XXIX; 1875-1876.

Secchi (le P. *A.*). — De quelques faits relatifs à l'origine de la grêle. (1-7).

Azzarelli (*M.*). — Courbure des surfaces. (16-32).

Exposition élémentaire de la théorie de Gauss, suivie d'exemples.

Armellini (*T.*). — Résolution de quelques problèmes de Gnomonique. (33-40).

Ferrari (le P. *St.*). — Sur le radiant des étoiles filantes de la période d'août. (45-53, 1 pl.).

Bertelli (le P. *T.*). — Résumé des observations microsismiques, faites au Collége alla Querce de Florence, et des principales réflexions théorico-expérimentales déduites de ces observations, de l'année 1870 à l'année 1875. (83-110, 255-297).

Secchi (le P. *A.*). — Sur les protubérances et les taches solaires. (14e article). (113-121, 1 pl.).

Azzarelli (*M.*). — Quelques problèmes sur le tétraèdre. (126-217).

Bertin (*L.-E.*). — Méthode nouvelle pour établir la formule de la hauteur métacentrique. (218-220; fr.).

De Rossi-Re (*V.*). — Sur la construction par points des sections coniques au moyen de la planaltimétrie. (240-245, 1 pl.).

Secchi (le P.). — Note sur un ancien dessin du Soleil, donné par le P. Kircher. (253-254).

Secchi (le P.). — Sur quelques ouvrages hydrauliques antiques, retrouvés dans la campagne de Rome. (299-336).

Azzarelli (*M.*). — Rectification de certaines lignes qui résultent de l'intersection de surfaces du second ordre, et quadratures de certaines portions de ces surfaces. (337-365).

---

(1) Voir *Bulletin*, I_2, 15.

Armellini (*T.*). — Nouvelle méthode pour la détermination de la température du Soleil. (370-373).

Ferrari (le P.). — Sur la relation entre les maxima et les minima des taches solaires et les perturbations magnétiques extraordinaires. (374-386, 469-475).

De Rossi (*M.-S.*). — Notice biographique sur le professeur *Vincenzo Diorio*. (402-405).

Secchi (le P.). — Sur la vitesse du vent observée au Collége Romain. (431-449).

Denza (le P. *Fr.*). — Observations de la déclinaison magnétique, faites à l'occasion des éclipses de Soleil du 9-10 octobre 1874, du 5 avril et du 29 septembre 1875. (476-515).

Tome XXX; 1876-1877.

Azzarelli (*M.*). — Sur certaines lignes tracées sur le cylindre droit à base circulaire. (1-44).

Secchi (le P.). — Sur les protubérances et les taches solaires, observées en 1876. (15e article). (51-63).

Azzarelli (*M.*). — Méthode générale pour construire par points les lignes du second ordre. (64-68).

DeRossi (*M.-S.*). — Notices et observations sur la chute de pierres qui a eu lieu à Supino, le 4 septembre 1875. (80-85).

Secchi (le P.). — Remarques sur la Communication précédente. (86-87).

Secchi (le P.). — La nouvelle étoile du Cygne. (91-95). — La comète de Borrelly. (95-96).

Armellini (*T.*). — Sur quelques relations entre le système planétaire et les systèmes satellitaires. (143-158).

§ 1. Formules des distances. § 2. Loi des distances des satellites. § 3. Comparaison du système planétaire et des systèmes satellitaires. § 4. Analogies secondaires.

Foglini (le P. *Giacomo*). — Coordonnées trilinéaires, et leur application à la ligne droite et aux courbes du second ordre en général. (159-210).

Pepin (le P. *Th.*). — Nouvelles formules pour réduire à un carré la valeur d'un polynôme rationnel du quatrième degré. (211-237; fr.).

Sur la résolution en nombres rationnels de l'équation

$$y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Ferrari (le P.). — Sur la relation entre les maxima et les minima des taches solaires et les perturbations magnétiques extraordinaires. (251-261).

Desimoni (*C.*). — Remarques et questions sur les cartographes italiens et leurs travaux manuscrits, spécialement nautiques. I. Cartographes vénitiens. (262-276).

1. Marino Sanuto. 2. Les Pizigani, 1267-1373.

Secchi (le P.). — Questions sur Saturne. (281-289).

1. L'anneau nébuleux est-il ou non séparé de l'anneau voisin? — 2. L'anneau nébuleux est-il également transparent dans toute sa largeur? — 3. Combien de subdivisions a l'anneau extérieur? — 4. La division cassinienne est-elle absolument noire, ou seulement nébuleuse? — 5. Combien de divisions a l'anneau moyen B? — 6. Quelle est la gradation de lumière dans les anneaux? — 7. Quelle est la véritable forme de l'ombre de la planète sur l'anneau? — 8. Les anneaux sont-ils dans le même plan ou dans des plans différents? — 9. La lumière de l'anneau considérée circulairement est-elle uniforme? — 10. Que dire des dentelures observées sur le bord interne de l'anneau? — 11. L'anneau est-il dans le plan de l'équateur de Saturne?

Azzarelli (*M.*). — Note sur l'application des discriminants à la Géométrie. (290-302).

Boncompagni (*B.*). — Sur un document inédit relatif à Nicolas Copernic. (341-397).

Acte d'un notaire de Ferrare attestant que, dans cette ville, Copernic a été reçu, le 31 mai 1503, docteur en droit canon.

Ferrari (le P.). — Résumé des recherches sur la relation entre les maxima et les minima des taches solaires et les perturbations magnétiques extraordinaires. (465-482).

ANNALES DES MINES, ou Recueil de Mémoires sur l'exploitation des mines et sur les Sciences et les arts qui s'y rattachent, rédigées par les Ingénieurs des Mines, et publiées par autorisation du Ministre des Travaux publics. — Paris, Dunod (¹).

Tome X; 1877, 2e semestre.

Mallard (*Fr.*). — Explication des phénomènes optiques anomaux que présentent un grand nombre de substances cristallisées. (60-196, 3 pl.).

Massieu. — Mémoire sur la locomotive à adhérence totale et à essieux convergents de M. Rarchaert. (213-412, 4 pl.).

Rarchaert. — Note sur la locomotive à adhérence totale et à essieux convergents. (413-427).

Tome XI; 1877, 1er semestre.

Ledoux (*Ch.*). — De la condensation de la vapeur à l'intérieur des cylindres des machines. (486-549, 1 pl.).

Exposé d'une méthode permettant de calculer avec une approximation suffisante dans la pratique, et pour des admissions telles que la pression finale de la détente ne dépasse pas le triple de la contre-pression :

1° Le poids réel du mélange de vapeur et d'eau fournis par la chaudière à chaque coup de piston, quand on connaît la proportion d'eau entraînée avec la vapeur ;

2° La proportion d'eau entraînée quand on connaît le poids total d'eau fourni pour l'alimentation :

3° La consommation en *calories* pour un travail déterminé, c'est-à-dire la véritable mesure industrielle de l'utilisation de la vapeur ;

4° S'il s'agit d'une locomotive, la quantité d'eau réellement vaporisée par la chaudière pendant un temps donné, et la puissance de traction qui en résulte pour la machine à une vitesse déterminée.

L'indicateur Deprez, qui donne la courbe moyenne résultant d'un certain nombre de coups de piston successifs, paraît devoir être très-utilement appliqué dans les recherches de cette nature.

Tome XII; 1877, 2e semestre.

Herdner (*A.*). — Étude de machines d'extraction. (5-65, 3 pl.).

Étude sur les distributions par tiroirs dans les machines d'extraction, et en par-

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 317.

ticulier sur le système de M. L. Guinotte, précédée d'une théorie géométrique du mouvement des tiroirs.

Michel Lévy (A.). — De l'emploi du microscope polarisant à lumière parallèle. (392-471, 3 pl.).

Étude théorique et pratique de l'emploi de cet instrument pour la détermination des espèces minérales en plaques minces.

H. B.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES (1).

5e Série. Tome VI; 1876.

Kleitz (C.). — Stabilité des poutres continues. (115-149).

La méthode employée jusqu'à présent pour les calculs de stabilité des poutres continues est fondée sur l'hypothèse que le moment d'inertie est constant dans toute l'étendue de ces poutres. Or, cette hypothèse étant tout à fait en désaccord avec la réalité, ces calculs présentent une incertitude qui n'existe pas pour les poutres discontinues. Il est cependant facile d'établir l'équilibre statique pour ces deux genres de poutres.

L'auteur discute le degré d'exactitude des hypothèses précédemment admises, et compare ses résultats avec ceux de M. Bresse. Au fond, il y a identité entre les équations; elles ne diffèrent que par la forme.

Un tableau spécial permet de calculer plus exactement les moments de flexion, en ayant égard à la variation du moment d'inertie.

De Perrodil. — Théorie de la stabilité des voûtes. (178-222).

En admettant à l'insertion ce Mémoire, qui fait suite à un autre publié en 1872 (t. II), la Commission des *Annales* a cru devoir formuler explicitement quelques réserves. L'application à des voûtes en maçonnerie de formules établies pour des arcs métalliques est, à ses yeux, un procédé d'une justesse très-contestable, et qui serait d'ailleurs d'un usage plus pénible que les méthodes graphiques habituellement employées. En outre, elle ne pense pas qu'on puisse admettre un projet de voûte dans lequel la pression atteint les deux tiers de la pression d'écrasement instantané des métaux.

Fouret (G.). — Détermination graphique des moments de flexion d'une poutre à plusieurs travées solidaires. (473-495).

Les procédés géométriques, exposés déjà par l'auteur dans les *Comptes rendus* (1er mars 1875) pour la détermination des moments fléchissants sur les appuis d'une poutre droite, présentent sur les méthodes de calculs le double avantage d'être plus

(1) Voir *Bulletin*, XI, 259.

expéditifs, et de donner lieu à des moyens de vérification fort simples. Deux méthodes sont successivement décrites : une première méthode de fausse position, moitié arithmétique, moitié graphique, et une deuxième méthode directe, purement géométrique. Cette dernière est la plus avantageuse.

L'auteur généralise et étend cette méthode graphique, et indique la méthode à suivre pour appliquer le théorème dit des *trois moments* au cas où les appuis sont à des niveaux peu différents, et où les travées supportent des charges distribuées d'une manière quelconque.

Collignon (*E.*). — Note sur quelques travaux récents, relatifs à la théorie des voûtes. (539-544).

Cette Note a été reproduite dans le n° 25 (année 1876) du *Mémorial de l'Officier du Génie*.

Tome VI; 1876.

Allard (*E.*). — Intensité et portée des phares. (5-117).

Étude intéressante et remarquable des conditions théoriques et pratiques de fonctionnement des appareils d'éclairage des phares, de la transparence de l'air, des modifications qu'elle éprouve, et de la portée optique qui correspond à l'intensité lumineuse.

Trois extraits de ce Mémoire, relatifs à la transparence des flammes et de l'atmosphère, et à la visibilité des feux scintillants, ont reçu l'approbation de l'Académie des Sciences, qui les a fait insérer au *Recueil des Savants étrangers*.

Resal (*H.*). — Notice sur la machine à détente variable de M. Corliss. (177-190).

Cette Notice a pour objet d'attirer l'attention des ingénieurs et des industriels sur une machine qui, par ses qualités, est appelée à rendre de grands services.

Les diagrammes relevés au moyen de l'indicateur de Watt diffèrent très-peu des diagrammes théoriques résultant de la loi de Mariotte, ce qu'il faut peut-être attribuer à ce que les cylindres sont munis de chemises de vapeur.

Le rendement observé sur ces machines a atteint 0,90 et même 0,93. C'est un résultat inespéré, qui permet de les considérer comme réalisant la perfection.

Brune. — Résistance des cylindres, des sphères et des plaques circulaires. (227-252).

La théorie des cylindres et des sphères pressés normalement a été donnée, pour la première fois, par Lamé, comme application de la théorie mathématique de l'élasticité de Poisson et Cauchy ; celle de la plaque circulaire a été donnée par Poisson, et depuis par Kirchhoff. Navier avait eu le premier l'idée de suivre une méthode plus élémentaire et plus simple pour la théorie de la plaque, mais il avait traité le cas général d'un profil quelconque. Beaucoup plus récemment, M. Resal a étudié le même problème pour les plaques circulaires, courbes ou planes, chargées uniformément et normalement; mais sa méthode diffère de celle de l'auteur, et les résultats ne sont pas tout à fait concordants avec ceux du présent Mémoire.

L'auteur établit que ses formules sont identiques avec celles que fournit la théorie mathématique de l'élasticité, ce qui est dû à ce que l'on a tenu compte de la contraction ou dilatation transversale, considération légitimée par les délicates expériences de M. Cornu, qui ont montré que la contraction transversale est exactement à l'allongement longitudinal dans le rapport assigné dans l'hypothèse de Cauchy.

Vigan. — Notes sur les ponts métalliques. (253-292).

Dans les notes ayant plus spécialement un caractère mathématique, l'auteur étudie la tension maximum produite dans un arc métallique par un poids uniformément réparti suivant sa corde; puis il passe à la traduction graphique des lois représentatives des pressions et des tensions longitudinales produites à l'extrados et à l'intrados.

Pelletreau. — Résistance des murs à la pression de l'eau. (356-438).

Ce Mémoire a pour but l'étude des diverses questions relatives aux murs de réservoir, aux barrages fixes, etc., en un mot, aux murs destinés à résister à l'action d'une masse liquide.

Tome VII; 1877.

Kleitz (C.). — Stabilité des poutres métalliques. (21-45).

Suite de la Note sur la même question.

L'auteur étudie les conditions dans lesquelles se réalise chacun des trois moments maxima de flexion produits dans les sections verticales des poutres droites d'un pont de chemin de fer au moment du passage d'un train.

Decœur. — Nouveaux types de turbines et de pompes centrifuges. (401-434).

Étude théorique et pratique d'une turbine centripète, dont le modèle a été suggéré à l'auteur à la suite de perfectionnements apportés à la roue à cuiller des anciens moulins. Il s'est trouvé conduit ensuite à un nouveau modèle de pompe centrifuge.

De Perrodil. — Sur un instrument de jaugeage des eaux. (467-475).

L'instrument proposé par l'auteur, et qu'il appelle *hydrodynamomètre*, sert à faire connaître la vitesse qui existe en un point déterminé d'une masse liquide en mouvement. Il permet, en effet, d'évaluer la pression exercée par le liquide contre un obstacle placé en ce point. Cette pression est équilibrée par l'élasticité de torsion d'une tige métallique. Un cercle gradué permet d'observer l'amplitude de cette torsion.

Cet instrument est applicable au jaugeage des eaux ou plus généralement à l'observation des lois de l'Hydraulique.

Lavoinne. — Sonnette balistique de Shaw. (511-525).

Le mouton qui sert à battre le pieu tombe sous l'influence de la pesanteur, et frappe la tête du pieu par l'intermédiaire d'un matelas d'air emprisonné dans un

canon en acier. Se trouvant brusquement comprimé, cet air est amené à une température capable de déterminer l'inflammation d'une cartouche de poudre de mine, dont l'explosion relève le mouton à une certaine hauteur, à laquelle il est retenu par un frein, puis ensuite abandonné à lui-même.

Une étude théorique du fonctionnement de cette ingénieuse machine confirme les résultats obtenus déjà par l'expérience, qui démontre l'avantage d'une explosion lente et de l'emploi de gros moutons pour le battage des pilots.

Collignon (*E.*). — Note sur les *Leçons de Statique graphique* de M. A. Favaro. (557-570).

Cet article est, en réalité, un compte rendu bibliographique d'un Ouvrage de M. A. Favaro, qui vient d'obtenir à l'étranger, et qui obtiendra bientôt en France, un légitime succès.

Les *Leçons de Statique graphique* sont divisées en trois Parties. La première, intitulée Géométrie de position, est, sous une forme élémentaire, un Traité de Géométrie projective qui n'occupe pas moins des deux cinquièmes du volume entier.

La deuxième Partie a pour objet le Calcul graphique, les principes de la Géométrie anamorphique, et la solution de divers problèmes que rencontrent les ingénieurs.

La troisième et dernière Partie est la Statique graphique, et constitue l'objet principal de cet Ouvrage, qui se termine par la recherche graphique des barycentres et des moments d'inertie.

Tome VIII; 1877.

Brune (*E.*). — Influence de la position des tirants sur la résistance des arcs circulaires. (105-121, 3 fig.).

Un tirant peut annuler la poussée d'un arc, s'il est relié à deux points à égale distance des extrémités. Si le surhaussement a été choisi convenablement, la pression maximum et par suite le volume de matière exigé pour l'arc peuvent être réduits, dans certains cas, de plus de moitié; en même temps, la flèche devient cinq fois plus petite.

A cette question non encore étudiée, l'auteur a ajouté celle des arcs outre-passés, qui permettent de supprimer la poussée sans employer de tirants ni de sabots de glissement.

Kleitz. — Note sur la théorie du mouvement non permanent des liquides et sur son application à la propagation des crues des rivières. (133-196, 1 pl.).

Se plaçant à un point de vue tout spécial, l'auteur a voulu énoncer certains principes qu'il est utile de connaître dans les applications de l'Hydraulique. Dans la présente Note, il s'est proposé surtout d'expliquer comment on doit entendre la propagation des crues des cours d'eau, et quelles sont les expressions exactes des vitesses de propagation de débits égaux ou de sections égales, et celles des vitesses de propagation des débits et des sections maxima. Il compare enfin les résultats de ses recherches avec ceux d'un Mémoire de M. Boussinesq sur la théorie des eaux

courantes, et croit pouvoir affirmer que ses propres formules conviennent plus spécialement aux liquides réels de l'Hydraulique. L'étude théorique offre déjà de grandes difficultés, mais ses conclusions et ses hypothèses ne sauraient s'appliquer en toute rigueur aux masses liquides des fleuves et rivières.

Pelletreau. — Résistance des murs qui supportent une poussée d'eau. (258-290, 1 pl.).

Suite du Mémoire dont il a été déjà question. L'auteur examine ici les modifications que peut subir le profil, si l'on tient compte de la réaction des flancs de la vallée.

Bresse. — Détermination graphique des moments fléchissants. (320-328, 1 pl.).

Dans l'excellent Ouvrage qu'il a publié sous le titre de la *Statique graphique et ses applications aux constructions*, M. Maurice Lévy indique un moyen de déterminer géométriquement les moments fléchissants dus à l'action d'un certain nombre de poids isolés, sur une poutre à deux appuis simples. Ce moyen, très-simple et élégant, fondé sur l'emploi du polygone funiculaire, exige la recherche préalable des réactions des appuis, et oblige à recommencer à nouveau cette même recherche, ainsi que la construction du polygone funiculaire, si les poids viennent à se déplacer.

L'auteur se propose de montrer que ces inconvénients peuvent être évités, et que la construction d'un polygone funiculaire unique peut fournir les moments fléchissants et les réactions des appuis, pour une poutre à deux appuis simples, pendant le passage d'un convoi de poids isolés circulant très-lentement.

Cette construction, ainsi que l'a reconnu l'auteur, s'accorde avec une construction donnée dans la *Statique graphique* de M. Culmann.

Dupuy. — Appareil destiné à mesurer directement le travail du fer. (381-410, 12 fig., 4 pl.).

Il y a grand intérêt à trouver un moyen de déterminer le travail du fer dans chacune des pièces d'un pont métallique, ne serait-ce que pour dissiper l'inquiétude qui doit rester dans l'esprit des constructeurs, même après les épreuves, en raison même de la nature des limites admises dans la pratique. Un appareil très-simple, formé d'un levier actionnant une aiguille, une extrémité du levier et le pivot de l'aiguille étant fixés à la pièce de fer dont on veut étudier la déformation, permet d'étudier avec facilité les actions qui s'opèrent au sein d'une construction en fer. L'appareil a été essayé, d'une manière très-concluante, sur une poutre d'expérience et sur deux ponts métalliques récemment construits.

Pelletreau. — Stabilité des murs qui supportent une poussée d'eau. (480-539, 1 pl.).

Suite des articles déjà publiés dans les *Annales*.

Ce Mémoire est consacré à l'étude de la stabilité des murs de barrage, fondés sur roches, mais ayant le couronnement au-dessus du plan d'eau.

Le point de départ est le profil théorique d'un mur dont le couronnement est situé au niveau du plan d'eau d'amont. Alors la couronne a une épaisseur nulle. Lorsqu'il existe un couronnement, il ajoute à la stabilité du barrage et peut

assurer, en même temps, l'aménagement d'une voie de communication. L'auteur examine s'il y a avantage à se servir ainsi du couronnement ou à traiter les deux Ouvrages isolément. Son Mémoire se subdivise dans les principaux articles suivants :

Influence de l'épaisseur en couronne, quand le couronnement reste au niveau du plan d'eau. Calcul de la partie courbe du profil. Modification des zones du mur par suite de l'épaisseur en couronne. Courbe de l'écrasement. Courbe des premiers passages. Courbe des deuxièmes passages. Surélévation du couronnement. Variation de la partie rectangulaire du profil.

Il est terminé par un examen approfondi du cas des murs fondés sur le rocher et pouvant avoir leur couronnement au-dessous du plan d'eau.

Kleitz. — Calculs de stabilité des travées métalliques. (549-601, 12 fig.).

Note sur la substitution, dans les calculs de stabilité, des travées métalliques supportant des voies de terre, des surcharges uniformément réparties à celles qui résultent du passage des plus lourdes voitures.

H. B.

NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE, rédigée par E. CATALAN, avec la collaboration de MM. MANSION, LAISANT, BROCARD, NEUBERG et ÉD. LUCAS [1].

Tome III; 1877.

Lucas (Éd.). — Sur l'emploi, dans la Géométrie, d'un nouveau principe des signes. (Fin, *voir* t. II, p. 384). (8-5).

Applications à la Géométrie élémentaire et à la Trigonométrie sphérique du principe nouveau. (Voir *Bulletin*, I_2, 276.)

Brocard (H.). — Roulettes de coniques. (Suite, *voir* t. II, p. 373). (6-13).

Lieu du centre ou des sommets d'une conique à centre qui roule, sans glisser, sur une droite.

Mansion (P.). — Identité de la transformation linéaire avec la transformation projective. (14-20).

D'après Salmon et Chasles. Les coordonnées des points circulaires à l'infini sont $e^{\pm\alpha i}$, $e^{\pm\beta i}$, $e^{\pm\gamma i}$, $i=\sqrt{-1}$, α, β, γ étant les angles des côtés du triangle de référence, avec une direction fixe.

Catalan (E.). — École Polytechnique. Concours de 1876. Seconde composition de Mathématiques. (27-29).

---

[1] Voir *Bulletin*, I_2, p. 269.

Brocard (*H.*). — Roulettes de coniques. (Fin, *voir* t. III, p. 13). (38-40).

Lieu du sommet d'une parabole ou, en général, d'un point d'une conique qui roule, sans glisser, sur une droite.

Ghysens (*É.*). — Sur l'aire de l'ellipsoïde. (40-44).

Simplification de la méthode de M. E. Catalan.

Le Paige (*C.*). — Sur une équation aux différences finies. (45-47).

Lucas (*É.*). — Sur le théorème de Stiefel. (47-48).

Brocard (*H.*). — Propriété du triangle. (65-69, 106-110, 187-192).

Lucas (*Éd.*). — Sur la généralisation de deux théorèmes dus à MM. Hermite et Catalan. (69-73).

Démonstration, au moyen des formules symboliques, des théorèmes de MM. Catalan (*Mélanges mathématiques*, p. 127), v. Staudt (*Journal de Crelle*, t. XXI, p. 372), Hermite (*Ibid.*, t. LXXXI, p. 93).

Mister. — Sur la démonstration du théorème de Taylor. (73-77).

Mansion (*P.*). — Démonstration du tautochronisme de la cycloïde et du théorème de Neumann, d'après le Traité d'Huygens, intitulé : *Horologium oscillatorium.* (77-81).

Analyse de la deuxième Partie de cet Ouvrage célèbre. Déduction du théorème de Neumann (*Math. Ann.*, t. I, p. 507-508) de la proposition XXIII de Huygens.

Roche (*É.*). — Note sur la formule barométrique de Laplace. (97-105).

Dans une atmosphère fictive où la pression est partout la même, la hauteur de la colonne barométrique ira en croissant à mesure que l'on s'élèvera, parce que le poids de cette colonne diminue quand on s'éloigne du centre de la Terre. Il en sera de même dans une atmosphère où la pression irait en diminuant avec une grande lenteur. Or, Laplace, pour établir sa formule, n'ayant pas tenu compte des variations de la température, a supposé implicitement que l'atmosphère réelle était telle que la pression de l'air y décroît rapidement d'abord, puis d'une manière de plus en plus lente. Sa formule conduit donc à cette conséquence, signalée par Babinet : pour une certaine altitude du baromètre, élevé indéfiniment dans l'atmosphère terrestre, la colonne mercurielle doit cesser de baisser et même reprendre une marche ascensionnelle. D'autres hypothèses que celles de Laplace peuvent conduire à des résultats plus singuliers encore. Naturellement, ces conséquences d'hypothèses, non réalisées dans la nature, ne prouvent rien pour notre atmosphère réelle.

Catalan (*E.*) — Sur divers Articles de M. Mansion. (110-115).

Sur le développement de arc tang x, pour $x = 1$ (*voir N. C. M*, t. II, p. 104). — Sur un théorème relatif à l'intégration d'une série non convergente pour la limite supérieure de l'intégration (Sturm, *Cours d'Analyse*, 1857, t. II, p. 359). — Sur la proposition : si arc tang $x = \sqrt{-z}$, il en est de même de arc tang $(x+b)$. — Sur la terminologie relative aux espaces à n dimensions.

De Coatpont. — Sur un problème de M. Busschop. (116-117).

Partager un carré en segments qui puissent constituer n segments égaux.

De Tilly. — Solution de la question suivante : « Étant donné un cylindre de révolution indéfini, construire la génératrice qui passe par un point A, pris sur la surface ».

De K et L comme centres, décrivons, avec trois rayons r_1, r_2, r_3, six courbes sphériques se coupant en six points C_1, D_1, C_2, D_2, C_3, D_3, situés dans un plan perpendiculaire à KL, sur une ellipse dont on saura trouver, en la transportant dans un plan, le petit axe, en grandeur et en position. On peut trouver les extrémités C et D de ce petit axe sur le cylindre : CD est, d'ailleurs, un diamètre du cylindre. Les courbes sphériques décrites de C et D comme centres et passant par A se coupent en un second point situé sur la génératrice demandée.

Kempe (*A.-B.*). — Sur la production du mouvement rectiligne exact au moyen de tiges articulées. Traduit de l'anglais par V. Liguine. (129-139, 177-186).

Traduction d'un Mémoire publié dans les *Proceedings of the Royal Society*, n° 63, 1875, p. 565-567, avec une Note complémentaire sur le *Quadruplane*, dont il a déjà été parlé, *N. C. M.*, t. II, p. 133-134.

Brocard (*H.*). — Notes sur divers Articles de la *Nouvelle Correspondance*. (139-141).

Le Paige (*C.*). — Sur la multiplication des déterminants. (141-144).

Gelin. — Sur le théorème de Nicomaque. (144).

Gelin. — Note sur la question 220. (145).

De Longchamps (*G.*). — Note sur la série harmonique. (145-146).

Fréson (*J.*). — Théorèmes sur les transversales. (146-147).

Neuberg (*J.*). — Extraits analytiques. (147-149).

Sur divers théorèmes relatifs à n tangentes à une parabole, dus à M. Ritchie.

Catalan (*E.*). — Variétés. L'enseignement des Mathématiques élémentaires en Belgique. (149-157).

Bibliographie. — Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler. (158-159).

Réalis (*S.*). — Sur quelques questions proposées dans la *Nouvelle Correspondance*. (193-194).

Ghysens (*E.*). — Sur une propriété des lignes algébriques planes. (194-197).

Démonstration directe d'un cas particulier d'un théorème de Liouville. (*Journal de Liouville* (1re série, t. IX, p. 350).

Mansion (*P.*). — Sur la théorie des séries, à propos d'un Article de M. Catalan. (197-204).

Réponse aux critiques de M. Catalan. La série $\sum_{1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{2n+1})$, convergente pour x positif et < 1, a pour intégrale la série des intégrales de ses termes. La série des intégrales est convergente pour $x = 1$, mais n'est pas la limite vers laquelle tend la série quand x, étant plus petit que 1, tend vers 1.

De Coatpont. — Sur la Géométrie de la règle. (205-208).

On peut, au moyen d'une règle permettant de tracer deux droites parallèles, faire toutes les constructions que l'on effectue ordinairement avec la règle et le compas.

Mansion (*P.*). — Extraits analytiques. (208-209).

Van Tricht (*V.*), S. J. — Extrait d'une lettre. (209-210).

Les lentilles polies par Huygens, qui se trouvent au collége de Notre-Dame de la Paix, à Namur, sont signées *C. Huygens, Chr. Hugenius* (sans *h*).

Lucas (*Éd.*). — De l'application des systèmes de coordonnées tricirculaires et tétrasphériques à l'étude des figures anallagmatiques (suite). (225-230).

Voir *N. C. M*, t. II, p. 225, 257, 289.
Transformation des coordonnées tricirculaires et tétrasphériques.

Brocard (*H.*). — Note sur la cardioïde. (231-234, 408-410).

Reiss. — Théorie du Solitaire, librement traduit de l'allemand par M. Ch. Ruchonnet. (234-241, 263-268, 289-294).

Voir *Journal de Crelle*, t. LIV, p. 344-379.

Catalan (*E.*). — Sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques. (241-242).

Mansion (*P.*). — Extraits analytiques. (243-247).

Voir CAYLEY, *Messenger of Mathematics*, 1875, t. V, n° 49, p. 7-8. Dans une Note, M. Catalan donne explicitement les formules dont Cayley s'occupe dans son Article.

Lucas (*Éd.*). — De l'application des systèmes de coordonnées tricirculaires et tétrasphériques à l'étude des figures anallagmatiques (suite). (257-263).

Toute anallagmatique du quatrième ordre possède, pour chacun de ses quatre cercles d'inversion, un seul tricycle autopolaire trirectangle, etc.

Brocard (*H.*). — Position limite d'une série de points du plan. (269-270).

Breton (*Ph.*). — Question sur les doubles systèmes de coniques orthogonales. (270-272).

Catalan (*E.*). — Quelques questions d'examens. (272-275).

Catalan (*E.*). — Sur deux théorèmes de Sturm. (295-299).

Réponse à la réplique de M. Mansion, relative à l'intégration des séries.

Breton (*Ph.*). — Aperçu de questions sur les faisceaux de surfaces du deuxième ordre. (299-306, 337-340).

De Longchamps (*G.*). — Note de Géométrie. (310-312, 340-347).

Généralisation des théorèmes de M. Ritchie, analysés par M. J. Neuberg. (Voir *N. C. M.*, p. 147).

Laisant (*A.*). — Un commentateur du marquis de l'Hospital. (312-314).

Laisant (*A.*) et *Catalan* (*E.*). — Centre de gravité d'un arc de cercle. (347-349).

Brocard (*H.*). — École Normale. Concours de 1877. Composition en mathématiques. (349-356).

Lucas (*Éd.*). — Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques. (369-376, 401-407).

Cet important Mémoire contient les principes fondamentaux d'une théorie des fonctions numériques simplement périodiques, analogues aux fonctions circulaires. I. *Définitions.* Soient a, b les racines de $x^2 = \mathrm{P}x - \mathrm{Q}$, P et Q étant des nombres entiers premiers entre eux, positifs ou négatifs. Posons $\delta = a - b$, $\delta^2 = \Delta = \mathrm{P}^2 - 4\mathrm{Q}$, $\mathrm{U}_n = \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$, $\mathrm{V}_n = a^n + b^n$. Les fonctions numériques U_n, V_n donnent naissance

à trois espèces de suites numériques, selon que les racines a, b sont réelles et entières, réelles et incommensurables ou imaginaires. Exemples : 1° $a = 2$, $b = 1$; U_n, V_n donnent des séries considérées par Fermat. 2° $P = 1$, $Q = -1$; U_n donne une suite de Fibonacci. 3° $P = 2$, $Q = -1$; U_n donne une suite remarquable que l'on peut appeler série de Pell. 4° Si $P = 1$, $Q = 1$, $U_{3n} = 0$, $U_{3n+1} = U_{3n+2} = (-1)^n$. — II. *Relations avec les fonctions circulaires ou hyperboliques.* On a

$$V_n = 2Q^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{ni}{2} l \frac{a}{b}\right), \quad \sqrt{-\Delta}\, U_n = 2Q^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{ni}{2} l \frac{a}{b}\right), \quad i = \sqrt{-1}.$$

A chaque formule relative aux fonctions circulaires en correspond une relative à U_n, V_n. Ainsi la formule $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ donne $U_{2n} = U_n V_n$, etc. — III. *Relations de récurrence.* On trouve aisément

$$U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n, \quad V_{n+2} = PV_{n+1} - QV_n,$$
$$U^n F(U^2) = U^n F(PU - Q), \quad V^n F(V^2) = V^n F(PV - Q).$$

La dernière formule est symbolique. F désigne une fonction algébrique entière, et l'on suppose que les exposants de U et de V sont remplacés par des indices quand les calculs ont été effectués. On trouve ainsi, en particulier, pour la série de Fibonacci : $U^{n \pm p} = U^n (U \pm 1)^p$. Au moyen d'un artifice de calcul très-simple, qui consiste à remplacer a par a^r, b par b^r dans l'équation $x^2 = (a+b)x - ab$, on trouve encore

$$U_{n+2r} = V_r U_{n+r} - Q^r U_n, \quad V_{n+2r} = V_r V_{n+r} - Q^r V_n.$$

IV. *Relations avec les déterminants.* Des égalités $U_2 - PU_1 = 0$, $U_3 - PU_2 + QU_1 = 0$, etc., on tire U_{n+1}, exprimé par un déterminant à n colonnes. De même pour V_n. — V. *Relations avec les fractions continues.* On trouve immédiatement, en fraction continue, les rapports $(U_{n+1} : U_n)$, $(U_{nr+r} : U_{nr})$. Puis, par les propriétés des réduites,

$$U_{nr}^2 - U_{nr-r} U_{nr+r} = Q^{nr-r} U_r^2, \quad U_{n+r} - Q^r U_n^2 = U_r U_{2n+r},$$

et des formules analogues pour la fonction V. — VI. *Développements en série de fonctions.* On a identiquement

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_2}{U_1} + \left(\frac{U_3}{U_2} - \frac{U_2}{U_1}\right) + \ldots + \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{U_n}{U_{n-1}}\right),$$

ou

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_2}{U_1} - \frac{Q}{U_1 U_2} - \frac{Q^2}{U_2 U_3} - \ldots - \frac{Q^{n-1}}{U_{n-1} U_n},$$

relation qui donne divers développements remarquables. On peut trouver, de même, une suite pour le rapport $(U_{n+kr} : V_{n+kr})$ et le rapport inverse. Pour $k = \infty$, ces suites donnent en série le développement de $\sqrt{\Delta}$ et $(1 : \sqrt{\Delta})$.

Mansion (*P.*). — Résolution d'un système de n équations à n inconnues, dont une est du second degré, tandis que les autres sont linéaires. (376-381).

Le procédé est une simplification de celui de Versluys (*Archives de Grunert*, t. LX, p. 128-137). Il consiste à remplacer l'équation du deuxième degré homo-

gène à $n+1$ inconnues, $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \ldots = 0$, par $n+1$ équations de la forme

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{p,n+1}x_{n+1} + A_{p1}X_1 + \ldots + A_{pn}X_n = 0. \quad (p = 1, 2, \ldots, n+1);$$

les équations du premier degré étant

$$A_{1q}x_1 + A_{2q}x_2 + \ldots + A_{n+1,q}x_{n+1} = 0, \quad (q = 1, 2, \ldots, n-1),$$

on ajoute une équation auxiliaire linéaire, compatible avec les précédentes,

$$A_{1n}x_1 + A_{2n}x_2 + \ldots + A_{n+1,n}x_{n+1} = 0.$$

Si les racines sont égales, $X_n = 0$, et cette dernière équation est superflue. Dans le cas général, les valeurs des inconnues sont proportionnelles aux mineurs relatifs aux éléments de la dernière ligne du déterminant des $(2n+1)$ équations précédentes. On trouve ces valeurs sous une forme simple pour x_i, x_k, en supposant, ce qui est permis, $A_{rn} = 0$, sauf pour $r = i$, $r = k$.

Dubois (*E.*). — Note sur les cercles tangents à trois cercles donnés. (381-384).

Proth (*F.*). — Note sur une question d'Arithmologie. (411-412).

Lucas (*Éd.*). — Problèmes sur la Géométrie des quinconces dans le plan et dans l'espace. (412-413).

Correspondance. — (20, 49, 81, 118, 159, 209, 247, 275, 315, 384, 413).

Questions résolues. — (23, 49, 83, 119, 162, 211, 249, 278, 319, 356, 386, 417).

Questions proposées. — (29, 63, 94, 128, 174, 223, 255, 286, 334, 366, 397, 431).

Rectifications et Remarques. — (238, 336, 400).

Errata. — (64, 96, 368). P. Mansion.

NOUVELLES ANNALES de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Ch. Brisse ([1]).

2e série. — Tome XVI; 1877.

Faure. — Théorie des indices. (5-18, 160-176, 193-211, 249-258, 289-302, 467-469, 508-521, 541-562).

Nous espérions (voir *Bulletin*, 1re série, t. XI, p. 125) pouvoir rendre compte de

---

([1]) Voir *Bulletin*, 2e série, t. I, 2e Partie, p. 281.

cette série d'Articles sur la Théorie des indices; mais la fin n'est pas encore publiée, et le développement même du sujet traité par M. Faure s'oppose à une analyse sommaire.

Lucas (*Éd.*). — Sur la somme des puissances semblables des nombres entiers. (18-26).

Par l'introduction de formules symboliques aussi simples qu'ingénieuses, l'auteur arrive à présenter d'intéressantes propriétés des nombres de Bernoulli. Il est probable qu'en suivant cette voie on en pourrait trouver encore un grand nombre d'autres. Cette étude est, en quelque sorte, le complément d'un précédent Article. (Voir *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. XIV, 1875, p. 487).

Laurent (*H.*). — Note sur un théorème fondamental dans la théorie des courbes. (26-28).

Ce théorème consiste en ce que, si deux courbes ont entre elles un contact d'ordre n, les ordonnées sont égales, ainsi que leurs n premières dérivées. La Note a pour objet de donner de cette proposition une démonstration rigoureuse.

Compositions écrites données à l'École Centrale (10 et 11 octobre 1876). Énoncés. (28-30).

Desboves (*A.*). — Bibliographie : Questions de Trigonométrie rectiligne; par A. Desboves; 2ᵉ édition. (30-32).

Moret-Blanc. — Extrait d'une Lettre. (32-33).

Au sujet de la question 1142.

Beauvais (*G.*). — Solution de la question 1159. (33-37).

Cette question est relative au déplacement d'un angle constant, qui reste tangent à une courbe plane convexe et fermée.

Pellissier. — Solution des questions 1163 et 1164. (37-42).

Il s'agit de propriétés des transformations biquadratiques.

Pravaz. — Solution de la question 1184. (42-45).

Surface du second ordre passant par trois droites infiniment voisines appartenant à une surface réglée.

Genese (*R.-W.*). — Solution de la question 1217. (45-48).

Propriété d'un des axes d'une conique par rapport au triangle de référence.

Questions proposées, 1218 à 1220. (48).

Brisse (*Ch.*). — Sur les débuts de la Trigonométrie. (49-61).

Cet Article portait l'annonce d'une suite qui n'a pas été publiée jusqu'à présent. L'auteur examine successivement les notions suivantes : angles, cosinus, projections, sinus, formules d'additions.

Andreievsky. — Sur une méthode de variation des paramètres dans les intégrales indéfinies. (61-75).

L'auteur s'est proposé d'appliquer aux paramètres des intégrales indéfinies les principes de la variation des constantes arbitraires. D'une intégrale connue, on arrive ainsi à en déduire d'autres, en général plus compliquées.

Consulter, sur les questions de cette nature, les Mémoires suivants de M. Liouville, cités par M. Andreievsky : *Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* (*Journal de l'École Polytechnique*, deux Mémoires, XXIIe cahier); un *Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes* (*Journal de Crelle*, t. XIII, p. 93).

Concours général de 1876. — Énoncés. (75-78).

Laurent (*H.*). — Théorie élémentaire des fonctions elliptiques. (78-96, 211-215, 361-369, 385-406, 433-450, 481-495).

M. Laurent s'est proposé de présenter aux lecteurs des *Nouvelles Annales* une théorie des fonctions elliptiques résumant leurs propriétés les plus importantes et leurs principales applications à la Géométrie et à la Mécanique. C'est une tentative à laquelle on ne peut qu'applaudir; mais il est peut-être regrettable que l'on fractionne en autant d'articles la publication d'une théorie importante, à ce point que la fin est encore loin d'être publiée aujourd'hui. Voici le sommaire de ce qui a paru jusqu'à présent :

Notions préliminaires. — Intégrales prises entre des limites imaginaires. — Cas où le théorème de Cauchy tombe en défaut. — Calcul des résidus. — Application des principes précédents à la recherche des intégrales définies. — Quelques propriétés des fonctions. — Théorèmes de Cauchy et de Laurent. — Remarque concernant les fonctions périodiques. — Notions sur les fonctions algébriques. — Discussion de la fonction $\sqrt{x-a}$. — Discussion de la fonction $\sqrt{A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}$. — Études des premières transcendantes que l'on rencontre dans le Calcul intégral. — Des divers chemins que peut suivre la variable dans la recherche des intégrales des fonctions algébriques. — Des intégrales elliptiques. — Réduction des intégrales elliptiques à des types simples. — Des transcendantes de Legendre et de Jacobi. — Étude de l'intégrale $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$. — Étude et discussion de la fonction $\sin \operatorname{am} x$. — Sur les fonctions doublement périodiques. — Théorème de M. Hermite. — Remarques relatives aux produits infinis. — Sur les fonctions auxiliaires de Jacobi. — Considérations nouvelles sur les fonctions auxiliaires de Jacobi. — Des fonctions du premier ordre. — Des fonctions du second ordre. — Résolution des équations Θ, Θ_1, H, $H_1 = 0$. — Nouvelles définitions des fonctions Θ, H, Θ_1, H_1. — Sur une formule de Cauchy; nouvelles expressions de Θ, H, Θ_1, H_1 en produits. — Relations algébriques entre Θ, H, Θ_1, H_1.

Resal (*H.*). — Solution élémentaire du problème général des brachistochrones. (97-104).

Dans cet article, M. Resal établit directement, par des considérations géométriques, les principales propriétés des brachistochrones considérées à un point de vue général. (*Voir* un Mémoire de M. Roger, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, 1re série).

Rouché (*Eug.*). — Sur l'élimination. (105-113).

L'auteur démontre trois théorèmes nouveaux et intéressants, sur les racines communes à deux équations, par la considération des déterminants.

Rouquet (*V.*). — Note sur les vraies valeurs des expressions de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. (113-116).

Le but de cet Article est de donner un énoncé plus exact et moins général que l'énoncé habituel, et d'en présenter une démonstration complétement rigoureuse, en se bornant au cas des fonctions réelles qui ont des dérivées.

Notice sur la vie et les travaux de Victor-Amédée Le Besgue. (116-128).

Cette intéressante Notice biographique, communiquée par M. Hoüel, est suivie d'un Catalogue des travaux de Le Besgue, comprenant 124 Mémoires ou Notes.

Académie royale des Sciences de Turin. — Programme du prix Bressa. (129-131).

Bergeron (*J.-P.-A.*). — Bibliographie : Éléments de Géométrie descriptive, par F.-J.-C. Du volume des segments de l'ellipsoïde et des hyperboloïdes, en fonction de la hauteur et de la section équidistantes de deux bases parallèles, par le frère Gabriel-Marie. (132-137).

Publications récentes. (137-141).

1. I sei cartelli di Matematica disfida, di Ludovico Ferrari e Nicolò Tartaglia; Milano, 1876. — 2. Cours de Mécanique analytique, par Ph. Gilbert; Louvain et Paris, 1877. — 3. Interpolation and adjustement of series, by E.-L. de Forest; New-Haven, 1876. — 4. Théorie analytique des lignes à double courbure, par Eugène Catalan; Bruxelles, 1877. — 5. Note sur le planimètre polaire de M. Amsler, par C.-A. Laisant; Bordeaux, 1876. — 6. Théorèmes sur les nombres premiers; théorèmes sur les nombres; sur un problème d'Arithmétique; par C.-A. Laisant; Bordeaux, 1876. — 7. Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni; Roma, 1876.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 18. (142-143).

Intersection d'une droite et d'une conique donnée par cinq points.

Questions proposées, 1221 à 1223. (144).

Lalanne (*L.*). — Philosophie des Mathématiques : sur un nouvel exemple de la réduction des démonstrations à leur forme la plus simple et la plus directe. (145-151).

L'exemple en question n'est autre que ce théorème de Statique : « Un polyèdre quelconque est en équilibre lorsqu'il n'est soumis qu'à l'action de forces appliquées

normalement aux faces, en leurs centres de gravité, et respectivement proportionnelles aux superficies de ces faces ». La démonstration est essentiellement fondée sur cette proposition, que la somme des projections des faces d'un polyèdre sur un plan est nulle.

Gilbert (*Ph.*). — Sur un problème de Mécanique rationnelle. (152-156).

Solution de la question de Mécanique rationnelle proposée au Concours d'agrégation de 1876. Une solution précédemment publiée n'était pas exacte.

Lucas (*Éd.*). — Sur les théorèmes de Binet et de Staudt concernant les nombres de Bernoulli. (157-160).

Cette question se rattache à celle mentionnée plus haut : sur la somme des puissances semblables des nombres entiers. (Voir *Journal de Crelle*, t. XXI, p. 372; *Annales de Tortolini*, 1852; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXIII, p. 920, 1851, pour les travaux de MM. Clausen, v. Staudt, Genocchi, Hermite et Binet).

De Comberousse (*Ch.*). — J.-V. Poncelet : Seconde Partie du Cours de Mécanique appliquée aux machines, publié par M. X. Kretz. (177-180).

Article bibliographique. (*Voir*, pour la première Partie, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIII, p. 174).

Freson (*J.*). — Solution de la question de Géométrie analytique proposée au concours d'admission à l'École Centrale; 1876, 1re session. (180-182).

Lieux géométriques relatifs à des paraboles ayant un sommet commun et un point commun.

Terrier. — Solution de la question de Géométrie proposée au concours d'admission à l'École spéciale militaire; 1876. (183).

Desgardins (*O.*). — Solution de la question d'Algèbre proposée au concours d'admission à l'École spéciale militaire; 1876. (184).

Bourguet. — Extrait d'une Lettre. (185).

Énoncés de quatre questions d'Algèbre.

Poujade. — Extrait d'une Lettre. (185-187).

Remarques sur ce problème : « Trouver le lieu des sommets des triangles circonscrits à un ellipse et tels que les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés ».

Publications récentes. — Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler; Saint-Pétersbourg, 1877. (187).

Brocard (H.). — Solution de la question 21. (188-190).

Propriété de la circonférence passant par les milieux des côtés d'un triangle.

Brocard (H.). — Solution de la question 291. (190-191).

Si l'un des nombres $3^m+1, 3^{m+r}+1$ est divisible par 10, l'autre l'est aussi (m et r entiers et positifs).

Questions proposées, 1224 à 1228. (191-192).

Harkema (C.). — Sur quelques cas de séparation des variables dans l'équation $M\,dx + N\,dy + 0$. (215-218).

Le but de cette Note est de montrer comment l'intégration peut être facilitée, dans certains cas, par le passage aux coordonnées polaires.

Moret-Blanc. — Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École Normale supérieure, 1876. (218-224).

Problème relatif à des paraboles tangentes à deux droites rectangulaires, et telles que la corde des contacts passe par un point fixe.

Moret-Blanc. — Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École Centrale, 2e session, octobre 1876. (224-226).

Lieu géométrique.

Desboves. — Lettre. (226-228).

Sur deux théorèmes, le premier relatif à certains solides de révolution, le second exprimant une propriété du quadrilatère.

Publications récentes. (228-229).

1. Éléments de la théorie des déterminants, par G. Dostor; Paris, 1877. — 2. Sulle origini del metodo delle equipollenze, per G. Bellavitis; Venezia. — 3. Terza parte della tredicesima rivista di Giornali, per G. Bellavitis; 1876.— 4. Quarta ed ultima parte della tredicesima rivista di Giornali, per G. Bellavitis; 1876. — 5. Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, par D. André (Développements en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances. — Terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes); Paris, 1877. — 6. Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications, par D. André; Paris, 1876.

Question 1177. — Solution. (230-234).

Résoudre en nombres entiers positifs l'équation $1+x+x^2+x^3=y^2$.

Laisant (A.). — Solution de la question 1220 (234-235).

Centre de gravité d'un certain nombre de points mobiles sur des circonférences.

Jamet (V.). — Solution de la question 1221. (235-236).

Propriété du tétraèdre.

Jamet (*V.*). — Solution de la question 1223. (236-238).

Propriété de deux hyperboles équilatères.

Dessoudeix (*H.*). — Solution Géométrique de la question 1223. (238-239).

Questions proposées, 1229 à 1234. (239-240).

Righi (*Aug.*). — Nouveaux théorèmes de Géométrie projective. (241-249).

Cet intéressant article, extrait d'un appendice à un Mémoire sur la vision stéréoscopique (*Nuovo Cimento*, 2e série, t. XIV), est relatif à l'*homologie à deux axes*, ou *homologie harmonique*.

Bourguet. — Solution d'une question de licence, 1872. (258-260).

Mouvement d'un certain système matériel.

Lez. — Solutions de questions proposées par M. Bourguet. (260-263).

Propriétés des normales aux coniques.

Moret-Blanc. — Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique, 1876. (266-271).

Plan diamétral d'une surface. — Conditions de réalité des racines de l'équation $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$. — Lieu géométrique relatif à l'hyperbole équilatère.

Rebout (*Eug.*). — Formation d'un cube entier qui soit égal à la somme de quatre cubes entiers. (272-273).

Lagout. — Lettre. (273-278).

Il s'agit encore de la Tachymétrie. Malgré toute l'énergie que met M. Lagout à défendre sa prétendue méthode, et l'approbation officielle de M. Christophle, alors Ministre des Travaux publics, nous croyons que l'auteur trouvera peu d'adhérents parmi les géomètres, et nous considérons les critiques de M. Rey comme absolument fondées.

Publications récentes. — (278-281).

1. La théorie hugodécimale, par le comte Léopold Hugo; Paris, 1877. — 2. Traité de sténométrie, par J.-P.-A. Bergeron.

Escary. — Solution de la question 1062. (281-282).

Démonstration d'une identité algébrique.

Bertrand (*A.*). — Solution de la question 1222. (283-285).

Problème relatif à la circonférence.

De Virieu (*J.*). — Solution de la question 1226. (285-286).

Rendre $\frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \sin b}$ calculable par logarithmes.

Questions proposées, 1235 à 1242. (286-288).

Hioux (*V.*). — Démonstration analytique de quelques propriétés générales des surfaces du second ordre. (303-311).

Cette étude a pour point de départ le troisième paragraphe du Mémoire sur l'Homographie (*Aperçu historique*) intitulé : *Lieu géométrique du point de rencontre de trois plans tangents d'une surface du second degré, assujettis à certaines conditions.*

Hioux (*V.*). — Problème de Mécanique rationnelle, solution modifiée. (312-315).

Il s'agit de la question du concours d'agrégation de 1873.

Moreau. — Solution de questions proposées par M. S. Realis. (315-318).

Sur certains développements algébriques.

Muffat (*A.*). — Solution d'une question proposée par M. Bourguet. (318-319).

Racines de l'équation $0 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} - \ldots$.

Concours d'admission à l'École spéciale militaire, 1877. (319-321).

Programme des compositions.

Publications récentes. — (321-322).

1. Teoria dei fuochi delle coniche, per F. Pisani ; Napoli, 1877. — 2. Dimostrazioni geometriche delle principali formole di Trigonometria, per F. Pisani ; Napoli, 1877. 3. Formole empiriche per l'Idraulica sperimentale, per J. Nazzani ; Palermo, 1877.

Bibliographie. — (322-324).

Traité d'Algèbre élémentaire, par H. Signol ; Paris, in-8°, 336 p.

Correspondance. — (324-325).

Gerono. — Sur l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^3 = y^2 + 17$. (325-326).

Moret-Blanc. — Solution de la question 1224. (326-331).

Lieux géométriques relatifs à une famille de courbes planes.

Brunot (*Ch.*). — Solution de la question 1227. (332-333).

Propriété de la parabole.

Brunot (*Ch.*). — Solution de la question 1229. (333-334).

Propriété de l'équation $x^3 - 3qx + r = 0$.

QUESTIONS PROPOSÉES, 1243 à 1248. (335-336).

Amigues (*E.*). — Génération de certaines surfaces par leurs lignes de courbure. (337-360).

En prenant un système triplement orthogonal, et utilisant les notations de MM. Lamé et Darboux, l'auteur arrive à la considération de surfaces particulières qu'il appelle *gyrocyclides;* il donne un certain nombre de propriétés géométriques de ces surfaces.

André (*D.*). — Sur les chiffres qui terminent les puissances des nombres entiers. (370-572).

Démonstration de trois théorèmes d'Arithmétique, auxquels correspondent trois théorèmes d'Algèbre.

Jamet (*V.*). — Sur une application des déterminants. (372-373).

Vérification d'une identité.

Rey (*C.*). — Lettre : encore la Tachymétrie. (373-376).

Nous n'ajouterons aucune réflexion à celles qu'on a pu lire plus haut sur le même sujet. M. Rey se contente de citer les œuvres de M. Lagout; c'est une excellente manière d'édifier le lecteur sur la valeur de la Tachymétrie.

Laisant. — Extrait d'une lettre. (366).

Calcul de $\frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \sin b}$ par logarithmes.

Toubin. — Extrait d'une lettre. (377).

Sur le problème de la carte.

COMPOSITIONS ÉCRITES données à l'École Polytechnique en 1877. (377-381).

Énoncés pour le concours d'admissibilité et le concours d'admission.

Moreau (*C.*). — Solution de la question 454. (382-384).

Propriété d'une courbe du troisième degré.

QUESTIONS PROPOSÉES, 1249 à 1251. (384).

Laisant (*A.*).— Sur le centre de gravité d'un polygone. (407-409).

Lucas (*Éd.*). — Sur la résolution du système des équations $2v^2 - u^2 = w^2$ et $2v^2 + u^2 = 3z^2$ en nombres entiers. (409-416).

L'auteur arrive à la solution complète par des formules imaginées par lui à cet effet. *Voir* aussi, sur le même sujet, *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. XV, p. 468; 1876.

Catalan. — Sur une question proposée par M. Bourguet. (416-418).

Il s'agit de la question résolue par M. Muffat (p. 318); *voir* plus haut.

Brisse (*Ch.*). — Note sur la question précédente. (418-421).

Amigues (*E.*). — Mémoire sur les transformations du second ordre dans les figures planes. (422-424, 451-466, 496-507, 529-541).

Dans ces articles, M. Amigues, reprenant la méthode de Magnus (*Journal de Crelle*, 1831), en déduit un certain nombre de lois géométriques, particulièrement en ce qui concerne les systèmes de coniques.

Correspondance. — (425).

Publications récentes. — (425-426).

1. Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal, par F. Tisserand; Paris, 1877. — 2. Recueil d'Exercices sur la Mécanique rationnelle, par A. de Saint-Germain; Paris, 1877. — 3. Cours d'Algèbre supérieure, par J.-A. Serret; 4ᵉ édition, t. Iᵉʳ; Paris, 1877. — 4. Traité de Mécanique générale, par H. Resal; Paris, 1873, 1874, 1876. — 5. Traité d'Algèbre élémentaire, par E. Lauvernay; Paris, 1877.

Mémoires récents. — (427-429).

Lucas (*Éd.*). — Solution de la question 1180. (429-432).

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ n'est un carré que si $n = 24$.

Questions proposées, 1252 à 1254. (432).

Concours d'agrégation des Sciences mathématiques de 1875. (469-472).

Concours d'agrégation des Sciences mathématiques de 1876. (472-476).

Brocard (*H.*). — Solution de la question 580. (477-478).

Résolution d'un système d'équations proposé par Lamé.

Thuillier (*L.*). Solution de la question 1225. (478-480).

Problème relatif à deux coniques.

Publications récentes. — (480).

1. Recherches sur plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure, par Éd. Lucas; 1877. — 2. Nuovo metodo dei massimi e minimi delle funzioni primitive ed integrali; per Luigi Barbera. — 3. Principii elementari sulle probabilità, per G.-B. Marsano; Genova, 1876. — 4. Théorie des nombres entiers complexes et bicomplexes, par A. Benthem. — 5. Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex, et sur les Géométries non euclidiennes, par A. Genocchi; Turin, 1877.

Compagnon. — Bibliographie : questions proposées sur les Éléments de Géométrie, par P.-F. Compagnon; 1877. (521-523).

Brunot (*Ch.*). — Solution de la question 1210. (523-525).

Enveloppe d'une sphère assujettie à certaines conditions.

Pisani (*F.*). — Solution de la question 1242. (525-527).

Théorème relatif à une conique.

Lapierre (*J.*). — Solution de la question 1244. (527-528).

Formule de Trigonométrie.

Desboves (*A.*). — Bibliographie : questions d'Algèbre élémentaire, par A. Desboves; 2e édition. (563-564). A. L.

REVUE D'ARTILLERIE (1).

Tome VIII (avril-septembre 1876).

De Sparre (*M.*). — Note sur le tir plongeant. (122-127, 1 fig.).

Cette Note se divise en deux Parties : substitution du cercle osculateur à la trajectoire dans la dernière fraction de son parcours; autre procédé de détermination, et calcul de l'erreur ainsi produite et toujours négligeable.

Vallier (*E.*). — Équation empirique de la trajectoire. (219-232).

L'équation de la trajectoire, dans le vide, est

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}.$$

La Commission de Gavre a adopté la relation

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{2 \cos^2 \alpha}\left(\frac{1}{v^2} + \frac{3}{4}\frac{c}{v}x\right),$$

(1) Voir *Bulletin*, t. XI, p. 74.

et l'École d'Application un terme de plus,

$$y = x \tang \alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}\left(1 + \frac{2}{3}cvx + \frac{1}{6}c^2v^2x^2\right),$$

c désignant le coefficient balistique.

L'auteur rappelle les difficultés que l'on rencontre pour l'intégration, surtout dans la dernière équation, et, se reportant à la formule de Gavre, il a cherché si l'on ne pourrait substituer, avec la même approximation, une formule logarithmique, plus avantageuse, par conséquent, pour le calcul. Il propose la modification suivante :

$$y = x \tang \alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\omega}\, 10^{mk},$$

ω étant l'angle de chute, m un coefficient à déterminer pour chaque trajectoire.

L'auteur signale et démontre les avantages marqués de cette nouvelle équation qu'il applique à divers exemples.

Paschkiewitsch (*W.*). — Note sur un système de bouches à feu de gros calibre. (446-452, 1 fig.).

Résumé de diverses propositions fondées sur des considérations théoriques et accompagnées d'assez longs calculs, que l'auteur a désiré recommander à l'attention des praticiens.

Gautier (*A.*). — Sur des appareils et des procédés propres à régler le tir des bouches à feu dans les batteries de côte. (481-502, 7 fig.).

La nécessité, bien reconnue, de doter les batteries d'appareils de détermination des distances, a suggéré l'invention de télémètres généralement simples et ingénieux, qui répondent avec assez de précision aux nouvelles exigences du tir de l'artillerie. Dans le télémètre proposé dans ce travail, l'auteur prend pour *base* des mesures des angles sous-tendus la hauteur verticale de la batterie au-dessus du niveau de la mer. Il suppose que cette hauteur est voisine de 100 mètres.

L'auteur étudie et propose ensuite un autre dispositif de télémètre pour régler le tir des projectiles de rupture dans les batteries rasantes.

Jouart (*A.*). — L'artillerie dans l'attaque et la défense des côtes. (416-445, 1 pl.; 511-530, 1 pl.).

Ces deux articles sont consacrés à l'analyse des idées exposées par M. de Luca dans une Étude, insérée dans la *Rivista maritima*, sur l'action de l'artillerie moderne dans les batailles navales et dans la guerre des côtes.

Le second article renferme plus de développements théoriques que le premier. On peut y remarquer l'étude des erreurs sur la mesure de la distance, des erreurs de pointage, et de la probabilité de toucher un vaisseau en marche par le tir en bombes.

Tome IX (octobre 1876-mars 1877).

De Sparre (*M.*). — Note sur quelques questions relatives au tir en brèche. (118-127, 1 fig.).

Ce travail intéressant, divisé en deux Parties, peut se résumer dans les conclu-

sions suivantes : Si, pour faire brèche par le tir normal, on est obligé de se placer à une distance X, on devra, si l'on choisit pour plan de tir un plan faisant un angle φ avec le plan du tir normal à l'escarpe, se placer, pour faire brèche dans les mêmes conditions, à une distance plus grande $\dfrac{X}{\cos\varphi}$.

Il y a intérêt à donner au projectile la longueur la plus grande que l'on pourra.

L'auteur examine les conditions du tir, à faible charge et à petite distance, dans l'hypothèse où la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse.

L'équation de la trajectoire est

$$y = x \operatorname{tang}\omega - \frac{g}{2u_1^2\alpha c}\left(x + \frac{1}{2\alpha c}e^{-2c\alpha x} - \frac{1}{2\alpha c}\right),$$

dans laquelle $\operatorname{tang}\omega$ est l'inclinaison de la tangente, $\frac{1}{c}$ le coefficient balistique, $\alpha = \frac{s}{x}$, u_1 la vitesse horizontale au point de chute.

D'autres éléments de la trajectoire se déduisent des fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ étudiées par les généraux Didion et Mayevski, et définies par les équations

$$F(z) = \frac{e^z - z - 1}{\frac{z^2}{2}}, \quad F_1(z) = \frac{e^z - 1}{ze^z}.$$

Vallier (E.). — Étude de la probabilité du tir. (201-224, 3 fig.).

Dans la première Partie de cette Étude, l'auteur rappelle les principes du Calcul des probabilités et expose, d'après les travaux de Laplace et de Poisson, les résultats connus aujourd'hui sur la loi de répartition des points de chute des projectiles. Il prouve que les courbes d'égale probabilité sont des ellipses homothétiques.

Dans la seconde Partie, il essaye de montrer comment, à l'aide d'un artifice de calcul, on peut simplifier la solution des problèmes qui se présentent, et généraliser les résultats obtenus précédemment dans le cas de l'égalité entre les deux déviations parallèles aux axes d'un rectangle.

Astier (C.). — Sur le mouvement des corps pesants dans les milieux résistants. (313-323, 1 fig.).

On admettait, autrefois, que l'angle de portée maximum, dans l'air, était inférieur à 45 degrés, à cause de la résistance de ce fluide, mais sans arriver à justifier complétement ce fait d'expérience. Récemment, on a constaté que, pour certains projectiles, cet angle était supérieur à 45 degrés.

Si l'on pose

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = p,$$

la trajectoire balistique a pour équations

$$du = -\frac{u^2}{g}\frac{f(v)}{v}dp, \quad dp = \frac{g}{u^2}dx,$$

$f(v)$ étant l'*accélération* de la résistance.

Ces équations montrent, la première, que la composante u va constamment en diminuant, et que, sur une horizontale rencontrant la trajectoire en deux points, l'inclinaison de la courbe est plus grande pour la branche descendante.

L'auteur démontre ensuite, avec facilité, les propositions suivantes :

Quand la résistance du milieu croît proportionnellement à la vitesse, l'angle de portée maximum est l'angle λ pour lequel l'angle de projection et l'angle de chute sont complémentaires.

Suivant que la résistance croît plus vite ou moins vite que la vitesse, l'angle de portée maximum est supérieur ou inférieur à λ.

Soit $f(v) = av^n$ l'accélération de la résistance. L'angle de portée maximum est toujours inférieur à 45 degrés quand n est égal à 3 ou plus petit que 3. Si n est supérieur à 3, l'angle de portée maximum peut être supérieur à 45 degrés pour les petites valeurs de a.

Pour les projectiles oblongs se mouvant dans l'air, la résistance croît toujours plus vite que le carré de la vitesse; l'angle de portée maximum est donc toujours supérieur à λ.

L'exposant n se rapproche, en général, de 3; cependant, pour certaines vitesses comprises entre 280^m et 360^m par seconde, n atteint la valeur 6. On conçoit donc que, dans certaines conditions de vitesse initiale et pour des valeurs très-petites du coefficient a (c'est le cas des gros projectiles), l'angle de plus grande portée puisse être supérieur à 45 degrés, même en supposant la densité de l'air constante dans toutes les couches traversées par le projectile.

Jouart (*A.*). — Emploi des Tables de tir pour le tir indirect. (550-574, 2 pl.).

D'après un travail de M. Wuich.

La méthode développée dans ce travail est purement graphique et connue sous le nom général de *Méthode des courbes de niveau*.

Tome X (avril-septembre 1877.).

Bréger (*P.*). — Quelques réflexions sur les ellipses d'égale probabilité. (82-86).

Revendication de priorité, à propos des résultats obtenus dans la recherche de la probabilité d'atteindre des ellipses d'égale probabilité. L'auteur discute ensuite, de très-près, les conditions dans lesquelles les mathématiciens ont établi les probabilités du tir, et il conclut en ces termes : « Il est impossible d'établir aujourd'hui la loi de dispersion des projectiles autour du point d'impact moyen, sans faire au moins trois hypothèses, et l'une des moindres conséquences de cet état de choses est que la forme des courbes d'égale probabilité nous est complétement inconnue. Est-ce à dire qu'il faille renoncer à l'emploi du Calcul des probabilités dans le tir des bouches à feu? Nullement, ..., mais il vaut mieux nous rendre compte de notre ignorance que de nous endormir dans une trompeuse sécurité sur une partie de la Science encore pleine d'obscurités et peut-être d'erreurs. »

Francard (*R.*). — Note sur un appareil destiné au réglage du tir. (87-92, 2 fig.).

Cet appareil est circulaire et n'occupe pas plus de volume qu'une montre. Il se compose d'un limbe en buis qui peut tourner dans une boîte cylindrique en

buis. Le limbe et sa boîte ont une même graduation, analogue à celle d'une règle à calcul.

Duguet (*C.*). — Résistance au déculassement des canons se chargeant par la culasse. (209-238, 1 pl.).

L'auteur étudie les conditions du déculassement par arrachement de filets, par dérivage et par rupture transversale.

Démonstration et discussion des formules du général russe Gadolin, fondées sur la théorie mathématique de l'élasticité de Lamé.

Examen de l'influence des secteurs vides de l'écrou et de la distance de l'obturateur au premier filet de l'écrou. Avantages des grosses vis et des bagues.

Lefèvre (*J.-B.-V.*). — Note sur l'erreur de pointage due au déversement des plates-formes de siége et de place, et sur la correction de cette erreur. (329-345, 10 fig.).

Lorsqu'une plate-forme est déversée, le tir éprouve des écarts très-sensibles, sinon en portée, du moins en direction. Comme il est difficile de reconstruire une plate-forme ainsi déversée, il y a utilité à recourir à des corrections fort simples à la hausse et à la dérive. En désignant par h la hausse, par φ l'angle vertical de tir correspondant, par ω le déversement de la plate-forme, la correction de la dérive a pour expression

$$d = \frac{h \sin\omega}{\cos\varphi},$$

en admettant une ligne de mire horizontale. Cette expression se modifie peu lorsque cette ligne de mire est légèrement inclinée.

Tome XI (octobre 1877-mars 1878.).

Lefèvre (*J.-B.-V.*). — Note sur le pointage indirect, quand les graduations de la hausse et de la dérive sont insuffisantes. (21-31, 5 fig.).

Énoncé et établissement d'une règle pratique permettant de résoudre cette question.

Dombre (*P.*). — Le télémètre Berdan. (32-39, 1 pl.).

Principe et description de ce télémètre, qui consiste essentiellement en un instrument de mesure de l'angle sous lequel on voit un côté d'un triangle rectangle pris pour base.

Cet instrument se transporte sur une voiture à deux roues, et consiste en deux lunettes astronomiques de 5 pieds ($1^m,52$) munies d'objectifs de 4 pouces ($0^m,10$) de diamètre; une des lunettes est fixe et à angle droit sur une base de 2 mètres : l'autre lunette est mobile à l'aide d'une vis micrométrique. Le prix de revient de ce télémètre est fort élevé : il n'atteint pas moins de 25 000 fr.

Priou (*J.*). — Tables de tir de l'artillerie italienne (64-88, 9 fig., 162-181, 3 fig.).

Traduction de l'instruction qui se trouve en tête des Tables de tir de l'artillerie italienne.

Page. — De la résistance de l'air. (254-258, 345-350, 2 fig.).

Programme d'expériences à exécuter en vue de vérifier les diverses hypothèses admises pour la résistance de l'air proportionnelle au carré ou au cube de la vitesse.

Jouart (*A.*). — Balistique graphique. (436-456, 2 pl.).

D'après l'Ouvrage de M. Aloïs Indra, intitulé : *Graphische Ballistik.*

On a basé jusqu'ici les méthodes de représentation de la trajectoire sur l'hypothèse d'une loi déterminée exprimant la force retardatrice de l'air en fonction de la vitesse du projectile; mais on n'a point encore réussi à découvrir cette loi générale.

La méthode graphique présente l'avantage de permettre de représenter le mouvement des projectiles dans l'air, au moyen de simples éléments de construction déterminés par des considérations géométriques indépendantes de la loi de la résistance de l'air.

Voici les principales subdivisions du Mémoire : mouvement dans le vide; représentation géométrique de la résistance, en général; résistance de l'air au mouvement du projectile; *parabole elliptique* de M. Indra; équation de la courbe balistique

$$y = x \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi}\,\frac{A}{A - x(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha)};$$

φ, angle au départ; α, angle de la ligne de résistance avec Ox; — A, ordonnée à l'origine d'une ponctuelle.

Détermination des paramètres de résistance et de l'angle de tir φ.

Page. — De la résistance de l'air. (457-462, 2 fig.).

Les articles précédents ont fait reconnaître, par l'emploi de la vitesse finale w, que la formule du carré est loin de représenter la loi de la résistance de l'air, et que la formule du cube ne s'en écarte pas moins.

L'auteur essaye d'obtenir une formule plus exacte, et arrive à proposer la suivante :

$$\frac{R}{P} = \frac{a^{\frac{v}{w}} - 1}{a - 1},$$

dans laquelle R désigne la résistance, P le poids du projectile, a une base qui reste à déterminer.

Deville (*R.*). — Étude sur la pratique du tir en brèche à grande distance. (516-532, 5 fig.).

Ce premier Mémoire renferme l'examen des questions suivantes :

Calculer l'angle de chute nécessaire pour arriver au point le plus bas de la brèche; déterminer les distances extrêmes entre lesquelles il faut établir la batterie de

brèche, de telle façon que la vitesse restante des projectiles et la justesse du tir soient suffisantes pour le but qu'on se propose (limites du terrain dangereux).

Fixer, entre ces limites, la position qui assure un maximum d'effet utile.

Page. — De la résistance de l'air. (561-567, 1 fig.).

Indication d'expériences à faire pour contrôler l'exactitude de la formule empirique représentant la loi de la résistance de l'air.

Welsch. — Correction de l'erreur de pointage due au déversement des plates-formes. (568-569, 1 fig.).

Note sur l'établissement de formules discutées plus en détail dans un article précédent.

H. B.

BULLETIN de la Société Mathématique de France (¹).

Tome V; 1876-1877.

Halphen. — Sur les correspondances entre les points de deux courbes. (1-18).

Dans une Note antérieure *Sur la conservation du genre*, l'auteur a montré que, si deux courbes se correspondent point par point, elles sont du même genre. M. Zeuthen était antérieurement parvenu à une relation plus générale qui a lieu entre deux courbes lorsque ces courbes ont entre elles une correspondance quelconque. M. Zeuthen n'avait traité que le cas où les courbes qu'il considère n'ont que des singularités ordinaires. Dans ce Mémoire, M. Halphen démontre la même relation en supposant que les courbes correspondantes possèdent des singularités élevées.

Brocard (H.). — Sur l'enveloppe de la droite de Simpson. (18-19).

Fouret (G.). — Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique. (19-24).

L'auteur étend à l'étude de cette question, où il considère des systèmes de courbes algébriques ou transcendantes, les procédés de démonstration employés par M. Brill pour l'étude d'une question plus simple relative aux systèmes algébriques, celle où l'angle donné, dont il est question dans l'énoncé, est nul.

Laguerre. — Sur les lignes de courbure des surfaces de second ordre. (24-25).

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 277.

Laguerre. — Sur le lieu des points tels que les tangentes, menées de ces points à deux courbes planes, soient égales entre elles. (25-26).

Laguerre. — Sur un problème d'Algèbre. (26-30).

L'auteur se propose de déterminer un polynôme $f(x)$ de degré n, connaissant les sommes des puissances impaires des racines depuis l'ordre 1 jusqu'à l'ordre $2n-1$. Les résultats obtenus peuvent se résumer ainsi. Les coefficients d'un polynôme de degré n peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des sommes $S_1, S_3, \ldots, S_{2n-1}$, S_μ désignant la somme des puissances $\mu^{\text{ièmes}}$ des racines.

Laguerre. — Recherches sur les normales qu'on peut mener d'un point donné à une conique. (30-43).

Après avoir énoncé plusieurs théorèmes élégants, l'auteur se propose et résout la question suivante : « Déterminer les coniques qui coupent orthogonalement quatre droites données passant par un point M ». Trois Notes terminent le Mémoire. La première traite de la détermination d'une conique quand on connaît les deux axes et deux normales. La troisième est relative à un invariant de deux formes cubiques qui se présente dans la théorie des normales à une conique.

Brocard (H.). — Note sur la division mécanique de l'angle. (43-47).

L'auteur présente quelques observations sur ce sujet et signale un Mémoire de M. Glotin qui a paru dans le t. II (année 1862), des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.*

Perrin. — Note sur une formule de sommation applicable à une classe de séries. (47-69).

Polignac (de). — Sur les substitutions linéaires. (69-70).

Laguerre. — Sur la partition des nombres. (76-78).

L'auteur détermine, non pas le nombre T(N) des solutions en nombres entiers et positifs de l'équation

$$N = ax + by + \ldots + lu,$$

mais une valeur approchée de cette fonction T(N), l'erreur commise ayant une limite fixe indépendante de N. Par exemple, pour l'équation à deux variables, l'expression approchée de T(N), $\frac{N}{ab}$ coïncide avec celle qui a été donnée par Paoli.

Laguerre. — Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen de fractions rationnelles. (78-92).

La méthode développée par l'auteur s'applique aux fonctions de la forme e^w où w est une fonction rationnelle de x ou l'intégrale d'une fonction rationnelle.

M. Laguerre considère successivement le développement de $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, de $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m$, de $e^{F(x)}$, où $F(x)$ est un polynôme entier.

Laguerre. — Sur quelques théorèmes de Joachimsthal. (92-95).

Laguerre. — Sur le développement en fraction continue de $e^{\operatorname{arc tang} \frac{1}{x}}$. (95-99).

Darboux (*G.*). — Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution. (100-113).

Dans un article inséré aux *Comptes rendus*, t. LXXVII, p. 849, M. Bertrand s'est proposé de rechercher, parmi toutes les lois d'attraction émanant d'un centre fixe, celles pour lesquelles la trajectoire d'un point libre sera toujours fermée. L'auteur étend la même recherche au mouvement d'un point sur une surface de révolution en supposant qu'il y a une fonction des forces qui conserve la même valeur en tous les points d'un parallèle de la surface. Il y a ici deux fonctions inconnues, celle dont dépend la forme de la surface et la fonction des forces. L'auteur montre qu'elles sont toutes les deux déterminées par la condition que la trajectoire du point sur la surface soit toujours fermée. Citons le théorème suivant, qui termine le travail :

« Les seules surfaces de révolution ayant leurs lignes géodésiques fermées et admettant un de leurs parallèles pour plan de symétrie sont la sphère et certaines surfaces applicables sur la sphère. »

Lindemann. — Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires. (113-126).

Cette représentation s'obtient en représentant les zéros de la forme binaire par les points d'une conique.

Haton de la Goupillière. — Note sur la théorie des développoïdes. (126-128).

Démonstration très-simple d'un théorème relatif aux développoïdes successives d'une courbe.

Fouret (*G.*). — Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'un plan en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes donnés. (130-134).

Halphen. — Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes. (134-136).

Lucas (*Éd.*). — Formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique. (136-143).

Flye Sainte-Marie. — Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier. (143-150).

André (*D.*). — Sur un problème d'analyse combinatoire. (156-158).

Halphen. — Sur une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers. (158-160).

Les sommes des diviseurs des nombres naturels peuvent se calculer de proche en proche au moyen d'une formule récurrente due à Euler. L'illustre géomètre attachait le plus grand prix à la découverte de cette formule, et il a publié trois Notes à ce sujet : 1° *Découverte d'une loi extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs;* 2° *Observatio de summis divisorum;* 3° *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum.* L'auteur fait connaître une seconde formule semblable à celle d'Euler.

Halphen. — Sur une proposition d'Algèbre. (160-163).

L'auteur démontre, d'une manière nouvelle, le théorème suivant donné par M. Noether :

« f, φ, ψ désignant trois polynômes entiers à deux variables x, y, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait

$$f = A\varphi + B\psi,$$

A et B étant deux polynômes entiers, sont les suivantes :

» Il faut que, pour tout système (α, β) de solutions des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, on puisse déterminer deux développements a et b procédant suivant les puissances entières, positives et ascendantes, de $x - \alpha$, $y - \beta$, et qui soient tels que l'on ait

$$f = a\varphi + b\psi. \text{ »}$$

Mannheim. — Sur les surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre. (163-166).

Démonstration géométrique d'un théorème de M. Halphen.

Haag. — Théorème sur les surfaces. (166-170).

Halphen. — Sur des suites des fractions, analogues à la suite de Farey. (170-175).

Jordan (*C.*). — Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires. (175-177).

Lucas (*Éd.*). — Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens. (177-190).

Ce travail étendu comprend nombre de formules dont l'auteur se réserve de montrer l'utilité dans les recherches relatives aux nombres premiers.

Mannheim (*A.*). — Sur le paraboloïde des normales d'une surface réglée. (190-193).

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS ([1]).

Tome XIV; 1877.

Ferrers (*N.-M.*). — Sur le potentiel d'un ellipsoïde, d'une courbe ellipsoïdale, d'une plaque elliptique et d'un anneau elliptique de densités variables. (1-23).

La méthode appliquée dans ce travail repose sur le théorème suivant : « Si V est le potentiel relatif à un point $x'y'z'$ d'un solide dont la densité est, en chaque point, une fonction ρ finie et continue des coordonnées x, y, z de ce point, fonction qui s'annule à la surface du solide, le potentiel relatif au même point du même solide, la densité devenant non plus ρ, mais $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, sera $\frac{\partial V}{\partial x'}$. L'auteur applique ce théorème en supposant qu'en chaque point d'un solide limité par un ellipsoïde la densité soit une puissance du premier membre de l'équation de l'ellipsoïde, et il obtient ainsi les potentiels pour des lois de densité très-variées.

Cayley. — Sur l'équation générale aux différences du second ordre. (23-25).

Taylor (*C.*). — La transformation homographique des angles. (25-39).

L'auteur a retrouvé un Ouvrage à peu près oublié, publié, en 1794, par G. Walker, membre de la Société Royale, et traitant des sections coniques. Dans cet Ouvrage se trouve étudiée une méthode de transformation qui, en fait, est un cas particulier de la transformation homographique. M. Taylor montre le parti qu'on peut en tirer dans l'étude des coniques et dans la transformation des relations d'angles.

Lamb (*H.*). — Sur différentes solutions de problèmes d'Hydrodynamique. (40-43).

Genese (*R.-W.*). — Sur la conique $\beta\gamma = k\delta\alpha$ et une certaine enveloppe. (44-45).

Cayley. — Sur les surfaces du quatrième ordre obtenues en égalant à zéro un déterminant symétrique du même ordre. (46-52).

M. Cayley a signalé et étudié depuis longtemps le cas où les éléments du déter-

---

([1]) Voir *Bulletin*, I_2, 233.

minant sont du premier degré. La surface correspondante a alors dix points doubles. Il examine, dans ce travail, un cas nouveau, celui où les degrés des éléments sont 0, 1, 1, 0 respectivement pour la première et la dernière ligne, et 1, 2, 2, 1 pour la deuxième et la troisième. La surface correspondante a, en général, huit points doubles; mais M. Cayley étudie un cas particulier dans lequel elle a aussi une droite double.

Cayley. — Théorème d'Algèbre. (53).

Jeffery (*H.-M.*). — De la perspective d'une courbe plane sur la sphère. (53-63).

Cockle (*J.*). — Quatrième Chapitre sur les corésolvants. (63-79).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur le Mémoire de Sylvester, intitulé : « Développement d'une idée d'Eisenstein ». (79-84).

Dans le Mémoire cité, M. Sylvester a montré, d'une manière élémentaire, comment le développement d'une puissance négative d'une série dépend de celui des puissances positives de la même série, et M. Cayley a obtenu un résultat analogue en partant de la formule de Lagrange. M. Glaisher compare, en détail, les deux formules différentes par la forme de MM. Sylvester et Cayley. Le travail se termine par une Note de M. Cayley.

Townsend (*R.*). — Sur plusieurs solutions particulières du mouvement d'un point libre déduites de la considération d'une courbe brachistochrone et réciproquement. (85-96).

L'auteur remarque que, dans le cas du mouvement d'un point libre, la force agissante se trouve dans le plan osculateur, sa composante normale étant dirigée vers le centre de courbure et égale à $\frac{mv^2}{\rho}$, tandis que, si un point est assujetti à demeurer sur une courbe, dans le cas où cette courbe est brachistochrone, et en supposant qu'il y ait une fonction des forces, la force sera encore dans le plan osculateur de la trajectoire, sa composante normale sera égale à $\frac{mv^2}{\rho}$, mais elle sera dirigée *suivant le prolongement* du rayon de courbure.

Il suit de là que, si une courbe est la trajectoire d'un point libre, la vitesse étant une fonction déterminée de sa position, elle sera, pour la même loi de la vitesse, une courbe brachistochrone, la force qui agit en chaque point étant la symétrique par rapport à la tangente de la force qui agit dans le premier cas.

Ainsi, une ellipse est la trajectoire d'un point libre soumis à l'action d'une force attractive émanant de l'un de ses foyers et agissant en raison inverse du carré de la distance; la vitesse devenant nulle analytiquement quand la distance à ce foyer est égale au grand axe, elle sera, en vertu du théorème, une courbe brachistochrone avec la même loi de la vitesse pour une force répulsive émanant de l'autre foyer, et en raison inverse du carré de la distance du point au cercle directeur correspondant à ce second foyer. Une parabole est la trajectoire d'un point libre soumis à l'action d'une force constante perpendiculaire à la directrice, la vitesse devenant nulle (analytiquement) quand le point matériel est sur la directrice. Elle

sera, par conséquent, brachistochrone pour une force constante répulsive émanant de son foyer, avec la même loi pour la vitesse que dans le cas précédent. M. Townsend multiplie les applications du théorème général.

Webb (*R.-R.*). — Le potentiel d'un disque elliptique, l'attraction étant en raison inverse du cube de la distance. (98-103).

Cayley. — Sur une surface du quatrième ordre à douze points singuliers. (103-106).

Childe (*G.-F.*). — Surface des rayons réfractés (106-123).

Frost (*A.-H.*). — Sur la marche du cavalier (au jeu des échecs). (123-125).

Townsend (*R.*). — Construction de l'axe du déplacement d'un corps solide dans l'espace. (126-127).

Jeffery (*M.*). — Sur les courbes de troisième classe ayant un foyer triple. (127-147).

Cockle (sir *J.*). — Sur les caractères distinctifs des intégrales singulières. (147-167).

Discussion des Règles de Lagrange, de de Morgan, d'Euler, de Poisson, de Boole, de Cauchy, de Taylor.

Greenhill (*A.-G.*). — Précession et nutation. (167-179).

Exposition de cette théorie d'après la méthode de Poinsot développée dans la *Connaissance des Temps de* 1858.

Frost (*P.*). — Approximation dans la théorie lunaire. (179-181).

Greenhill (*A.-G.*). — Solutions des équations du mouvement d'un corps solide mobile autour d'un point fixe et n'étant soumis à l'action d'aucune force. (182-183).

Day (*R.-H.-G.*). — Sur certaines formules algébriques. (184-185).

Cayley. — Sur une surface spéciale à aire minimum. (190-196).

M. Schwarz a fait connaître la surface représentée par l'équation

$$1 + \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0,$$

où λ, μ, ν sont des fonctions de x, y, z respectivement définies en x par l'équation

$$x = -\int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3}{4}\theta^4 + \frac{5}{2}\theta^2 + \frac{3}{4}}},$$

et y, z étant les mêmes fonctions de μ et de ν. En cherchant à vérifier ce résultat, et en mettant à la place des coefficients de θ^4, θ^2, sous le radical précédent, des constantes, M. Cayley obtient une nouvelle surface de même nature que celle de M. Schwarz.

Niven (*C.*). — Sur la théorie de l'élasticité. (196-208).

Childe (*G.-F.*). — Sur les surfaces de rayons réfractés. (209-217)

Horner (*J.*). — Sur la réduction donnée par Jacobi de la variation seconde d'une intégrale. (217-226).

Cunningham (*A.*). — Interprétation géométrique des équations différentielles en général. (226-229).

Cayley. — Sur un torse sextique. (229-235).

Cette surface développable admet, pour courbe de rebroussement, la biquadratique intersection des surfaces

$$x^2+y^2=1,\quad z=x^2-y^2.$$

Cayley. — Sur un torse dépendant des fonctions elliptiques. (235-241).

Walker (*J.-J.*). — Sur l'équation de la cubique plane à un point double. (242-245).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Théorème relatif à la différentiation d'un déterminant symétrique. (245-248).

Cayley. — Sur certaines surfaces du huitième ordre. (249-265).

Greenhill (*A.-G.*). — Solution des équations d'Euler relatives au mouvement d'un corps solide par le moyen des fonctions elliptiques. (265-271).

Hicks (*W.-M.*). — Investigation par la méthode des quaternions de la théorie de l'élasticité et du mouvement des fluides. (271-292).

Cayley. — Mémoire sur les équations différentielles et aux dérivées partielles. (Voir *Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, t. XIV, 292-339).

Dans ce travail d'environ 50 pages, M. Cayley traite des systèmes d'équations simultanées du premier ordre et de l'intégration des équations aux dérivées partielles. Il est clair que bien des points de cette vaste théorie ont dû être laissés de côté dans un Mémoire d'une si petite étendue; mais nous devons le considérer au moins

comme un cadre qui indique la manière dont M. Cayley entend toute cette théorie, et, à ce titre, le Mémoire ne peut manquer d'exciter notre intérêt.

Après quelques définitions préliminaires, l'auteur commence par considérer les systèmes d'équations simultanées, tel que le suivant :

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\frac{dw}{W}. \tag{1}$$

Il établit la liaison qu'ils présentent avec l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{\partial\theta}{\partial x}+Y\frac{\partial\theta}{\partial y}+Z\frac{\partial\theta}{\partial z}+W\frac{\partial\theta}{\partial w}=0,$$

indique quelle est la nature et le nombre des intégrales, et expose rapidement la théorie du dernier multiplicateur.

Après avoir traité rapidement ce premier sujet, M. Cayley rappelle, sans le démontrer, le théorème de Pfaff sur la forme la plus simple à laquelle on puisse ramener une différentielle linéaire, et il aborde l'étude du système *hamiltonien*.

$$\frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial H}{\partial q}}=\frac{dz}{\frac{\partial H}{\partial r}}=\frac{dp}{-\frac{\partial H}{\partial x}}=\frac{dq}{-\frac{\partial H}{\partial y}}=\frac{dr}{-\frac{\partial H}{\partial z}}, \tag{2}$$

considéré comme un cas particulier du système (1).

La théorie de ce système commence par la vérification de l'identité fondamentale de Jacobi

$$[H,(a,b)]+[a,(b,H)]+[b,(H,a)]=0,$$

et, de cette identité, M. Cayley déduit immédiatement le théorème de Poisson : « Si a et b sont deux intégrales de l'équation $(\theta, H)=0$, il en sera de même de (a, b) ». Il examine ensuite si le théorème de Poisson peut s'étendre à des systèmes de la forme (1), mais plus généraux que les systèmes hamiltoniens, et il obtient ce théorème remarquable : « Parmi les systèmes de la forme (1), le système hamiltonien est le seul pour lequel le théorème de Poisson soit applicable ».

M. Cayley aborde ensuite la théorie des intégrales conjuguées donnant lieu, prises deux à deux, à des crochets égaux à zéro, et il démontre l'existence d'une infinité de pareils systèmes, et il termine par la définition et les propriétés de la fonction hamiltonienne V.

Après cette étude des systèmes hamiltoniens, M. Cayley étudie les équations aux dérivées partielles, et montre comment les propriétés établies des systèmes hamiltoniens conduisent aux intégrales complètes de ces équations.

Le Mémoire se termine par l'application des théories générales à des exemples particuliers.

Cockle (sir *J.*). — Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre. (340-353).

Suite d'un article précédent.

Frost (*A.-H.*). — Méthode simple pour tracer la marche du cavalier sur des carrés de 5, 6, 7, 8, et son extension aux carrés supérieurs. (354-359).

Jeffery (*M.*). — Sur les cubiques planes qui ont un double et un simple foyer. (359-376).

Tome XV; 1878.

Sharpe (*H.-J.*). — Sur la réflexion du son à la surface d'un paraboloïde de révolution. (1-8).

Solution de cette question par l'emploi des coordonnées paraboliques.

Cayley (*A.*). — Sur le jeu de la souricière. (8-10).

Greenhill (*A.-G.*). — Sur le mouvement tourbillonnaire plan. (10-29).

Walker (*J.-J.*). — Équation des axes d'une conique. (30-32).

Cayley (*A.*). — Note sur la théorie de la correspondance entre les points de deux courbes. (32-33).

Cayley (*A.*). — Sur la construction des ovales de Descartes. (34).

Frost (*A.*). — Sur les propriétés générales de carrés analogues aux carrés magiques. (34-49).

Roberts (*S.*). — Note géométrique relative aux triangles inscrits dans un cercle et circonscrits à une parabole. (52-55).

Démonstration géométrique des résultats donnés par M. Cayley dans un article inséré aux *Proc. Lond. Math. Soc.* (T. VII, p. 160).

Cayley (*A.*). — Sur les plans flecflecnodaux des surfaces. (49-51).

L'auteur désigne sous le nom de *flecnodaux* les plans tangents pour lesquels une des tangentes asymptotiques coupe la surface en quatre points confondus, et sous le nom de *flecflecnodaux* les points pour lesquels les deux tangentes asymptotiques jouissent de la même propriété.

Cayley (*A.*). — Un théorème sur les déterminants. (55-57).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Démonstration de la formule de Stirling. $1.2.3\ldots n = \sqrt{2n\pi}.n^n e^{-n}$. (57-64).

Cockle (sir *J.*). — Sur la solution des équations algébriques par radicaux. (64-82).

Ferrers (*N.-M.*). — Solution de certaines questions de la théorie du potentiel et du mouvement des liquides. (83-92).

Frost (*A.-H.*). — Sur les propriétés générales des cubes analogues aux carrés magiques. (93-123).

Cayley (*A.*). — Sur un système de surfaces quadriques. (124-125).

Ce système est formé des surfaces pour lesquelles deux droites données ont des polaires données; l'auteur montre géométriquement qu'elles contiennent un quadrilatère gauche dont il donne la construction.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une équation numérique approchée contenant les nombres e et π. (125-127).

Cette équation est la suivante :

$$e^{-\frac{\pi}{n}} + e^{-4\frac{\pi}{n}} + e^{-9\frac{\pi}{n}} + \ldots + e^{-(n-1)^2\frac{\pi}{n}}$$

est à peu près entier si n est un carré impair; la différence entre l'expression et sa partie entière étant d'autant plus faible que n est plus grand.

Cayley (*A.*). — Sur les solides réguliers. (127-131).

Jeffery (*H.-M.*). — Sur les courbes sphériques de troisième classe avec foyers doubles et arcs cycliques doubles. (131-140).

Cayley (*A.*). — Calcul du hessien d'une surface du quatrième ordre. (141-144).

Greenhill (*A.-G.*). — Note sur l'Hydrodynamique, sur le mouvement de l'eau dans un prisme rectangulaire tournant. (144-151).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Applications d'un théorème de Trigonométrie. (151-157).

Si l'on a

$$\left(1+\frac{ix}{a}\right)\left(1+\frac{ix}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{ix}{c}\right) = \mathrm{A}+\mathrm{B}i,$$

on aura

$$\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + \text{arc tang}\,\frac{x}{b} + \ldots + = \text{arc tang}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

Cayley (*A.*). — Sur les formes dérivées de trois formes binaires. (157-168).

Cayley (*A.*). — Formules relatives à la ligne droite dans l'espace. (168-171).

Cayley (*A.*). — Sur la fonction arc sin$(x+iy)$. (171-174).

Cayley (*A.*). — Sur une relation entre certains produits de différences. (174-175).

Greenhill (*A.-G.*). — Sur le mouvement d'une toupie et les problèmes de Dynamique qui s'y rattachent. (176-195).

Cayley (*A.*). — Sur le problème goniométrique de M. Cotterill. (196-198).

Jeffery (*H.-M.*). — Sur une courbe cubique rapportée à un quadrilatère formé de points correspondants. (198-223).

Roberts (*S.*). — Sur les courbes du sixième ordre représentées par l'équation

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{C}{z}\right)^{\frac{2}{3}} = 0,$$

et les courbes corrélatives du quatrième ordre. (224-230).

Steen (*A.*). — Différentes formules se rapportant au jeu de la souricière. (230-242).

Niven (*C.*). — Sur les recherches de M. Mannheim relatives à la surface des ondes. (242-257).

Niven (*C.*). — Sur plusieurs propriétés de la surface de l'onde. (257-266).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Théorèmes concernant certains opérateurs symboliques exponentiels. (266-272).

Faà de Bruno. — Sur la partition des nombres. (272-274).

Hicks (*W.-M.*). — Sur le potentiel électrique et le potentiel des vitesses dans un fluide limité par deux plans parallèles. (274-315).

Cayley (*A.*). — Sur une équation fonctionnelle. (315-325).

Cette équation est la suivante : si l'on a $x_1 = \frac{ax+b}{cx+d}$, la fonction $\varphi(x)$ doit satisfaire à l'équation

$$\varphi(x) - \varphi(x_1) = (x - x_1)\frac{Ax+B}{Cx+D};$$

ce problème se présente dans une question d'Hydrodynamique.

Steadman-Aldis (*W.*). — Sur une modification du principe d'Huyghens. (326-335).

Walton (*W.*). — Deux démonstrations d'un théorème d'Olinde Rodrigues. (335-337).

Cayley (*A.*). — Note sur la fonction $\frac{a^2(c-x)}{c^2-b^2-cx}$. (338-340).

Cayley (*A.*). — Considérations géométriques sur une éclipse solaire. (340-347).

L'auteur étudie cette question et classe les éclipses solaires par la considération du cône de pénombre et de la courbe suivant laquelle il rencontre la Terre aux différents moments de l'éclipse. Il distingue ainsi sept cas, dont trois sont si spéciaux, qu'on peut les écarter entièrement; deux autres se présentent très-rarement.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les facteurs d'une forme spéciale de déterminants. (347-356).

Coates (*C.-V.*). — Du mouvement tourbillonnaire à l'intérieur et autour d'un cylindre elliptique. (356-365).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur le théorème de Cauchy relatif aux facteurs de $(x+y)^n - x^n - y^n$. (365-366).

PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY (¹).

Tome VIII; 1876-1877.

Smith (*H.-J.-S.*). — Sur l'état présent et futur de plusieurs branches des Mathématiques pures. (6-29).

Spottiswoode (*W.*). — Sur les courbes ayant un contact quadriponctuel avec les courbes d'un système linéaire à trois constantes arbitraires. (29-34).

Elliot (*E.-B.*). — Sur plusieurs classes d'intégrales définies multiples. (35-47).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur certaines relations différentielles identiques. (47-51).

Cayley (*A.*). — Sur la condition analytique pour qu'il existe une

---

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 197.

surface coupant à angle droit une congruence de lignes droites. (53-57).

Quand la congruence est définie de la manière suivante pour chaque point de l'espace, les cosinus directeurs de la droite qui y passe, α, β, γ, sont des fonctions connues des coordonnées x, y, z de ce point. Sir W. Hamilton a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une surface normale à toutes les droites est que $\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz$ soit une différentielle exacte. M. Cayley démontre cette règle et la transforme dans le cas où les droites sont définies non plus par les cosinus directeurs, mais par leurs coefficients angulaires.

Frankland (*F.-W.*). — Sur un espace simplement connexe à deux dimensions et d'étendue finie. (57-64).

Niven (*W.-D.*). — Sur la théorie des images électriques et son application au cas de deux conducteurs sphériques chargés d'électricité. (64-83).

Le problème dont s'occupe l'auteur a été déjà l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres. Poisson, sir W. Thomson et M. Clerk Maxwell en ont donné des solutions différentes. La nouvelle méthode proposée par M. Niven repose essentiellement sur l'emploi de la transformation par rayons vecteurs réciproques et la transformation que subit dans ce cas l'équation du potentiel.

Smith (*H.-J.-S.*). — Sur les conditions de perpendicularité dans un système parallélépipédique. (83-103).

La conception d'un système parallélépipédique, c'est-à-dire d'un espace divisé par trois systèmes de plans parallèles en parallélépipèdes semblables et égaux, qui forme la base de la théorie cristallographique actuellement admise, a donné lieu aussi à de très-importantes recherches se rapportant à l'Arithmétique et à la Géométrie. L'auteur donne les conditions de perpendicularité pour les lignes et les plans d'un pareil système.

Butcher (*J.-G.*). — Sur le mouvement d'un fluide visqueux. (103-135).

Wolstenholme (*J.*). — Sur une méthode facile pour obtenir l'équation invariante exprimant une relation poristique entre deux coniques. (136-138).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Valeurs numériques des douze premières puissances de π et de leurs réciproques, ainsi que de quelques autres quantités qui s'y rapportent. (139-145).

L'auteur, en même temps que les puissances de π, fait connaître les sommes des puissances semblables des inverses des nombres entiers.

Elliot (*E.-B.*). — Sur plusieurs classes générales d'intégrales définies multiples. (146-158).

Tanner (*H.-W.-Lloyd*). — De l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Z = 0.$$

(159-174).

L'auteur fait la théorie de cette équation en supposant que P, Q, Z soient des fonctions quelconques de x, y, z.

Butcher (*J.-G.*). — Sur la forme quaternionienne de plusieurs propositions générales relatives au mouvement d'un fluide. (174-183).

Cayley (*A.*). — Sur l'équation différentielle générale

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

où X, Y représentent la même fonction du quatrième degré de x, y respectivement. (184-199).

M. Cayley étudie les différentes formes de l'intégrale lorsqu'on fait subir à la constante arbitraire différentes transformations, et, considérant ensuite cette constante arbitraire comme une nouvelle variable, il examine en même temps les équations

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0$$

et

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} + \frac{dw}{\sqrt{W}} = 0.$$

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur la valeur numérique de certaines séries. (200-204).

Leudersdorf (*C.*). — Sur l'aire du quadrangle formé par les quatre points d'intersection de deux coniques. (205-212).

Cayley. — Illustration géométrique d'un théorème relatif à une fonction irrationnelle d'une variable imaginaire. (212-214).

Muir (*T.*). — Sur une classe d'entiers exprimables par la somme de deux carrés entiers. (215-218).

Cayley. — Sur la relation circulaire de Möbius. (220-226).

Cayley. — Sur la transformation linéaire de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$. (226-229).

Tanner (H.-W.-Lloyd). — Application de la méthode d'intégration des équations qui ont une intégrale première générale aux équations du troisième ordre à deux variables indépendantes. (229–261).

Dans la première Partie du Mémoire, l'auteur indique la forme générale des équations du troisième ordre qui peuvent avoir une intégrale première; il indique ensuite comment on reconnaîtra si elle existe et comment on la trouvera.

Hirst (T.-A.). — Sur la corrélation de deux plans. (262-272).

Lamb (H.). — Sur le mouvement libre d'un solide à l'intérieur d'un liquide indéfini. (273-286).

Hart (H.). — Sur plusieurs cas de mouvement d'une figure plane dans son plan. (286-289).

Clifford. — Sur la forme canonique et la dissection des surfaces de Riemann. (292-304).

L'auteur indique la construction des surfaces de Riemann; il démontre les théorèmes de Lüroth et de Clebsch; il indique comment on peut transformer ces surfaces.

Crofton. — Théorèmes géométriques sur les valeurs moyennes. (304-309).

Cotterill. — Vue nouvelle sur l'hexagramme de Pascal. (311).

Weichold. — Sur le cas irréductible. (312-316).

Drach. — Approximation du nombre π. (316-317).

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE (¹).

Tome VI; 1876. 2ᵉ série.

Gernez (D.). — Recherches sur la cristallisation des solutions sursaturées. (Deuxième Mémoire). (9-48).

Collet (J.). — Conditions d'intégrabilité des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, et contenant un nombre quelconque de variables indépendantes. (49-83).

Si l'on considère deux fonctions φ, ψ de $2n$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, l'auteur appelle *combinaison différentielle* de ces deux fonctions l'expression bien connue

$$(\varphi, \psi) = \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \frac{\partial \psi}{\partial p_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \frac{\partial \psi}{\partial q_h} \right).$$

Si l'on donne une suite de fonctions $f_1, \ldots, f_m$ analogues à φ et à ψ, on pourra les combiner deux à deux, puis opérer de même sur les résultats et continuer indéfiniment. L'auteur démontre que, en général, on sera ainsi conduit à une suite illimitée de fonctions indépendantes, qui pourraient d'ailleurs toutes s'exprimer au moyen des fonctions simples

$$(f_i, f_k, f'_k, f''_k, \ldots),$$

que l'on obtient en combinant f_i, f_k, puis le résultat avec f'_k, et ainsi de suite.

Ditte (A.). — Études relatives à la décomposition des sels métalliques sous l'influence de l'eau. (Première Partie). (83-110).

Bourget (J.). — Rendement des machines thermiques. (111-122).

Bouty (E.). — Études sur le magnétisme. (Deuxième Partie). Étude de l'aimantation de l'acier par les courants. (123-154).

André (D.). — Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications. (155-198).

Deville (H. Sainte-Claire). — La théorie atomique et la loi des proportions multiples. (199-204).

(¹) Voir *Bulletin*, I, 27; II, 11, 263; VI, 196; X, 73.

Gorceix. — Aperçu géologique sur l'île de Cos. (205-216).

Duter (*E.*). — De la distribution du magnétisme libre sur des plaques d'acier elliptiques ou circulaires. (217-244).

Appell (*P.*). — Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide. (245-274).

André (*Ch.*). — Étude de la diffraction dans les instruments d'Optique; son influence sur les observations astronomiques. (275-354).

Baillaud (*B.*). — Exposition de la méthode de M. Gyldén pour le développement des perturbations des comètes. (355-398).

Elliot. — Détermination du nombre des intégrales abéliennes de première espèce. (399-444).

Tournouër. — Étude sur les fossiles tertiaires recueillis par M. Gorceix dans l'île de Cos en 1873. (445-475).

Tome VI; 1877.

Mascart. — Sur la réfraction des gaz. (18-78).

Lemonnier. — Mémoires sur les fonctions elliptiques qui correspondent à la fonction $\cos x + i \sin x$. (Deuxième Mémoire). (79-124).

Joly (*A.*). — Recherches sur les composés du niobium et du tantale. (125-186).

Méray (*Ch.*). — Observations sur deux points du calcul des variations. (187-216).

Mouton. — Étude expérimentale sur les phénomènes d'induction électrodynamique. (217-264).

André (*D.*). — Développements en série des fonctions elliptiques et de leurs puissances. (265-328).

Picard (*E.*). — Applications de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches. (328-366).

Hurion. — Recherches sur la dispersion anomale. (367-412).

SUPPLÉMENT AU T. VI.

Martin (*A.*). — Mémoire sur les méthodes employées pour la détermination des courbures des objectifs, accompagné de Tables propres à en abréger le calcul. (3-62).

Berthelot. — De la chaleur de combinaison rapportée à l'état gazeux. (63-99).

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, herausgegeben von Dr. O. SCHLÖMILCH, Dr. E. KARL und Dr. M. CANTOR [1].

Tome XXIII; 1878.

Kessler (*O.*). — Étude cinématique des caustiques. (1-34).

Si l'on donne une courbe plane (C) et un point lumineux O situé dans son plan, on aperçoit immédiatement que la caustique par réflexion de (C) par rapport à O est la développée de la roulette que décrit un point O′, symétrique du point O par rapport à une tangente à la courbe (C), et invariablement lié à une courbe (C′) symétrique de la courbe (C) par rapport à la même tangente, lorsque cette courbe (C′) roule sans glisser sur la courbe (C). Les propriétés bien connues du mouvement d'une figure plane dans son plan s'appliqueront donc facilement à la recherche des propriétés des caustiques par réflexion. M. Kessler étudie spécialement les caustiques du cercle, de la parabole et de l'ellipse, en supposant le point lumineux sur l'axe focal.

Giesen (*A.*). — Sur deux méthodes simples pour la résolution des équations numériques. (35-46).

L'auteur montre comment on peut calculer successivement les facteurs ou les termes d'un produit infini ou d'une série de la forme

$$a + \frac{b}{B} + \frac{c}{B^2} + \ldots, \quad (a, b, c, \ldots < B),$$

de façon que ce produit ou cette série représente une racine, préalablement séparée, d'une équation numérique donnée.

Chwolson (*O.*). — Problème de la distribution des courants dans une plaque plane. (47-61).

---

[1] Voir *Bulletin*, I_2, 385.

Toeplitz (*J.*). — Sur la théorie de l'élimination. (60-67).

Thomae (*J.*). — Sur une intégrale définie. (67-68).

Schellhammer (*Frz.*). — Sur la représentation équivalente. (69-84).

Faire correspondre les points d'un plan aux points d'un autre plan de façon que les aires de deux courbes fermées correspondantes quelconques soient équivalentes, et qu'à un contour donné du premier plan corresponde un contour donné du second.

Milinowski. — Étude synthétique des courbes planes du quatrième ordre. (85-107, 211-244).

Sur la génération des courbes planes du quatrième ordre par des faisceaux projectifs de coniques, de courbes du troisième ordre et de droites; sur le passage d'un mode de génération à l'autre; sur les faisceaux et les réseaux de courbes du troisième et du quatrième ordre, sur les polaires d'une courbe du quatrième ordre.

Burmester (*L.*). — Théorie cinématico-géométrique du mouvement d'un système qui reste en affinité avec lui-même, semblable ou égal à lui-même. (108-131).

Deux systèmes collinéaires sont en affinité lorsque les éléments à l'infini de l'un correspondent aux éléments à l'infini de l'autre. L'étude du mouvement d'un système qui reste en affinité avec lui-même contient ainsi, comme cas très-particulier, l'étude du déplacement d'un corps solide : elle a déjà été entreprise, au point de vue analytique, par M. Durrande (*Comptes rendus*, t. LXXIV, LXXV, LXXVIII; *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. II). Depuis, MM. Kirchhoff et Helmholtz ont eu l'occasion d'en faire des applications importantes. M. Burmester reprend cette étude au point de vue de la pure Géométrie.

A chaque instant, les extrémités des vitesses et des accélérations des différents points du système forment deux systèmes en affinité avec lui; par suite, les accélérations, par exemple, de quatre points du système non situés dans un même plan déterminent les accélérations de toutes les autres : ces résultats s'étendent aux accélérations d'ordre quelconque. Deux systèmes en affinité ont, en général, trois plans, trois droites, un point à distances finies qui se correspondent à eux-mêmes. Il y aura donc dans le mouvement considéré un point (pôle de vitesse) dont la vitesse est nulle; il y aura de même un pôle d'accélération. Le lieu des points du système ayant à un moment donné mêmes vitesses est un ellipsoïde dont le centre est le pôle de vitesse. Les accélérations donnent lieu à un théorème analogue; l'ellipsoïde des vitesses devient de révolution ou se réduit à un cylindre quand le système reste semblable ou égal à lui-même. Les plans osculateurs des trajectoires des différents points d'une droite sont aussi les plans osculateurs d'une courbe gauche du troisième ordre. Le lieu des points pour lesquels l'accélération normale est nulle est une courbe gauche du sixième ordre passant par les pôles de vitesse et d'accélération; le lieu des points pour lesquels l'accélération tangentielle est nulle est une surface du deuxième ordre passant par les deux pôles, etc.

Schlömilch. — Sur quelques séries infinies. (132-135).

Schlömilch. — Sur la somme des puissances semblables des inverses des nombres naturels. (135-137).

Discher (*H.*). — Nouvelle méthode pour la mesure de la résistance d'une batterie galvanique. (138-139).

Milinowski. — Sur un théorème de Géométrie. (139-140).

Schlegel (*V.*). — Représentation géométrique des imaginaires au point de vue de la science de l'étendue (*Ausdehnungslehre*). (141-157).

Kötteritzsch (*Th.*). — Sur la théorie des systèmes de surfaces triplement orthogonales. (158-186).

Dans un *Programmabhandlung*, l'auteur s'est occupé de ramener aux quadratures la recherche des coordonnées potentielles et des lignes de courbure d'une surface de niveau donnée; son précédent travail n'épuisait pas la question, vers la solution de laquelle le Mémoire actuel permet de faire un pas de plus.

Matthiessen. — Nouvelle méthode pour la mesure des constantes optiques d'un cristal biaxe. (187-191).

Schlömilch. — Remarques sur le quadrilatère complet. (191-193).

Schlömilch. — Sur le quadrilatère inscriptible et circonscriptible. (193-194).

Preuss (*W.-H.*). — Théorème concernant cinq points situés sur un cercle. (194-195).

Schlegel (*V.*). — Sur le système de coordonnées réciproques du système cartésien. (195-196).

Les coordonnées d'une droite dans ce système, étudié comme nouveau par M. Schwering, bien qu'il soit très-ancien et ait été proposé en premier lieu par M. Chasles, sont les segments interceptés par cette droite sur deux parallèles fixes, comptés à partir de deux points fixes.

Lorentz (*H.-A.*). — Sur la théorie de la réflexion et de la réfraction de la lumière. (196-210).

Schönflies (*A.*). — Sur le paraboloïde hyperbolique équilatère et sur un système de droites qui s'en déduit. (211-254).

Étant donné un tel paraboloïde, il existe une infinité de couples de droites tels,

que chaque point de ce paraboloïde soit également éloigné des deux droites de chaque couple; l'ensemble de ces droites forme une surface du troisième degré. Deux droites d'un couple sont conjuguées par rapport au paraboloïde. L'auteur étudie ensuite le système des perpendiculaires communes aux génératrices du paraboloïde et de la surface du troisième degré.

Mehmke (*R.*). — Quelques propriétés des coniques planes et sphériques. (255-261).

Helm (*G.*). — Sur la théorie de la gravitation de Riemann. (261-263).

Schlegel (*V.*). — Sur la théorie des coefficients du binôme. (263-264).

Prix proposés par la Société de Jablonowski, à Leipzig. (264-268).

Schönflies (*A.*). — Sur un hyperboloïde particulier et sur une surface réglée qui en dépend. (269-285).

Si dans l'hyperboloïde

$$A^2x^2 + B^2y^2 - C^2z^2 = 1$$

on suppose $A^2 = B^2 - C^2$, cet hyperboloïde sera, pour une infinité de couples de droites, le lieu des points dont les distances aux deux droites d'un couple sont dans un rapport constant; l'ensemble de ces couples de droites forme une surface réglée du huitième degré. Ces propositions sont connues depuis longtemps.

Wittwer (*C.*). — Sur les conditions du changement d'état moléculaire. (286-307).

Hochheim (*Ad.*). — Sur les surfaces polaires de la surface gauche du troisième ordre. (308-326, 345-361).

Milinowski. — Démonstration synthétique de ce théorème : « Une courbe du troisième ordre peut être engendrée au moyen d'un faisceau de coniques et d'un faisceau projectif de droites. » (327-336).

Schlömilch (*O.*). — Sur les tangentes et les normales à un système de courbes. (337-339).

Schwering (*K.*). — Sur les racines de l'équation $y^x = x^y$. (339-343).

Erdmann (*G.*). — Sur la recherche de la deuxième variation d'une intégrale simple. (362-379).

Établissement de formules qui peuvent servir de critérium pour la distinction des maxima et des minima d'une intégrale prise entre des limites variables.

Giesen (*A.*). — Mouvement oscillatoire d'un ellipsoïde de révolution allongé, attiré par un point très-éloigné. (380-401).

L'auteur examine successivement les cas suivants : la vitesse initiale est nulle ou ne l'est pas; le point attirant est lui-même animé d'un petit mouvement oscillatoire.

Schlegel (*V.*). — Généralisation d'un mode de génération des courbes du deuxième ordre. (402-407).

Worpitzki. — Généralisation de l'intégration par parties. (407-408).

Thomae (*J.*). — Sur les intégrales elliptiques. (409-412).

Sur les périodes fonctions du module.

Becker (*J.-K.*). — Formule simple pour la mesure du prismatoïde. (412-414).

Kantor (*S.*). — Recherches géométriques. (414-416).

PARTIE HISTORIQUE ET BIBLIOGRAPHIQUE.

Cantor (*M.*). — La Correspondance entre Lagrange et Euler. (1-21).

Voir *Bulletin*, I_1, 116.

Zetzsche (*Ed.*). — Sur la part qui revient à Petřina dans l'invention de l'appareil télégraphique à réponse. (37-45).

Junghans (*F.*). — Hermann Grassmann. Notice nécrologique. (69-75).

Heiberg (*J.-L.*). — Sur un passage de Pappus. (117-120).

Lorsch (*Ad.*). — Sur un problème de maximum. (120).

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, begründet von H.-C. SCHUMACHER, herausgegeben von Prof. Dr C.-A.-F. Peters. Kiel (1).

Tome XCI, nos 2161-2184; 1877.

Weiler (*Aug*.). — Note sur l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune (suite). (1-12).

Hall (*A*.). — Observations des deux satellites de Mars faites au grand équatorial de Washington en août et septembre 1877. (11-14).

Palisa. — Découverte d'une nouvelle planète, faite à Pola le 2 octobre 1877. (15-16).

La planète s'est trouvée être identique à (161).

Peters (*C.-F.-W*.), *Bruhns* (*C*.), et *Winnecke* (*A*.). — Observations de la comète 1877, V, faites à Kiel, Leipzig et Strasbourg. (15-16).

Weiler (*Aug*.). — Note sur l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune. (17-30).

Peters (*C.-H.-F*.). — Découverte de la planète (176), faite à Clinton le 15 octobre 1877. (29-30).

Holetschek (*J*.) et *Plisa* (*A*.). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète 1877, V, découverte par M. Tempel, à Florence, le 2 octobre 1877. (29-32).

Hartwig (*E*.). — Éléments et éphéméride de la comète 1877, VI, découverte à Marseille le 14 septembre par M. Coggia. (31-32).

Weiler (*Aug*.). — Note sur l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune (suite et fin). (33-48).

Schur (*W*.) — Éléments et éphéméride de la comète 1877, V. (49-50).

---

(1) Voir *Bulletin*, I_2, 356.

Gautier (*R.*) — Détermination de l'orbite de la comète 1873, IV. (49-58).

Les calculs sont fondés sur l'ensemble de cinquante observations, faites du 20 août au 20 septembre 1873; ces observations, partagées en cinq groupes, ont conduit M. Raoul Gautier à un système d'éléments elliptiques qui assignent à la comète une période de révolution d'environ 3277 années.

Watson (*J.-C.*). — Observations des planètes (161) et (174), faites à Ann-Arbor en août et septembre 1877. (57-58).

Doubiago (*D. de*). — Observations des comètes 1877, II, et 1877, III, faites à Poulkova en avril et mai 1877. (59-62).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations sur les étoiles variables, faites à Athènes en 1876 et 1877. (61-62).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète 1877, V, faites à Athènes en octobre 1877. (63-64).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète 1877, V, faites à Athènes. (63-64).

Peters (*C.-H.-F.*) — Observations de (176) à Clinton. (63-64).

Stockwell (*J.-N.*). — Note sur la correction des éléments de Gerda (122). (65-70).

La planète, découverte le 31 juillet 1872 par M. C.-H.-F. Peters, a été observée depuis en 1873, 1876 et 1877. M. Stockwell, en cherchant l'orbite la plus convenable pour l'ensemble de ces positions, a reconnu que les observations de 1873 ne pouvaient être représentées par les mêmes éléments que celles de 1872, 1876 et 1877; il pense qu'en 1873 on a observé une planète différente de Gerda, mais ayant très-sensiblement la même orbite qu'elle, puisque les éléments déduits des seules observations de 1873 ne diffèrent de ceux de la planète (122) que par la position du grand axe et la valeur de l'anomalie.

Wolf (*R.*). — Note sur la position géographique de l'Observatoire de Zürich. (69-72).

Deichmüller (*D.*) et *Seeliger* (*S.*). — Observations des comètes 1877, II, et 1877, III, à l'Observatoire de Bonn. (73-78).

Gruber (*L.*) et *Kurländer* (*I.*). — Éléments définitifs de la comète 1874, V. (77-80).

Les éléments sont fondés sur l'ensemble des observations du 25 juillet au 20 octobre.

Tempel (*W.*). — Note sur la position des petites étoiles situées autour de Sirius. (81-86).

Spoerer. — Observations des taches solaires, faites à Potsdam en 1877. (85-90).

Valentiner (*W.*). — Observations des comètes 1877, II, et 1877, III, faites à Mannheim en mai et juin 1877. (89-92).

Plummer (*W.-E.*). — Éléments et éphéméride de la comète 1877, VI, découverte par M. Coggia le 11 septembre 1877. (91-92).

Klinkerfues (*W.*). — Observations, à Göttingue, de la comète 1877, V, découverte par M. Tempel le 2 octobre 1877. (93-94).

Henry (*P.* et *Pr.*) — Découverte de la planète (177), faite à Paris le 5 novembre 1877. (93-94).

Palisa (*J.*). — Découverte de la planète (178), faite à Pola le 6 novembre 1877. (93-94).

Schumacher (*R.*). — Observations sur la marche de la pendule de Knoblich de l'Observatoire de Kiel. (93-96).

La pendule, pourvue d'une compensation à mercure et d'une compensation barométrique, a une marche qui se représente presque rigoureusement à l'aide de trois termes proportionnels à la variation de température, à la variation de pression et au temps écoulé.

Winterberg. — Note sur les déviations de la verticale produites par la non-homogénéité de l'ellipsoïde terrestre. (97-108).

Palisa (*J.*). — Observations des planètes (107), (136) et (140), faites à Pola. (107-108).

Rogers (*W.-A.*). — Éléments d'Iphigénie (110), d'après les oppositions de 1870, 1872, 1873 et 1877. (107-108).

Watson. — Découverte de (179), faite à Ann-Arbor le 12 novembre 1877. (111-112).

Ginzel (*F.-K.*). — Éléments de (172). (111-112).

Weiss (*E.*). — Annonce de la mort de M. de Littrow. (113-114).

C.-L. de Littrow, né à Kazan le 11 juin 1811, est mort à Vienne le 16 no-

vembre 1877. Entré en 1831, comme assistant, à l'Observatoire de Vienne, il était devenu directeur de cet établissement en 1842.

Winterberg. — Note sur les lignes géodésiques et sur l'expression de la distance et de l'azimut de deux points d'une ligne géodésique en fonction des longitudes et latitudes de ces deux points. (111-120).

Doberck (W.). — Sur le calcul des orbites des étoiles doubles (suite). (119-122).

Doberck (W.). — Éléments provisoires de α des Gémeaux. (123-128).

Watson. — Découverte et observations de la planète (175), faites à Ann-Arbor le 1[er] octobre 1877. (127-128).

La nouvelle de la découverte de cette planète n'a pas été transmise télégraphiquement en Europe, et elle n'a pu être mentionnée à sa date.

Souillart. — Note sur l'ombre d'une planète. (129-142).

L'auteur donne l'équation de la surface de l'ombre projetée par une planète dans le cas où l'aplatissement et l'obliquité de l'axe de rotation sur le plan de l'orbite sont assez grands pour qu'il soit nécessaire d'en tenir compte. Toutefois, M. Souillart néglige, dans ses calculs, le carré de l'aplatissement.

Gericke (Hugo). — Observations des planètes (6), (11) et (131), faites à l'équatorial de Leipzig en juin et septembre 1877. (141-142).

Ginzel (F.-K.). — Éléments et éphéméride de la comète 1877, V, découverte par M. Tempel le 2 octobre. (143-144).

Sadebeck (M.). — Influence de la déviation de la verticale sur les mesures d'angle (suite). (145-152).

Hove (H.-A.). — Éléments et éphéméride de Zelia (6) pour l'opposition de 1878. (151-154).

Peters (C.-F.-W.). — Note sur la marche des chronomètres. (155-158).

M. Peters a étudié, sur une série de chronomètres déposés à l'Observatoire de Kiel, les variations de marche que produit la température ou celles que l'on obtient en remontant ces appareils toutes les quarante-huit heures au lieu de toutes les vingt-quatre heures. Cette dernière expérience donne des résultats très-variables.

Karlinski. — Observations de petites planètes, faites à l'Observatoire de Cracovie en janvier et février 1868. (159-160).

Holetschek (*J.*). — Note sur la comparaison des éléments des orbites de la comète de 1762 et de la comète 1877, III. (161-166).

Les deux comètes ne sont pas identiques.

Schiaparelli (*J.-V.*). — Observations de la comète 1877, V, faites à l'Observatoire de Brera en octobre 1877. (167-168).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables, faites en 1877 à l'Observatoire d'Athènes. (169-170).

Karlinski. — Observations de planètes et de comètes, faites en 1868 à l'Observatoire de Cracovie. (171-176).

Gundlach (*E.*). — Note sur la construction des objectifs astronomiques à quatre verres. (177-186).

Pritchett (*H.-S.*). — Observations des deux satellites de Mars, faites à l'Observatoire de Glasgow (U.-S.). (185-188).

L'Observatoire de Glasgow (Missouri) a été fondé, il y a environ deux ans, à l'aide de souscriptions recueillies parmi les habitants de cette ville; rattaché au collége Lewis, il possède, entre autres instruments, un équatorial de $12\frac{1}{4}$ pouces anglais, construit par Alvan Clark. C'est avec cet appareil que les deux satellites de Mars ont été observés, en août et septembre, avec des grossissements qui n'ont pas dépassé 400 fois.

Palisa (*J.*). — Positions moyennes pour 1875,0 des étoiles de comparaison employées à Pola. (189-190).

Karlinski. — Observations équatoriales de la comète d'Encke, faites en 1868 à l'équatorial de Cracovie. (191-192).

Seeliger (*H.*). — Mémoire sur le mouvement d'un point à la surface d'un ellipsoïde de révolution. (193-206).

Petruscheffsky (*Th.*). — Recherches spectro-photométriques sur la surface de la Lune. (207-208).

L'auteur indique le procédé d'observation qu'il emploie depuis 1873, et qui consiste dans la comparaison des spectres des divers points de notre satellite, mais il ne donne pas le résultat de ses recherches.

Palisa (*J.*). — Positions moyennes pour 1875,0 des étoiles de comparaison employées à Pola. (209-218).

Hall (*A.*). — Note sur la position de la tache polaire sud de Mars. (219-224).

M. Hall a trouvé pour angle de position du pôle de Mars, le 17 septembre,

166°22′,0 ± 13′,8. L'angle de position du centre de la tache sud, par rapport à l'axe de la planète, est alors 311°24′,3 ± 3°34′,7; quant au petit cercle décrit par le centre de la tache, son rayon serait, d'après les mêmes observations, 5°10′,8 ± 19′,3.

Pour ce dernier élément, les astronomes ont successivement trouvé :

	″
Herschel, en 1783	8,8
Bessel, en 1830..............................	8,6
Beer et Maedler, en 1837	12,0
Secchi, en 1857	17,4
Linsser, en 1862.............................	20,0
Kaiser, en 1862.	4,2
Hall, en 1877................................	5,1

Alexander (Stephen). — Remarques sur les distances des planètes au Soleil et des satellites aux planètes. (219-230).

Albrecht. — Note sur la vitesse de transmission de l'électricité dans les fils télégraphiques. (229-234).

En comparant les temps de transmission électrique déterminés par les échanges de signaux nécessaires aux déterminations de différences de longitudes, faites de 1874 à 1877 avec le concours de l'Association géodésique internationale, l'auteur trouve que la durée de la propagation du courant électrique est exprimée par la formule

$$S = 0^s,0000208\,L + 0^s,0000000219\,L^2,$$

où L est la distance des deux stations exprimée en kilomètres.

Le Tableau suivant montre que cette formule est fort exacte.

Stations.	Année.	Distance.	Durée de propagation observée.	Durée de propagation calculée.	Différence.
		km	s	s	s
Brocken-Göttingue	1874	146	+ 0,002	+ 0,004	— 0,002
Mannheim-Strasbourg .	1876	157	+ 0,003	+ 0,004	— 0,001
Brocken-Leipzig..	1874	229	+ 0,010	+ 0,006	+ 0,004
Berlin-Göttingue	1874	403	+ 0,011	+ 0,012	— 0,001
Strasbourg-Bonn	1877	467	+ 0,016	+ 0,014	+ 0,002
Berlin-Bonn..	1877	680	+ 0,023	+ 0,024	— 0,001
Bonn-Paris...........	1876	706	+ 0,024	+ 0,026	— 0,002
Berlin-Strasbourg.....	1876	778	+ 0,030	+ 0,029	+ 0,001
Berlin-Paris..........	1877	1230	+ 0,059	+ 0,059	0,000

Les piles employées avaient toujours une intensité assez grande pour réduire au minimum le temps perdu des électro-aimants.

Helmert et *Peters (C.-A.-F.).* — Note sur les déviations de la verticale produites par l'action de la Lune. (235-238).

Holetschek (J.). — Observations de planètes, faites en 1877 au cercle méridien de Vienne. (237-240).

Doolittle (C.-L.). — Observations équatoriales de la position de

Mars pendant l'opposition de 1877, faites à l'Observatoire de l'Université de Lehigh. (241-244).

L'Observatoire fondé en 1868 à Lehigh (Pensylvanie) par M. Sayre possède un équatorial d'Alvan Clark, de 6 pouces d'ouverture.

Strasser (*G.*). — Observations de Mars et des étoiles voisines, faites en 1877 à Kremsmünster. (243-250).

Winnecke (*A.*). — Observations de la comète 1873, VII, faites à l'Observatoire de l'Université de Strasbourg. (249-252).

Hill (*G.-W.*). — Note sur l'accélération du moyen mouvement de la Lune, déterminée par le Dr Weiler. (251-254).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double Σ 547. (253-254).

L'étoile, qui n'avait pas été observée depuis sa découverte par W. Struve, en 1831, a été de nouveau mesurée par M. Burnham ; sa position a considérablement changé.

Peters (*C.-H.-F.*). — Éléments et éphémérides de Idunna (176) pour l'opposition de janvier 1878. (255-256).

Franz (*J.*). — Positions des étoiles de comparaison du Dr Gill pour Ariane et Mars, d'après les observations méridiennes faites à Königsberg. (257-264).

Winnecke (*A.*). — Remarques sur la latitude de l'Observatoire de l'Université de Strasbourg. (263-266).

La latitude est $\varphi = 48^\circ 34' 64'', 21$.

Luther (*R.*). — Observations de petites planètes, faites à Düsseldorf pendant le second semestre de 1877. (265-270).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations sur les taches solaires, faites à Athènes en 1877. (269-272).

Schiaparelli. — Note sur l'axe de rotation et la tache polaire australe de Mars. (273-280).

Les observations de M. Schiaparelli sur la position de la tache sud de Mars ont été faites en plaçant le fil du micromètre tangent au milieu de l'arc de cercle que paraît produire le bord extérieur de cette tache. Continuées du 12 septembre au 13 octobre 1877, elles ont donné au directeur de l'Observatoire de Brera, pour la position de l'axe de la planète à l'époque moyenne des observations, 1877, septembre 27,0 (T. m. G.),

Angle de position du pôle austral...... $p = 164^\circ,90 \pm 0^\circ,099$,

et, pour les coordonnées aréographiques du centre de la tache neigeuse,

$$\theta = 29^\circ,467 \pm 1^\circ,077,$$
$$\lambda = 6,148 \pm 0,123,$$

θ étant rapporté au point que M. Marth a pris pour origine de ses longitudes, point qui coïncide avec le point a de Maedler.

Rapportés aux mêmes origines, les nombres de M. Hall donnent

$$p = 167,50,$$
$$\theta = 20,66,$$
$$\lambda = 5,18,$$

ce qui est une concordance très-satisfaisante, vu la difficulté de ce genre d'observations.

Tebbutt (*J.*). — Nouvelle étoile variable dans la constellation de l'Ara. (279-280).

Cette étoile, située un peu au nord-est de σ Ara, et qui était de 5e grandeur en 1862, n'est plus aujourd'hui que de 11e.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations des taches solaires, faites en 1877 à Athènes. (281-288).

Krüss (*Hugo*). — Lettre sur les observations faites par le Dr Schneiborer à propos des recherches optiques de Hanssen. (289-298).

Winnecke (*A.*). — Note sur un nouveau moyen de mesure des erreurs périodiques d'une vis micrométrique. (297-300).

M. Winnecke place dans l'oculaire du micromètre un prisme achromatique biréfringent qui donne une double image de l'un des fils, double image dont la distance varie suivant une loi connue. La distance de la double image est ensuite mesurée avec la vis à étudier, ce qui donne immédiatement ses erreurs périodiques. Cette méthode a été appliquée avec succès à un micromètre de Repsold.

Bruhns. — Observations des comètes 1877, V, et 1877, VI, faites à l'Observatoire de Leipzig. (299-304).

Oppolzer (*Th. v.*). — Note sur les satellites de Mars. (303-304).

M. Oppolzer signale un passage du *Gulliver*, de Swift, dans lequel il est fait allusion à l'existence de deux satellites autour de Mars.

Schur (*W.*). — Mémoire sur le mouvement relatif des deux composantes de α du Capricorne. (305-312).

Spoerer. — Observations des taches solaires, faites en 1877 à l'Observatoire de Potsdam. (313-316).

Luther (*R.*). — Éphéméride de Melete (56) pour l'opposition de septembre 1878. (315-318).

Doberck (*W.*). — Note sur l'orbite des étoiles doubles. (317-318).

M. Doberck considère que l'on ne connaît guère d'une manière un peu certaine que les orbites de vingt-sept étoiles doubles, qui peuvent être rangées dans l'ordre suivant, d'après la grandeur de leurs périodes et la valeur de leurs excentricités :

	Demi-axe moyen.	Excentricité moyenne.
5 étoiles d'une période inférieure à 50 ans......	0″,89	0,31
7 » entre 50 et 100 »	1,56	0,43
6 » » 100 et 200 »	2,63	0,61
6 » » 200 et 350 »	1,70	0,61
3 » supérieure à 400 »	5,10	0,74

Ces nombres montrent que, d'une manière générale, le demi-grand axe et l'excentricité augmentent en même temps que la durée des révolutions.

Bruhns (*C.*). — Observations de l'éclipse de Lune du 27 février 1877, faite à Leipzig. (319-320).

Bruhns (*C.*). — Occultations d'étoiles, observées à Leipzig en 1874 et 1875. (319-320).

Schulhof (*L.*). — Détermination des éléments de l'orbite de Mélibœa (137). (321-330).

Le calcul est fondé sur cinq lieux normaux, formés à l'aide des observations d'avril et mai 1874.

Oppolzer (*Th. v.*). — Note sur la loi des coefficients numériques qui se présentent dans les quadratures mécaniques. (329-336).

Doberck (*W.*). — Note sur les changements survenus dans la nébuleuse d'Orion. (331-336).

Förster (*W.*). — Recherches sur les horloges à pendule. (337-350).

Winnecke (*A.*). — Observations d'occultations et d'éclipses des satellites de Jupiter, faites en 1855 et 1856 à Berlin et à Bonn. (349-352).

Bruhns (*C.*). — Observations de l'étoile variable de Schmidt, faites en décembre 1876 et janvier 1877 à Leipzig. (351-352).

Förster (*W.*). — Recherches sur les horloges à pendule. (353-378).

Ces recherches sont relatives à la marche de la pendule n° 3 de Tiede, qui est

en usage à l'Observatoire de Berlin depuis plus de trente ans. M. Förster étudie successivement l'influence de la température et de la pression atmosphérique sur la marche diurne de cet appareil, dont la compensation est à mercure.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations sur les étoiles variables, faites en 1877 à l'Observatoire d'Athènes. (377-382).

Peters (*C.-A.-F.*). — Note sur les dernières petites planètes découvertes. (383-384).

M. Peters constate la découverte des planètes suivantes :

(180) découverte le 29 janvier 1878, par M. Perrotin, à Toulouse;

(181) découverte le 2 février 1878, par M. Cottenot, à Marseille;

(182) découverte le 7 février 1878, par M. Palisa, à Pola;

(183) découverte le 8 février 1878, par M. Palisa, à Pola.

Tome XCII, nos 2185-2208; 1878.

Trouvelot (*L.*). — Note sur l'anneau de Saturne. (1-4).

Cette Note, extraite des *Proceedings of the American Academy*, a pour but de justifier l'exactitude du dessin de Saturne fait par l'auteur en 1875, dessin qui montre, d'après la forme de l'ombre de la planète sur l'anneau, que les faces de ce dernier ne sont pas planes.

Austin (*E.-P.*). — Correction des éléments d'Antigone (129) d'après les observations faites de 1873 à 1876. (3-8).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables, faites à Athènes en 1877. (7-12).

Karlinski. — Observations de petites planètes et de comètes, faites en 1869 à l'Observatoire de Cracovie. (13-16).

Holden (*E.-S.*). — Comparaison des observations des satellites d'Uranus, faites en 1875 et 1876 à Washington, avec les Tables de Newcomb. (17-22).

L'auteur déduit de sa discussion les valeurs suivantes de la masse d'Uranus :

D'après les observations d'Oberon.........	$\frac{1}{22500}$	Hall.
» de Titania........	$\frac{1}{23100}$	Hall.
» d'Oberon........	$\frac{1}{23300}$	Holden.
» de Titania........	$\frac{1}{22900}$	Holden.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables, faites en 1877 à Athènes. (21-22).

Karlinski. — Observations de planètes et de comètes, faites en 1869 et en 1870 à l'Observatoire de Cracovie. (23-28).

Hall (*A.*). — Observation des étoiles situées dans le voisinage de la nébuleuse annulaire de la Lyre. (27-28).

La nébuleuse de la Lyre est comme enveloppée d'un anneau de très-faibles étoiles dont la plus brillante est celle qui la suit; M. Hall donne, par rapport à cette dernière, la position de huit autres de ces étoiles, qui sont environ de 13[e] grandeur.

Winnecke (*A.*). — Note sur la position de l'étoile double Σ 547. (29-30).

Bruhns (*C.*). — Observations des planètes (166), (179) et (181), faites à Leipzig. (31-32).

Doberck (*W.*). — Note sur l'observation des étoiles doubles. (33-44).

La Note de M. Doberck a pour but de donner des renseignements sur l'état actuel de la lunette équatoriale de Markree et sur la méthode employée par lui dans la détermination de la valeur des tours de vis de ses micromètres, ainsi que sur sa manière d'observer.

Todd (*D.-P.*). — Observations d'éclipses de satellites de Jupiter, faites en 1875 et 1876 à Washington. (53-48).

Hall (*A.*). — Nom des satellites de Mars. (47-48).

Le satellite extérieur a été nommé *Deimus*, le satellite intérieur *Phobus*. — Les éléments de leur révolution sont :

	Demi-grand axe.	Revolution sidérale.
Deimus	32″,50	1,26250 jours solaires moyens.
Phobus	13,00	0,31894.

Ces éléments donnent pour la masse de Mars $\frac{1}{3051000}$.

Palisa (*J.*). — Découverte de la planète (184), faite à Pola le 28 février 1878. (47-48).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (185), faite à Clinton le 2 mars 1878. (47-48).

Bruhns (*C.*). — Observations de planètes, faites en 1877 à l'équatorial de Leipzig. (49-64).

Doberck (*W.*). — Description du grand cercle méridien de Markree. (65-68).

Le cercle méridien, construit par Ertel en 1839 et décrit par M. Cooper en 1846, avait été abandonné depuis plusieurs années; il vient d'être reparé par Grubb et est de nouveau employé aux observations.

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes, faites en 1877 à Leipzig, et comparaison aux éphémérides. (67-72).

Gauthier (*R.*). — Éléments elliptiques corrigés de la comète 1873, IV, comète de Borrelly. (71-72).

Pritchett (*C.-W.*). — Observations des conjonctions des satellites de Saturne, faites à l'Observatoire de Glasgow (Missouri). (73-76).

Tebbutt (*J.*). — Éclipses des satellites de Jupiter, observées à Windsor (N.-S. Wales) en 1877. (75-78).

Holetschek (*J.*). — Position de la nouvelle étoile variable du Cygne. (77-78).

Burnham (*S.-W.*). — Nouveau Compagnon d'Aldébaran. (77-78).

Ce Compagnon, extrêmement faible, a été découvert avec le 18 $\frac{1}{2}$ pouces de l'Observatoire de Dearborn. Sa distance est de 30″,5 environ et son angle de position de 110°. Le Compagnon déjà connu est aujourd'hui à une distance de 11¼″ et son angle de position est de 35°.

Burnham (*S.-W.*). — Mesures du Compagnon de Sirius. (79-80).

Leveau (*G.*). — Calcul des perturbations de Vesta dépendantes de la première puissance des masses perturbatrices. (81-88).

Pickering (*E.-C.*). — Observations des satellites de Mars, faites en août et septembre 1877 à l'Observatoire de Harvard-College. (87-94).

Ces observations ont été faites, par l'assistant M. L. Waldo, avec un 15 pouces anglais construit par Merz.

Pickering (*E.-C.*). — Observations d'étoiles doubles, faites en 1876 à l'Observatoire de Harvard-College. (93-94).

Tempel (*Wilh.*). — Note sur les étoiles situées au voisinage et à l'intérieur de la nébuleuse de la Lyre. (95-96).

Henry (*P.*). — Découverte de la planète (186), faite à Paris le 6 avril 1878. (95-96).

Oppolzer (*Th. v.*). — Remarques sur la détermination des orbites par trois observations. (97-184).

Schwab (*Fr.*). — Résultat des observations d'étoiles variables faites en 1877 à Marburg. (103-112).

Coggia. — Découverte de la planète (187), faite à Marseille le 10 avril 1878. (111-112).

Winnecke et *Schur.* — Observations de la Lune et des étoiles de la Lune, faites en 1877 à Strasbourg. (113-122).

Dembowski (*St. v.*). — Observations d'étoiles doubles, faites en 1876 et 1877 à son Observatoire de Gallarate. (121-126).

Fearnley (*C.*). — Lettre au rédacteur. (127-128).

La lettre annonce que M. Geelmuyden a reconnu un mouvement propre considérable dans une étoile de neuvième grandeur dont la position est, pour 1875,0,

$$11^h 13^m 30^s,68,$$
$$66^\circ 31' 24'',95.$$

Dembowski (*St. v.*). — Suite de ses observations d'étoiles doubles. (129-142).

Wolf (*R.*). — Note sur la période des variations magnétiques. (141-142).

La période est de 11,14 années, comme pour les taches solaires.

Sawyer (*E.-F.*). — Observation du maximum de Mira Ceti, à l'observatoire de Cambridge (U.-S.) en 1877. (143-144).

Le maximum d'éclat s'est produit le 11 décembre. La période de croissance est de 42 jours et celle de décroissance de 77 jours.

Dembowski (*St. v.*). — Suite de ses observations d'étoiles doubles. (145-154).

Franz (*J.*). — Observations des étoiles de comparaison employées

par M. Gill aux observations de Melpomène faites au cercle méridien de Königsberg. (155-156).

Doberck (*W.*). — Éléments de μ^2 du Bouvier. (157-160).

Ces éléments sont fondés sur l'ensemble des observations faites de 1782 à 1872.

Doberck (*W.*). — Mesures du diamètre des principales planètes. (159-160).

Dembowski (*St. v.*). — Suite et fin de ses observations d'étoiles doubles. (161-170).

Becker (*E.*). — Observations des étoiles de comparaison de Mars au grand cercle méridien de Berlin. (169-176).

Åstrand (*J.-J.*). — Note sur la détermination de la collimation d'un instrument méridien sans l'emploi de collimateurs et sans retournement de l'axe horizontal. (177-180).

La méthode proposée par l'auteur est une modification de celle indiquée par Littrow, et consiste dans l'observation de la polaire, d'une étoile zénithale et d'une étoile sud.

Gericke (*Hugo*). — Observations de petites planètes, faites à Leipzig en octobre et novembre 1877. (179-180).

Doberck (*W.*). — Observations d'étoiles doubles, faites à Markree de 1875 à 1877. (181-190).

Peters (*C.-A.-F.*) et *Weyer* (*G.-D.-E.*). — Observation du passage de Mercure, faite à Kiel le 6 mai 1878. (191-192).

Asten (*E. von*). — Éléments et éphéméride de la comète d'Encke pour son retour de mai à octobre 1878. (193-200).

Klinkerfues (*W.*). — Observation du passage de Mercure le 6 mai 1878, faite à Göttingue. (199-200).

Doberck (*W.*). — Suite des observations d'étoiles doubles, faites à Markree de 1875 à 1877. (201-208).

Peters (*C.-H.-F.*). — Éléments et éphéméride de la planète (185) Eunike. (207-208).

Doberck (*W.*). — Suite des observations d'étoiles doubles, faites à Markree de 1875 à 1877. (209-222).

Doberck (*W.*). — Note sur la correction de l'orbite approximative d'une étoile double. (221-222).

M. Doberck, qui a dans ce genre de recherches une grande autorité, conseille d'employer une méthode qui ne préjuge rien *a priori* sur le degré d'exactitude des observations. Le poids d'un lieu normal n'est pas, en effet, proportionnel au nombre des observations qui ont servi à le former; dans l'appréciation de cette quantité il faut plutôt tenir compte du pouvoir optique de l'instrument employé et de l'habileté de l'observateur.

Après avoir calculé deux Tables propres à la solution rapide du problème de Kepler, il calcule, avec une valeur approchée de la période et de l'excentricité, les anomalies vraies qui répondent aux lieux normaux choisis, et puis par les équations de condition, les corrections à apporter aux trois autres éléments. Avec ces nouvelles valeurs on détermine alors, pour les angles de position donnés, les anomalies vraies, et avec celle-ci, et pour différentes valeurs de l'excentricité, l'anomalie moyenne. De chacune des différentes séries de valeurs des anomalies moyennes on déduit alors une valeur nouvelle de l'époque et de la période, et, par interpolation, une valeur plus exacte de l'excentricité, et ainsi de suite par des approximations successives.

Litborn (*O. v.*). — Observation du passage de Mercure, faite à Anvers le 6 mai 1878. (223-224).

Oppolzer (*Th. v.*). — Observation du passage de Mercure, faite le 6 mai à son Observatoire particulier de Joseph-Stadt. (223-224).

Doberck (*W.*). — Suite des observations d'étoiles doubles, faites à Markree de 1875 à 1877. (225-236).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double OΣ 271. (235-238).

Fearnley (*C.*). — Observation du passage de Mercure, faite le 6 mai 1878 à Christiania. (237-238).

Doberck (*W.*). — Observations d'étoiles doubles, faites à Markree avec le micromètre à double image d'Amici. (239-240).

Tout en rendant justice aux services que le micromètre à double image d'Amici a rendus à l'époque de son invention, M. Doberck le trouve d'un usage moins avantageux que les micromètres à fils actuels, lorsqu'il s'agit de mesurer des étoiles très-faibles.

Doberck (*W.*). — Observations de Régulus et de son Compagnon avec le micromètre à fils de Graham. (241-242).

La position relative du système n'a pas changé depuis les observations de Christian Mayer.

Palisa (*J.*). — Positions méridiennes des étoiles de comparaison employées à l'Observatoire de Pola. (243-250).

Duner (*N.*). — Note sur le spectre de quelques étoiles rouges des Catalogues de Schjellerup et Schmidt. (249-252).

Société Jablonowski. — Programme des prix pour 1878, 1879, 1880 et 1881. (251-256).

La question mise au concours pour 1879 (700 marks) est le calcul des perturbations de Jupiter par la méthode de Hansen.

Pour 1881, la Société propose d'étudier le mouvement de la comète d'Encke, en tenant compte de toutes les forces perturbatrices qui ont agi depuis 1848.

Rümker (*G.*). — Observations des comètes de 1877, faites à l'Observatoire de Hambourg. (257-264).

Becker (*E.*). — Observations des onze étoiles circumpolaires, employées par le service géodésique d'Autriche, faites à l'Observatoire de Berlin. (263-272).

Stone (*O.*). — Note sur l'équation personnelle dans les observations d'étoiles doubles. (271-272).

M. Stone a constaté, par des observations faites à l'Observatoire de Cincinnati, que l'erreur personnelle des mesures d'étoiles doubles avait pour cause principale la position de la ligne des yeux par rapport à la direction des deux étoiles. Dans le but de déterminer l'influence de cette orientation et aussi pour relier entre elles les mesures faites sur les étoiles doubles des deux hémisphères, l'auteur a préparé une liste de vingt étoiles doubles voisines de l'équateur, et dont la position ne varie que très-lentement, qu'il prie les astronomes de vouloir bien observer avec soin, en notant toutes les circonstances de nature à avoir une influence sur l'exactitude des mesures.

Franz (*J.*). — Observations, au cercle méridien de Königsberg, des étoiles de comparaison de Mars en 1877. (273-274).

Doberck (*W.*) — Tables des valeurs de l'anomalie moyenne pour diverses valeurs de l'excentricité et de l'anomalie vraie. (275-282).

Dunér (*N.*). — Observation du passage de Mercure le 6 mai 1878, faite à l'Observatoire de Lund. (283-284).

Denning (*W.-F.*). — Note sur les étoiles filantes du 6 au 12 août et sur les points radiants à l'est de Persée. (283-286).

Galle (*J.-G.*). — Observation du passage de Mercure le 6 mai 1878, faite à Breslau. (287-288).

Hornstein (*C.*). — Observation du passage de Mercure, faite le 6 mai 1878 à l'Observatoire de Prague. (287-288).

Weiler (*Aug.*). — Note sur le mouvement d'un point placé sur un ellipsoïde de révolution. (289-300).

Konkoly (*von*). — Observation du passage de Mercure à l'Observatoire de O-Gyalla (Hongrie). (301-302).

Luther (*E.*). — Observation du passage de Mercure le 6 mai 1878, faite à Königsberg. (301-302).

Lindstedt (*A.*). — Observations de Mars, faites pendant l'opposition de 1877 au cercle méridien de Lund. (303-304).

Weiler (*Aug.*). — Note sur le mouvement d'un point placé sur un ellipsoïde de révolution. (305-318).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observation du passage de Mercure le 6 mai 1878, faite à Athènes. (317-320).

Förster (*W.*). — Observations du passage de Mercure le 6 mai 1878, faites à l'Observatoire de Berlin. (319-320).

Weiler (*A.*). — Note sur le mouvement d'un point placé sur un ellipsoïde de révolution. (321-328).

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites de Saturne pour le second semestre de 1878. (327-336).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (188), faite à Clinton le 26 juin 1878. (335-336).

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites de Saturne pour le second semestre de 1878. (337-346).

Luther (*Rob.*). — Observations de petites planètes, faites en 1878 à l'Observatoire de Düsseldorf. (345-350).

Swift. — Découverte de la comète 1878, faite à Rochester le 7 juillet 1878. (349-350).

Schulhof (*L.*). — Éléments de la comète II, 1873 (Tempel), et éphéméride pour 1878. (351-352).

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites de Saturne pour le second semestre de 1878. (353-362).

Waldo (*L.*). — Observation méridienne de Mercure, faite, pendant son passage du 6 mai 1878, à l'Observatoire de Harvard-College. (361-364).

Weiss (*Ed.*). — Observations du passage de Mercure, faites à Vienne le 6 mai 1878. (365-366).

Leppig (*H.*). — Observation de l'éclipse de Lune du 23 août 1877, faite à Leipzig. (367-368).

Palisa (*J.*). — Observations méridiennes des étoiles de comparaison employées à Pola. (369-376).

Palisa (*J.*). — Observations de comètes et de planètes, faites en 1877 à Pola. (375-380).

Pritchett (*C.-W.*). — Observations du Compagnon de Sirius, faites en 1878 à l'Observatoire de Glasgow (Missouri). (379-382).

Todd (*D.-P.*). — Observation du passage de Mercure du 6 mai 1878, faite à Washington. (381-384).

Tome XCIII, nos 2209-2232; 1878.

Peters (*C.-H.-F.*).— Observations de la planète Iduna (176), faites à Clinton en 1877 et 1878. (1-6).

Duner (*N.-C.*). — Remarques sur le spectre de quelques étoiles des types III et IV de Secchi, d'après les observations faites à Lund. (5-10).

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes, faites en 1877 à l'équatorial de Leipzig. (9-16).

Tempel (*W.*). — Annonce d'une observation de la comète périodique II de 1873 à son nouveau retour. (15-16).

Fabritius (*W.*). — Note sur le calcul de la réfraction dans l'hypothèse d'un décroissement constant de la température. (17-28).

Bruhns (*C.*). — Observations de l'occultation des Pléiades, faites le 6 octobre et le 30 novembre 1876 à Leipzig. (29-30).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double Σ2318. (31-32).

La variation de distance de 1844 à 1878 est trop faible pour expliquer la très-faible distance trouvée en 1829 par W. Struve; il doit y avoir une erreur d'impression dans les *Mensuræ micrometricæ*.

Watson. — Découverte de la planète intra-mercurielle pendant l'éclipse totale de Soleil du 29 juillet 1878. (31-32).

Les numéros suivants des *Astron. Nachr.* renferment plusieurs Notes sur ce sujet, qui a aussi fait l'objet de plusieurs Communications à l'Académie de Paris. Le *Bulletin* traitera la question dans un article spécial.

Winnecke. — Observation de la comète périodique de Tempel (II, 1873), faite à Strasbourg. (31-32).

Palisa (*J.*). — Observations équatoriales de comètes et de planètes, faites en 1877 à Pola. (33-38).

Nichol (*J.-W.*). — Éléments de la comète III de 1877 d'après l'ensemble des observations du 14 avril au 31 mai. (37-42).

La comète est parabolique.

Strasser (*G.*). — Observations méridiennes de planètes, faites en 1877 à Kremsmünster. (41-44).

Plath (*C.-W.*). — Éléments elliptiques de la comète II de 1877. (45-46).

Skinner (*A.-N.*). — Éléments de la planète (181), découverte à Marseille le 2 février 1878 par M. Cottenot. (45-46).

Tebbutt (*J.*). — Note sur la grande comète de 1861. (47-48).

L'auteur a été le premier à publier des éléments de cette comète et à annoncer que sa queue rencontrerait la Terre le 29 juin.

Tempel (*W.*). — Catalogue de nébuleuses nouvelles découvertes à Arcetri. (47-62).

Tebbutt (*J.*). — Observations du passage de Mercure, le 6 mai

1878, et détermination de la longitude de l'Observatoire de Windsor. (61-62).

La longitude de Windsor (N.-S.-Wales) est de $10^h 4^m 54^s,13$ à l'est de Greenwich.

Krueger (*A.*). — Observation du passage de Mercure, le 6 mai 1878, à l'Observatoire de Gotha. (63-64).

Hall (*A.*) et *Holden* (*E.-S.*). — Observations des satellites de Saturne, d'Uranus et du Compagnon de Sirius, faites en 1878 au grand équatorial de Washington. (65-70).

Holetschek (*J.*). — Éléments paraboliques de la comète découverte le 7 juillet 1878 par M. L.-J. Swift. (71-72).

Schulhof (*L.*). — Éléments corrigés et éphéméride de la comète II de 1873, comète périodique de Tempel. (71-74).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables, faites en 1877 à Athènes. (73-78).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double 99 d'Hercule. (79-80).

Le Compagnon, qui est de 10e grandeur environ, a un mouvement angulaire d'environ 2 degrés par an.

Johnson (*S.-J.*). — Note sur les passages de Mercure. (79-80).

Cottenot. — Observations de la comète périodique de Tempel (II de 1873), faites à Marseille. (79-80).

Souillart. — Note sur les inégalités des rayons vecteurs et des longitudes des satellites de Jupiter, dépendantes du carré de la force perturbatrice. (81-96).

Luther (*R.*). — Calcul des perturbations de Parthénope (11) par Jupiter, de 1850 à 1870. (97-108).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète périodique de Tempel (II de 1873), faites à Athènes. (107-110).

Spoerer. — Observations de taches solaires, faites en 1878 à Potsdam. (109-110).

Tempel (*W.*). — Note sur la comète périodique qui porte son nom. (111-112).

Luther (*R.*). — Perturbation des éléments de Parthénope (11) par Jupiter, de 1870 à 1878, et éphéméride pour l'observation de la planète en octobre et novembre 1878. (113-122).

Gould (*B.-A.*). — Note sur les travaux de l'Observatoire de Cordoba. (121-128).

Le but que se proposait M. Gould en établissant en 1871 un observatoire à Cordoba, faire un Catalogue et une Carte exacte des étoiles comprises entre 10 degrés nord et 80 degrés sud, sera bientôt atteint. Un premier Volume d'*Annales* paraîtra dans quelques mois et contiendra l'*Uranométrie* (Catalogue et Cartes) des étoiles de l'hémisphère sud jusqu'à la 7e grandeur; un soin tout spécial a été donné à la représentation de la voie lactée. Les observations de zones sont presque terminées, et, les réductions étant poussées activement, la publication des observations est aussi prochaine et sera une suite à l'uranométrie.

La Note de M. Gould renferme encore des données sur la température moyenne annuelle de Buenos-Ayres (— 34° 36′ sud), de Bahia-Blanca (— 38° 44′ sud), et sur la variation de cette température avec le nombre des taches solaires.

Luther (*R.*). — Perturbations de la planète Hébé (6) par Jupiter, de 1848 à 1870. (129-140).

Watson (*J.-C.*). — Note sur la planète intra-mercurielle. (141-142).

Tebbutt (*J.*). — Note sur l'étoile 6183 du Catalogue de Brisbane. (141-142).

Cette étoile paraît ne pas exister; il y aurait erreur d'observation.

Wolf (*R.*). — Note sur la latitude de Zürich. (143-144).

Luther (*R.*). — Perturbation de la planète Hébé (6) par Jupiter, de 1870 à 1879; éléments de la planète et éphéméride pour l'opposition de 1878. (145-160).

Watson (*J.-C.*) et *Swift* (*L.*). — Lettres sur la découverte de la planète intra-mercurielle. (161-166).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète périodique II de 1873, faites en août 1878 à Athènes. (165-168).

Tempel (*W.*). — Observations de la comète périodique II de 1873, faites en juillet et août à Arcetri. (167-170).

Bossert (*J.*). — Éléments et éphéméride de la planète (148) Gallia. (169-172).

Les éléments sont fondés sur six lieux normaux formés avec les observations faites d'août 1875 à mai 1878.

Pickering (*E.-C.*). — Observations de petites planètes, faites en 1877 et 1878 à l'équatorial de 15 pouces de Harvard-College. (171-176).

Schulze (*L.-R.*). — Éléments et éphéméride de la comète de Brorsen pour son retour en 1879. (177-188).

Les éléments des retours précédents ont été corrigés à l'aide de l'ensemble des observations faites d'août 1868 à septembre 1873.

Schwab (*F.*). — Note sur les variations d'éclat de γ et ε de Pégase. (189-190).

Watson (*J.-C.*). — Note sur la planète intra-mercurielle. (189-192).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (189), faite à Clinton le 18 septembre 1878. (191-192).

Watson (*J.-C.*). — Découverte de la planète (190), faite à Ann-Arbor le 22 septembre 1878. (191-192).

Oppenheim (*H.*). — Détermination des éléments de la planète (116), Sirona. (193-198).

Le calcul est fondé sur la considération de six positions normales fournies par les six oppositions de 1871 à 1876; il a été tenu compte des perturbations de Jupiter et Saturne.

Palisa (*J.*). — Observations de petites planètes, faites en 1878 à Pola. (197-202).

Konkoly (*N. v.*). — Éclipse de Lune du 12 août 1878, observée à O-Gyalla (Hongrie). (203-206).

Ferrari (*G.-St.*). — Observations de la comète périodique de Tempel (II, 1873), faites en août 1878 au Collége Romain. (207-208).

Niessl (*G. v.*). — Note sur la variation diurne des étoiles filantes. (209-224).

Tebbutt (*J.*). — Observation de la comète d'Encke à son retour de 1878. (223-224).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (191), faite le 30 septembre 1878 à Clinton. (223-224).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (192), faite le 2 octobre 1878 à Clinton. (223-224).

Niessl (*G. v.*). — Note sur la variation diurne des étoiles filantes (suite et fin). (225-238).

Les conclusions auxquelles arrive l'auteur sont les suivantes :

1° La condensation des points radiants autour de l'apex, conséquence nécessaire de la théorie, ne correspond pas aux détails de la variation diurne. Cette dernière est mieux expliquée par l'hypothèse d'une moindre accumulation et d'une plus grande vitesse des météores.

2° On ne reconnaît pas non plus, dans les observations directes des points radiants, les conséquences de la théorie du mouvement parabolique.

3° L'inégalité de la distribution des points radiants, que l'expérience montre, demande une hypothèse moins restreinte. D'ailleurs, l'apex n'est pas le centre de condensation des points radiants.

4° Quand un point de concentration météorique a été reconnu, ce point ne doit pas, d'après la marche de la variation diurne, se trouver nécessairement autour de l'apex, il suffit qu'il soit entre l'apex et l'anthélie.

5° De l'existence d'une semblable apparence on peut conclure les dates connues des points de radiation.

6° Une conséquence naturelle de ce qui précède est que l'accumulation des distances périhélie des orbites météoriques correspond à une distance périhélie plus grande.

7° La distribution des points radiants s'accorde aussi bien avec l'hypothèse d'orbites hyperboliques qu'avec celle d'orbites paraboliques.

Bredikhine (*Th.*). — Note sur la force qui produit les queues des comètes. (237-240).

Eu égard à la force nécessaire au développement de leurs queues, les comètes appartiendraient à trois types différents, caractérisés par la grandeur de cette force.

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes, faites en 1878 à l'équatorial de Leipzig. (241-252).

Leppig (*H.*). — Observations de taches solaires, faites en 1873 à Leipzig. (251-256).

Albrecht. — Note sur la vitesse de propagation d'un courant électrique dans les fils aériens et dans les fils souterrains. (257-266).

Ces études sont analogues à celles qu'avait déjà faites M. Albrecht sur la propagation dans les fils aériens. — Pour les fils souterrains, le temps de transmission est donné par la formule

$$S = 0^s,01326\,L + 0^s,00135\,L^2.$$

L'unité de L, qui est la distance des deux stations, est 100 kilomètres.

Leppig (*H.*). — Observations de taches solaires, faites en 1874 à Leipzig. (265-272).

Gyldén (*H.*). — Mémoire sur la rotation d'un corps solide dont la surface est couverte d'un liquide. (273-284).

Leppig (*H.*). — Observations de taches solaires, faites en 1875 à Leipzig. (285-288).

Luther (*R.*). — Calcul des perturbations de Danaé (61) par Jupiter, de 1860 à 1878. (289-302).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète périodique de Tempel (II, 1873), faites en septembre et octobre 1878 à Athènes. (301-304).

Dunér (*N.-C.*). — Note sur la nouvelle étoile variable V de la couronne boréale. (303-304).

Dunér (*N.-C.*). — Mélanges spectroscopiques sur les étoiles des types III et IV de Secchi. (305-308).

Triangulation danoise. — Note sur les travaux de triangulation faits, de 1839 à 1870, en Danemark et dans le nord de la Prusse. (307-318).

Listing (*J.-B.*). — Nouvelles valeurs des constantes géométriques ou dynamiques de la Terre. (317-318).

Schulhof (*L.*). — Éphéméride de la comète périodique de Tempel (II, 1873) pour le mois de novembre. (319-320).

Gauthier (*R.*). — Note sur les éléments de la comète périodique II, 1867 = I, 1873, découverte par M. W. Tempel. (319-320).

M. R. Gautier a calculé les éléments les plus probables de cette comète, qui doit revenir dans les premiers mois de 1879.

Meyer (*M.-W.*). — Observations de la Lune et des planètes, faites en 1877 au cercle méridien de l'Observatoire de Genève. (321-328).

Gould (*B.-A.*). — Observations de la comète d'Encke, faites en 1878 à Cordoba. (329-332).

Stone (*O.*). — Note sur la détermination du temps à l'aide d'un instrument méridien portatif placé en dehors du méridien. (331-334).

Tempel (*W.*). — Observations de la comète périodique II de 1873, faites en septembre et octobre 1878 à Arcetri. (333-336).

Winnecke. — Observations du passage de Mercure, le 6 mai 1878, et observations d'éclipses des satellites de Jupiter, faites en 1877 et 1878 à Strasbourg. (337-346).

Strasser (*G.*). — Observations de culminations lunaires, faites de 1874 à 1877 à Kremsmünster. (345-352).

Seeliger (*H.*). — Mémoire sur les équations d'où dépendent les variations séculaires des éléments des planètes. (353-364).

Knorre (*V.*). — Note sur un nouveau micromètre destiné à enregistrer les différences de déclinaison des étoiles. (363-368).

Le fil de déclinaison est invariablement fixé sur une plaque que la vis de déclinaison fait mouvoir et, pour l'amener, sur une étoile, cette plaque doit nécessairement être déplacée; cette plaque porte un pointeur formé d'une aiguille d'acier très-aiguë. Les mouvements de cette plaque, par rapport aux parties fixes du micromètre, sont enregistrés en enfonçant l'aiguille dans une bande de papier qui se déroule automatiquement devant ce pointeur et devant un second pointeur placé sur les parties fixes du micromètre.

L'instrument, construit par M. R. Fuess, de Berlin, est très-suffisamment exact pour la construction de Cartes célestes.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observation de la comète périodique de Tempel, comète II, 1873, faite à Athènes le 26 octobre. (367-368).

Listing (*J.-B.*). — Remarques sur la parallaxe du Soleil. (369-376).

M. Listing montre qu'il n'y a pas accord entre les valeurs admises pour la parallaxe solaire, la vitesse de la lumière et la constante de l'observation.

Metzger (*E.*). — Remarques sur les opérations géodésiques faites à Java. (375-378).

Pritchett (*H.-S.*). — Note sur le diamètre et la masse de Mars d'après les observations faites avec l'équatorial de $12\frac{1}{4}$ pouces de l'Observatoire de Morrison.

Le professeur C.-W. Pritchett, directeur de l'Observatoire de Morrison, a déterminé avec le même micromètre les diamètres de Mars et les positions de ses satellites. M. H.-S. Pritchett, en se servant de ces observations et de la durée de révolution des satellites, déterminée par M. A. Hall, trouve :

Diamètre de Mars à la distance 1 ...... 4",935.

On a alors, pour axes des orbites des satellites et pour la masse de la planète centrale :

$$\text{Phobos} \ldots\ldots\ldots \quad a = 12'',773, \quad \mu = \frac{1}{3210140}.$$

$$\text{Deimos} \ldots\ldots\ldots \quad a = 32,911, \quad \mu = \frac{1}{2940740}.$$

Tebbutt (J.). — Occultation d'une étoile par le premier satellite de Jupiter. (379-380). G. R.

ACTA UNIVERSITATIS LUNDENSIS. LUNDS UNIVERSITETS ÅRS-SKRIFT (¹).

Tome X; 1873.

Möller (Axel). — Observations de planètes et de comètes, faites en 1873 à l'Observatoire de Lund. (IV-121 p.).

Dans l'année 1873, il a été déterminé, à l'Observatoire de Lund, cent quatre-vingt-quatorze lieux de planètes et de comètes avec le réfracteur de Jünger. En outre, la planète Flora a été pendant douze nuits comparée micrométriquement aux étoiles voisines pour déduire de ces observations la parallaxe du Soleil, suivant la méthode proposée par M. Galle. Quatre des planètes découvertes dans l'année 1873 et dans l'année précédente ont été suivies exactement pendant plusieurs mois. Des sept comètes de l'année, trois seulement ont pu être observées utilement.

La plupart des observations ont été faites par MM. Möller, Dunér, Wijkander et Lindstedt. La latitude de l'Observatoire est 55°41′ 52″,11. La différence de longitude à l'ouest de Berlin est de $49^s,886$.

Le Mémoire contient : pages 1-95, les observations de planètes et de comètes; pages 96-103, les observations micrométriques pour la détermination plus exacte d'une partie des étoiles de comparaison employées; pages 104-114, les déterminations micrométriques des différences de déclinaison entre la planète Flora et les étoiles voisines; pages 116-121, les réductions au centre de la Terre des résultats des observations.

Bäcklund (A.-V.). — Note sur les transformations de courbes et de surfaces. (12 p.; all.).

Le problème de la recherche de la transformation la plus générale, qui change toutes les courbes d'un plan les unes dans les autres, de manière que l'ensemble de toutes les courbes du plan reste le même, est identique au problème de la détermination de toutes les transformations

$$X = F(x, y, p, p', \ldots), \quad Y = F_1(x, y, p, p', \ldots), \quad P = \Phi(x, y, p, p', \ldots), \quad \ldots$$

(¹) Voir *Bulletin*, III, 24; VIII, 130. Les Mémoires sont paginés séparément.

$\left(p, p', \ldots, \text{P}, \text{P}', \ldots \text{ désignant les dérivées } \frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx}, \ldots, \frac{d\text{Y}}{d\text{X}}, \frac{d\text{P}}{d\text{X}}, \ldots\right)$, qui ramènent le système

$$(2) \qquad dy - p\,dx = 0, \quad dp - p'\,dx = 0, \quad \ldots$$

au système semblable

$$(3) \qquad d\text{Y} - \text{P}\,d\text{X} = 0, \quad d\text{P} - \text{P}'\,d\text{X} = 0, \quad \ldots.$$

Il peut maintenant se présenter deux cas : ou les équations (1) sont résolubles par rapport à $x, y, p, p', \ldots$, ou elles ne le sont pas. Dans ce dernier cas, chaque courbe $f(x,y) = 0$ se changera bien dans une courbe $\varphi(\text{X},\text{Y}) = 0$, de telle sorte que les éléments $x, y, p, \ldots$, appartenant à la première courbe, se changent en des éléments X, Y, P, ... appartenant à la seconde courbe; car, pour la première courbe, les équations (2) sont vérifiées, et celles-ci, à cause du mode de formation des équations $\text{P} = \Phi(x, y, p, p', \ldots)$, entraîneront avec elles les équations (3). Par contre, un élément $(\text{X}, \text{Y}, \text{P}, \text{P}', \ldots)$ donne lieu à une infinité d'éléments $(x, y, p, p', \ldots)$, et les ∞^1 éléments appartenant à une courbe $\varphi(\text{X},\text{Y}) = 0$ seront transformés en éléments qui se grouperont pour composer une infinité de courbes. Mais, dans le premier cas, où les équations (1) peuvent se résoudre par rapport à $x, y, p, p', \ldots$, la transformation de $(x, y, p, \ldots)$ en $(\text{X}, \text{Y}, \text{P}, \ldots)$, de même que la transformation inverse de $(\text{X}, \text{Y}, \text{P}, \ldots)$ en $(x, y, p, \ldots)$, devient une transformation qui change une courbe en une seule autre courbe ou en un nombre limité d'autres courbes. On peut dire que les équations (1) représentent entre les portions de courbe de deux espaces (x, y), (X, Y) une correspondance telle, qu'aux portions d'une courbe de l'un des espaces correspondent toujours des portions semblables [c'est-à-dire telles que sont les portions $(x, y, p, \ldots, p^{(k)})$, $(\text{X}, \text{Y}, \text{P}, \ldots, \text{P}^{(k)})$] qui se réunissent pour former une courbe de l'autre espace.

La même chose a lieu pour les transformations de surfaces. Celles-là seulement qui changent les portions de surface d'un quelconque des espaces (x, y, z), $(\text{X}, \text{Y}, \text{Z})$ en portions semblables d'un autre espace sont des transformations qui changent toute surface de l'un des espaces en une surface de l'autre.

La présente Note traite de ces transformations de courbes ou de surfaces, et l'on y fait voir, en particulier, qu'elles sont exclusivement des transformations de contact [1]. Ce résultat a son importance, parce qu'il montre, pour ne parler que des transformations de courbes, qu'il n'existe pas d'autres transformations changeant $x, y, p, p', \ldots, p^{(k)}$ en $\text{X}, \text{Y}, \text{P}, \text{P}', \ldots, \text{P}^{(k)}$ que celles qui transforment déjà x, y, p en X, Y, P. Il n'y a pas de transformations de courbes particulières correspondantes aux valeurs $k = 1, 2, \ldots$.

A cette théorie se rattachent, d'ailleurs, les transformations des équations aux dérivées partielles du premier ordre à trois et à quatre variables.

Tidblom (A.-V.). — Recherches thermo-électriques. 2ᵉ Mémoire. (19 p., 1 pl.).

---

[1] Voir LIE, *Zur analytischen Theorie der Berührungs-Transformationen* (*Bulletin*, I_2, 96).

Tome XI; 1874.

Möller (*Axel*). — Compte rendu des travaux exécutés à l'Observatoire astronomique de Lund pendant les années 1867-1874. (24 p.).

Bäcklund (*A.-V.*). — Mémoire d'Hydrodynamique. (32 p.; all.).

Dans les anciennes théories hydrodynamiques, on a presque exclusivement considéré les cas où les composantes de la vitesse de chaque molécule du fluide sont égales aux dérivées partielles d'une fonction des coordonnées de la molécule, prises par rapport à ces coordonnées, c'est-à-dire aux cas où il existe une fonction des vitesses. La vraie signification de l'hypothèse d'une fonction des vitesses a été clairement exposée, pour la première fois, dans le Mémoire de Helmholtz : *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen* (*Journal de Crelle*, t. LV) : toutes les fois qu'il existe une fonction des forces, il n'existe aucun mouvement de tourbillon, et réciproquement. C'est aussi à Helmholtz qu'est due la première étude approfondie du mouvement le plus général d'un fluide, en ayant égard aux mouvements de tourbillon.

Au travail de Helmholtz se rattache, de la manière la plus étroite, un Mémoire de Clebsch, *Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen* (*Journal de Crelle*, t. LVI). Les nouvelles formes d'équations obtenues dans ce Mémoire par la transformation des équations d'Euler sont de simples expressions analytiques des théorèmes de Helmholtz.

L'auteur se propose, dans le présent Mémoire, d'exposer dans sa plus grande généralité la théorie du mouvement des fluides, en partant des *premières* équations d'Euler. Ces équations, pour les recherches d'une nature générale, semblent mériter la préférence sur les *secondes* équations d'Euler, dites *équations de Lagrange*, bien que celles-ci puissent s'adapter plus facilement à la résolution des problèmes particuliers.

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur le mouvement des fluides dans des espaces à connexion multiple. (4 p.; all.).

Appendice au Mémoire précédent.

Table des matières des dix premiers volumes.

Tome XII; 1875-1876.

Dunér (*N.-C.*). — Mesures micrométriques d'étoiles doubles, faites à l'Observatoire de Lund, suivies de Notes sur leurs mouvements relatifs. (266 p.; fr.).

Bäcklund (*A.-V.*). — Résumé de recherches sur les équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, avec un nombre quelconque de variables. (4 p.; all.).

Tidblom (*A.-V.*). — Quelques résultats des observations météorologiques faites à l'Observatoire de Lund dans les années 1741-1870. (77 p., 2 pl.; all.).

Wijkander (*A.*). — Sur la périodicité des perturbations de la déclinaison magnétique dans la Scandinavie septentrionale. (9 p.; fr.).

Tome XIII; 1876-1877.

Lindstedt (*A.*). — Étude du cercle méridien de l'Observatoire de Lund, avec une détermination de sa latitude. (54 p., 1 pl.).

Ce cercle a été installé à l'Observatoire de Lund dans l'été de 1874. Il sort des ateliers des frères Repsold, à Hambourg; il est muni d'un objectif de 6 pouces d'ouverture et de 7 pieds de foyer.

MONATSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN (¹). Année 1877.

Vogel (*H.-C.*). — Recherches photométriques spectrales pour la détermination de l'absorption de la couche gazeuse enveloppant le Soleil. (104-142).

Kirchhoff (*G.*). — Sur la théorie du condensateur. (144-162).

Vogel (*H.-C.*). — Sur le spectre de la nouvelle étoile du Cygne. (241-259).

Kirchhoff (*G.*). — Sur la théorie du mouvement de l'électricité dans les fils télégraphiques souterrains ou sous-marins. (498-611).

Helmholtz (*H.*). — Sur les courants galvaniques produits par les différences de concentration; conséquences de la Théorie mécanique de la chaleur. (713-726).

Kronecker (*L.*). — Extrait d'un Mémoire lu dans la séance du 9 avril sur les équations abéliennes. (845-851).

Nous citerons le principal théorème de cette Communication : « Toutes les racines

---

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 268.

des équations abéliennes à coefficients entiers sont des fonctions rationnelles de racines de l'unité, et toutes les fonctions rationnelles de racines de l'unité sont racines d'équations abéliennes à coefficients entiers. »

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS, publicado pelo Dr. FRANCISCO GOMES TEIXEIRA, lente de Mathematica na Universidade de Coimbra e socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa. — Coimbra, imprensa da Universidade [1].

Tome I; 1877-1878.

Gomes Teixeira (*F.*). — Sur la décomposition des fonctions rationnelles. (5-12, 17-24, 33-37, 49-56, 97-101, 113-116; fr.).

Le but de ce Mémoire est de généraliser la méthode donnée par M. Hermite, dans son *Cours d'Analyse*, pour déterminer directement les numérateurs des fractions simples, dans lesquelles peut se décomposer la fonction rationnelle proposée.

Gomes Teixeira (*F.*). — Notice sur Saturne. (13-16, 25-32, 41-48, 63-64, 90-93).

Da Silva (*D.-A.*) — Lettre à M. Moigno, sur une réclamation de priorité. (38-40; fr.).

M. da Silva fait remarquer que, dans un travail publié par lui, en 1851, dans les Mémoires de l'Académie de Lisbonne, il était déjà parvenu à établir l'existence de quatre orientations seulement, pour lesquelles un corps peut être en équilibre sous l'action de forces données en grandeur et en direction, ce qui concorde avec une Note présentée par M. Darboux, le 27 décembre 1876, à l'Académie des Sciences de Paris, dans laquelle cet auteur relève l'erreur commise par Möbius dans sa *Statique*. Möbius admettait une infinité de positions d'équilibre.

Da Ponte Horta (*F.*). — Solution d'une question proposée. (57-62).

Des conditions de divisibilité de $x^m \pm a^m$ par $x \pm a$ déduire les règles pour trouver les restes de la division d'un nombre par 9 et par 11.

---

[1] Publié mensuellement par fascicules d'une feuille d'impression in-8°, principalement en portugais et en français. Chaque numéro est divisé en deux sections, dont l'une traite des questions de Mathématiques supérieures, et l'autre contient des travaux sur les parties élémentaires et des Notices astronomiques.

Hermite (Ch.). — Sur les formules de M. Frenet. (65-70; fr.).

Relations différentielles entre les cosinus des angles que font avec trois axes rectangulaires la tangente, l'axe du plan osculateur et la normale principale d'une courbe à double courbure.

D'Aguiar Craveiro Lopes (C.-H.) et *Amorim Vianna (P.).* — Solutions d'une question proposée. (71-75).

Schiappa Monteiro (A.). — Notes sur les solutions précédentes. (105-109).

Par un point donné à égale distance de deux droites données, mener une transversale telle que la partie interceptée entre ces droites ait une longueur donnée.

Da Rocha Peixoto (A.-F.). — Sur l'organisation de l'Observatoire royal astronomique de Lisbonne. (76-80, 121-125).

Détails sur la fondation de cet Observatoire, en 1857, par le roi dom Pedro V, et sur son organisation actuelle.

Schiappa Monteiro (A.). — Note sur l'angle d'une courbe avec une droite. (81-83; fr.).

Sur le degré d'approximation que l'on obtient en prenant pour la direction de la tangente celle d'une corde très-petite.

Amorim Vianna (P.). — Démonstration du théorème de M. Y. Villarceau sur le tore. (84-85).

De Sousa Pinto (R.-R.). — Notice sur Le Verrier. (86-89).

Candido (A.-F.). — Solution d'une question proposée. (94-96).

Par un point donné dans le plan d'un cercle, mener une transversale telle, que les distances de ce point aux deux intersections de la droite et du cercle soient dans un rapport donné.

Marrecas Ferreira (L.-F.). — Sur un problème de Géométrie. (102-104).

Faire passer par un point une droite telle, que les segments déterminés par ses intersections avec une courbe ou une surface aient entre eux un rapport donné.

Woodhouse (L.-I.). — Sur une question proposée. (110-111).

Résoudre en nombres entiers l'équation $a^x + (a+1)^y + (a+2)^z = 3t$.

Notice sur la découverte de planètes et de comètes. (112, 157, 173).

Schiappa Monteiro (A.). — Note sur l'étude de M. J. de la

Gournerie, à l'égard de la division homographique de deux droites. (117-120; fr.).

Voir la *Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie, p. 182.

Notice sur la constitution de la surface solaire. (126).

Amorim Vianna (*P.*). — Solution d'une question proposée. (127-128).

Étant données trois droites sur un plan, concourant en un même point, mener par un autre point de ce plan une transversale sur laquelle les trois droites interceptent deux segments égaux.

Schiappa Monteiro (*A.*). — Généralisation de la méthode de M. Chapuy. (129-132; fr.)

Construction de l'intersection de deux surfaces de révolution.

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur un problème de Géométrie. (133-137).

Étant données trois droites quelconques sur un plan, mener par un point du plan une transversale, qui les coupe de manière que les deux segments non contigus soient égaux.

Gomes Teixeira (*F.*). — Notions élémentaires sur la théorie des déterminants. (138-141).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Solution d'une question proposée. (142-144).

Connaissant la base et la hauteur d'un triangle, avec la somme ou la différence des deux autres côtés, construire le triangle par la Géométrie élémentaire.

Bellavitis (*G.*). — Solution généralisée, au moyen des équipollences, d'une question donnée plus haut. (145-149; ital.).

Voir la question résolue, p. 127-128.

Da Motta Pegado (*L.-P.*). — Solution d'un problème d'Analyse indéterminée. (150-155).

N étant entier, trouver les entiers x tels que $N + x^2$ soit un carré.

Pereira Caldas. — La première Arithmétique imprimée. (156-157).

Ce Traité a été imprimé à Trévise en 1478, sous le titre suivant : *Incomincia una pratica molto buona ed utile a ciascheduno che vuole usare l'arte della mercatancia, chiamato vulgarmente l' arte dell' abaco.*

Amorim Vianna (*P.*). — Solution d'une question proposée. (158-160).

Calculer par la Géométrie élémentaire l'aire latérale et le volume du coin formé par l'intersection d'un cylindre de révolution avec deux plans quelconques, passant par un diamètre de sa section droite.

Da Ponte Horta (*F.*). — Sur le mouvement d'un point sous l'action d'une force perpendiculaire au rayon vecteur. (161-170).

Candido (*A.-Z.*). — Sur un théorème de la théorie des nombres. (171-172).

Si N est premier, l'équation $N + x^2 = y^2$ a pour solution unique $x = \frac{N-1}{2}$, $y = \frac{N+1}{2}$.

Pinto (*S.*). — Passage de Mercure sur le Soleil, du 6 mai 1878. (173-179).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Solution d'une question proposée. (174-176).

Tracer un arc de cercle coupant deux cercles donnés sous des angles donnés.

Da Ponte Horta (*F.*). — Étude sur le même problème. (180-191).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Note de Géométrie descriptive. Sur l'intersection des surfaces de révolution d'un ordre quelconque. (177-179; fr.)

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS, PHYSICAS E NATURAES. Publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa ([1]).

Tome I; 1866-1868.

Da Silva (*D.-A.*). — Note sur quelques théorèmes nouveaux de Statique. (1-5).

([1]) Publié par fascicules grand in-8, dont quatre forment un volume, en portugais et en français.

Da Ponte Horta (*Fr.*). — Note sur l'égalité des polygones. (6-12; 1 pl.).

Da Ponte Horta (*F.*). — Note sur quelques théorèmes de Géométrie. (97-105, 172-173).

Da Silva (*D.-A.*). — Amortissement annuel moyen des pensions dans les principaux « monts-de-piété de survivance » portugais. (175-187).

Da Motta Pegado (*L.-P.*). — Le lieu géométrique des points équidistants de deux droites données est un paraboloïde hyperbolique isoscèle. (188-197; 1 pl.).

Da Ponte Horta (*Fr.*). — Exercice de Géométrie analytique. (269-271).

Da Ponte Horta (*Fr.*). — Note sur quelques propositions arithmétiques. (275-278).

Osorio de Vasconcellos (*A.*). — Note sur un problème d'Hydraulique. (279-282).

Tome II; 1868-1870.

Da Ponte Horta (*Fr.*). — Note sur une proposition de Statique. (1-3).

Sur l'équilibre d'un fil flexible.

Da Ponte Horta (*Fr.*). — Note sur un problème de Géométrie. (4-6).

Da Motta Pegado (*L.-P.*). — Démonstration de la formule qui donne le volume limité par l'intrados d'une voûte d'arête, par le plan des impostes et par les plans verticaux qui contiennent les quatre arcs de tête de cette voûte. (89-94).

Da Motta Pegado (*L.-P.*). — Démonstration de la formule qui donne le volume limité par l'intrados d'une voûte de barrette, par le plan des impostes et par les quatre plans verticaux correspondants aux pieds-droits de la voûte. (95-97).

Da Ponte Horta (*Fr.*). — Note sur quelques propositions de Géométrie. (169-181).

Da Silva (*D.-A.*). — Contributions à l'étude comparative du mouvement de la population en Portugal. (255-307).

Tome III; 1870-1871.

Da Ponte Horta (*Fr.*). — Quelques propriétés des coniques, déduites de la génération parallélogrammique. (1-41).

Barros Gomes (*H. de*). — L'Astronomie moderne et la question des parallaxes sidérales. (73-114, 139-151, 203-231).

Pina Vidal (*A.-A. de*). — Sur le nombre des images formées dans les miroirs plans inclinés. (232-235).

Tome IV; 1872-1873.

Barros Gomes (*H. de*). — L'Astronomie moderne et la question des parallaxes sidérales. (1-29; 1 pl.).

Gomes Teixeira (*Fr.*). — Application des fractions continues à la détermination des racines des équations. (89-94).

Da Silva Pinto (*M.-V.*). — Sur la théorie du raréfacteur et sur la nouvelle machine hydropneumatique. (95-112).

Tome V; 1874-1876.

Da Ponte Horta (*Fr.*). — Note sur un problème de Cinématique. (1-11).

On sait que l'image géométrique du mouvement continu d'une figure plane, mobile dans son plan, est le roulement d'une courbe liée à la figure sur une courbe fixe dans l'espace. L'auteur démontre que ces deux courbes, jointes à la trajectoire d'un point de la figure mobile, dépendent entre elles de telle manière que deux quelconques d'entre elles déterminent la troisième.

Da Motta Pegado (*L.-P.*). — Sections coniques du conoïde circonscrit à une conique. (65-72).

Gomes Teixeira (*Fr.*). — Généralisation de la série de Lagrange. (203-207).

Étant données les relations

$$u = f(y), \quad F(t, x, y) = 0,$$

développer u suivant les puissances de x, sans faire l'élimination de y.

Moraes de Almeida (*C.-A.*). — Sur la généralisation et la discussion de la formule du volume du tronc de cône droit. (208-222).

I. Extension de la formule à la différence de volume de deux cônes opposés. — II. Discussion de la formule, en supposant constants la hauteur et le rayon d'une des bases. — III. Discussion de la formule, en supposant constantes la génératrice et la hauteur. — IV. Discussion de la formule, en supposant constants la génératrice et le rayon d'une des bases.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI (1).

Tome X; 1877.

Jacoli (*F.*). — Sur la vie et les travaux d'Antonio-Maria Lorgna. (1-74).

Lorgna naquit à Cerea (province de Vérone) en 1735 et mourut en 1796; il fut attaché, pendant la plus grande partie de sa vie, au Collége militaire de Vérone. Il a laissé de nombreux travaux, imprimés ou manuscrits, sur les Mathématiques, la Physique, le Génie civil et militaire, l'Artillerie, etc., et la liste de ces travaux remplit les trente dernières pages du travail de M. Jacoli.

Jacoli (*F.*). — Sur la détermination de l'obliquité de l'écliptique, par Domenico-Maria Novara. (75-88).

M. Jacoli établit, principalement d'après un texte tiré d'un travail de J. Werner, imprimé en 1514 à Nuremberg, que l'astronome ferrarais D.-M. Novara (1454-1504), maître de Copernic, détermina à Bologne, en 1491, la déclinaison maximum du Soleil, qu'il trouva égale à 23°29′.

Lucas (*E.*). — Recherches sur plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure. (129-193, 239-293).

CHAPITRE I. (129-170). — *Sur les séries récurrentes.*

On trouve, dans le *Liber abbaci* de Léonard de Pise, la série récurrente 1, 2, 3, 5, 8, ..., définie par les équations

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 1,$$

qui a depuis été étudiée par Lamé et de la considération de laquelle ce dernier a

(1) Voir *Bulletin*, I_2, 242.

déduit une limite des opérations à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres. M. Lucas donne diverses propriétés de cette série; nous citerons les suivantes :

« Le plus grand commun diviseur de plusieurs termes de la série de Léonard de Pise est égal au terme dont le rang représente le plus grand commun diviseur des nombres qui expriment les rangs des termes donnés.

» Si n désigne le rang d'un terme de la série contenant le facteur premier p à la puissance λ, le rang du premier terme de cette série divisible par la puissance $\lambda + 1$ de p, et non par une puissance supérieure, est égal à pn.

» Si p désigne un nombre premier de la forme $10q \pm 1$, le terme de rang $p - 1$ est divisible par p, et, si p désigne un nombre premier de la forme $10q \pm 3$, le terme de rang $p + 1$ est divisible par p.

» Lorsque le terme de rang $p + 1$ est divisible par p, sans qu'aucun des termes dont le rang est un diviseur de $p + 1$ le soit, le nombre p est un nombre premier et l'on a $p = 10q \pm 3$; de même, lorsque le terme de rang $p - 1$ est divisible par p, sans qu'aucun des termes dont le rang est un diviseur de $p - 1$ le soit, le nombre p est premier et de la forme $10q \pm 1$. »

L'auteur déduit de là une méthode pour reconnaître si un nombre est premier ou non, méthode qui s'applique d'une façon particulièrement commode aux nombres de la forme $2^n - 1$, et, plus généralement, aux nombres A pour lesquels $A + 1$ ou $A - 1$ se décompose facilement en facteurs premiers. Ainsi, M. Lucas affirme que le nombre $2^{127} - 1$, qui contient 39 chiffres, est premier.

Chapitre II (170-191). — *Sur les nombres congruents et sur leur multiplication.*

Le problème des nombres congruents, qui revient à la résolution en nombres rationnels du système des équations simultanées

$$x^2 + a = u^2, \quad x^2 - a = v^2,$$

et qui a été d'abord considéré par Diophante, tient une place importante dans le *Traité des carrés* de Léonard de Pise. Le nombre a est dit *congruent*. M. Lucas s'occupe spécialement de la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^4 - a^2 y^4 = z^2,$$

dans le cas de $a = 5$ ou 6, et complète les solutions déjà connues de cette équation; il traite ensuite le problème suivant, dont Woepcke s'était déjà occupé, et que lui avait proposé M. le prince Boncompagni : « Étant donné un nombre congruent, trouver un autre nombre congruent tel, que le produit simple des deux nombres congruents soit de nouveau un nombre congruent. »

Chapitre III (239-258). — *De la résolution complète des équations biquadratiques indéterminées*

$$Ax^4 \pm By^4 = \pm Cz^2, \quad et \quad Ax^4 \pm By^4 = \pm Cz^4,$$

dans lesquelles A, B, C *désignent des nombres entiers ne contenant que les facteurs premiers* 2 *et* 3.

L'auteur se propose de faire voir que la méthode inventée par Fermat peut s'appliquer non-seulement à la démonstration de l'impossibilité des équations indéterminées des degrés supérieurs, mais encore à la résolution de ces équations, lorsque cette résolution est possible. M. Lucas s'occupe de vingt-deux équations de la forme indiquée.

Chapitre IV (258-277). — *Sur la sommation des puissances semblables des nombres entiers et des nombres impairs.*

Après un exposé historique des recherches relatives à ces sommes, l'auteur donne un grand nombre de formules pour leur détermination et, en particulier, les exprime au moyen des nombres de Bernoulli.

Enfin le Chapitre V (278-293), *Sur divers problèmes d'Arithmétique*, est relatif à l'invention des nombres parfaits (égaux à la somme de leurs parties aliquotes), et à divers problèmes sur les triangles rectangles en nombres entiers.

Boncompagni (*B.*). — Sur la somme des quatrièmes puissances des nombres entiers. (294-302).

On trouve dans la *Clef du calcul* de Gemseid ben Masoud ben Mahmoud, surnommé *Ghijath ed Din Alkasciani*, mathématicien arabe, mort en 1450, une règle qui équivaut à la formule

$$S_4 = [S_1 + \tfrac{1}{5}(S_1 - 1)]\, S_2\,;$$

une règle analogue se rencontre dans une lettre de Fermat.

Favaro (*A.*). — Nicolas Copernic et les Archives universitaires de Padoue. Lettre à D.-B. Boncompagni. (303-312).

Il ne résulte en aucune façon des Archives universitaires de Padoue que Copernic ait été inscrit parmi les étudiants de l'archigymnase de Padoue.

Copernic eût-il été étudiant à l'Université de Padoue dans les trois ou quatre années qui précèdent ou suivent 1500, l'état actuel des Archives ne permettrait pas de le constater.

L'opinion qui lui fait acquérir le grade de docteur en médecine et philosophie à l'Université de Padoue est probablement erronée.

Steinschneider. — Rectification de quelques erreurs relatives au mathématicien arabe Ibn Al Banna. Extrait d'une lettre adressée à D.-B. Boncompagni. (313-314).

Günther (*S.*). — Sur les origines et les degrés du développement du principe des coordonnées ; traduit de l'allemand par *G. Garbieri*. (363-405).

Cette étude, très-nourrie de faits, est aussi intéressante au point de vue philosophique qu'au point de vue historique. M. Günther distingue trois stades dans l'évolution de l'idée générale des coordonnées : 1° on se borne à considérer comme axes deux lignes de même nature existant déjà ou prises arbitrairement sur la surface dont on rapporte les différents points à ces deux lignes ; 2° on considère des courbes obtenues, non d'après une loi déterminée, mais en joignant les extrémités des ordonnées que l'on a construites pour toutes les valeurs données de l'abscisse ; 3° enfin, on transforme cette suite de points, qui n'était astreinte à aucune loi, en une autre bien définie ; on établit une équation entre le y et le x de chaque point.

Les Grecs n'ont connu que le premier degré de ce développement successif, et

encore leurs mathématiciens ne se servent-ils guère de ce concept embryonnaire de coordonnées que pour des problèmes d'ordre pratique. C'est dans le x[e] et peut-être seulement dans le xi[e] siècle de notre ère qu'on rencontre pour la première fois un essai de représentation graphique d'une grandeur variable, notamment des positions d'une planète dans le Zodiaque. Pour cela, la zone est développée sur un plan ; sur un axe sont portées les longitudes, sur l'autre les latitudes. Un pareil mode de représentation graphique est nettement conçu et systématiquement appliqué au xiv[e] siècle par ce Nicole Oresme que M. Curtze nous a fait connaître. Par son *Tractatus de latitudine formarum*, il peut être regardé comme un précurseur de Descartes; il possédait même nettement la notion de continuité, ainsi que le prouve la remarque qu'il fait sur le mode de variation d'une fonction dans le voisinage d'un maximum ou d'un minimum, en sorte que, après lui, il ne restait plus qu'un bien petit pas à faire pour parvenir au troisième degré. L'œuvre de Descartes est assez connue; mais M. Günther montre, par divers passages des œuvres de Fermat, que c'est à ce dernier que revient la priorité de la conception générale des coordonnées et de la représentation d'une ligne au moyen d'une équation ; toutefois, au moment où Fermat écrivait son *Isagoge,* Descartes était certainement en possession de son nouveau calcul. « La base scientifique de la Géométrie des coordonnées, conclut M. Günther, est donc le mérite exclusif de trois grands mathématiciens français ([1]). »

Riccardi (*P.*). — Sur un opuscule de Francesco Dal Sole. (407-418).— Documents inédits relatifs à Francesco Dal Sole. (419-427).

Boncompagni (*B.*). — Sur le terme « cumulo » employé par Francesco Dal Sole dans le sens de mille millions. (428-431).

Mansion (*P.*). — Les Mathématiques en Belgique, en 1871, 1873, 1874, 1875. (471-542).

L'auteur a publié (t. VI du *Bullettino*) une histoire des Mathématiques en Belgique, en 1872 ; le présent Mémoire complète ce travail. Voici les titres des Mémoires et Ouvrages analysés par M. Mansion :

Histoire des Mathématiques. — M. Curtze : Cinq lettres inédites de Gemma Frisius. — A. Stevart : Procès de Martin-Étienne Van Velden. — E. Mailly : Essai sur la vie et les Ouvrages de Ad. Quetelet. — E. Rousseau : Histoire des Sciences physiques, mathématiques et naturelles.

Arithmétique. — F. Folie : Divisibilité des nombres. — P. Mansion : Fractions périodiques. — J. Plateau : Sur les diviseurs de 1111, ... — J. Neuberg : Questions d'Analyse indéterminée. — Catalan et Neuberg : Décomposition de

$$N = (a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2$$

en trois ou quatre carrés. — P. Mansion : Généralisation du théorème de Nicomaque sur les cubes.

Algèbre. — P. Mansion : Théorie des déterminants. — P. Mansion : Sur le pro-

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 57.

blème d'Huygens. — Neuberg : Questions de maximum et de minimum. — A. Houzeau : Fragments sur le calcul numérique.

Calcul des probabilités. — A. Meyer : Cours de Calcul des probabilités. — J.-M. De Tilly : Théorie des erreurs.

Calcul différentiel. Théorème de Rolle, de Taylor, de Lagrange. — J.-B. Brasseur : Principes du Calcul différentiel et intégral. — Gilbert : Sur l'existence de la dérivée. — P. Mansion : Sur les théorèmes de Rolle et de Taylor. — P. Gilbert : Déterminants fonctionnels.

Intégrales indéfinies et définies. — E. Catalan : Sur l'intégration des différentielles continuelles. — P. Mansion : Sur les courbes unicursales quarrables algébriquement. — P. Mansion : Démonstration d'un théorème de M. Liouville. — E. Catalan : Remarques sur l'intégrale

$$I = \int_0^\pi l(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx.$$

— Ch. Hermite et J.-W.-L. Glaisher : Sur l'intégrale I. — J. Graindorge : Sur quelques intégrales définies. — E. Catalan : Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques. — B. Niewenglowski : Note sur les arcs de courbes sphériques.

Séries et produits infinis. — E. Catalan : Sur le binôme. — A. Laisant et J.-M. De Tilly : Sur une expression de log 2. — E. Catalan : Recherches sur quelques produits indéfinis. — Graindorge : Sur la sommation de quelques séries et sur quelques intégrales définies nouvelles. — C. Le Paige : Note sur les nombres de Bernoulli.

Recherches sur le développement de $\log\Gamma(x)$ *en série.* — Gilbert : Recherches sur le développement de la fonction Γ et de certaines intégrales définies qui en dépendent. — E. Catalan : Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet. — J.-M. De Tilly, A. Genocchi, P. Gilbert : Recherches sur un développement de $\log\Gamma(x)$. Notice historique.

Équations différentielles ordinaires. — P. Mansion : Démonstration de la propriété fondamentale des équations linéaires. — E. Catalan : Sur l'addition des fonctions elliptiques. — E. Catalan : Sur l'équation de Riccati.

Équations aux dérivées partielles. — J. Graindorge : Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. — J. Graindorge : Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique. — P. Mansion : Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Géométrie élémentaire. — J.-M. De Tilly et A. Genocchi : La question du *postulatum*. — P. Mansion : Sur le premier Livre de la Géométrie de Legendre, à propos des Traités récents. — J.-B. Brasseur : Double perspective. — P. Simons et E. Catalan : Sur le problème de Malfatti.

Courbes et surfaces du second degré. — J. Carnoy, A. Cambier, V. Falisse : Manuels de Géométrie analytique.

Courbes et surfaces d'ordre supérieur. — P. Mansion, L. Saltel, L. Philippin : Transformation arguésienne. — F. Folie : Recherches diverses. — E. Catalan : Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes. — P. Mansion : Sur l'histoire de la Géométrie supérieure. — Catalan : Sur les asymptotes des courbes algébriques.

Géométrie infinitésimale. — E. Catalan : Théorie analytique des lignes à double courbure; Recherches sur les surfaces gauches; Note sur les surfaces orthogonales.

Mécanique. — J.-M. De Tilly : Propriété fondamentale du mouvement d'un corps solide; Note sur le roulement des rouleaux et des roues sur un plan d'appui; Sur

la similitude mécanique; Balistique. — C. Dusausoy : Le problème des tautochrones.

Physique et Astronomie. — Van der Mensbrugghe : Accord de la théorie de la tension superficielle des liquides avec les théories mathématiques de la capillarité. — L. Pérard : Étude sur les procédés suivis pour déterminer les éléments du magnétisme terrestre. — F. Folie : Du commencement et de la fin du monde, d'après la Théorie mécanique de la chaleur.

Riccardi (*P.*). — Lettre à D. B. Boncompagni. (543).

Treutlein (*P.*). — Sur certains écrits inédits relatifs au calcul de l'abaque. (589-594).

L'auteur, qui s'est occupé de l'histoire de l'Arithmétique moderne et a publié un travail sur ce sujet, a eu à regretter, comme tous ceux qui se sont occupés de questions analogues, l'insuffisance des documents publiés, relatifs au calcul de l'abaque dans le moyen âge; dans la Note que nous analysons, il donne la courte liste des manuscrits sur ce sujet qui ont été imprimés, puis décrit sept manuscrits appartenant tant à la Bibliothèque grand-ducale de Karlsruhe qu'à la Bibliothèque de Munich; le premier de ces manuscrits est le Traité de l'abaque de Gerland.

Treutlein (*P.*). — Écrits inédits relatifs au calcul de l'abaque. (595-647).

Ce sont les sept manuscrits dont il vient d'être question.

Boncompagni (*B.*). — Sur le *Tractatus de abaco* de Gerland. (648-656).

Liste de sept manuscrits existants de ce Traité, suivie de quelques détails relatifs à Gerland.

Genocchi. — Sur la publication, faite par B. Boncompagni, de onze lettres de Lagrange à Euler. (657-666).

Discours prononcé par M. Genocchi en présentant à l'Académie des Sciences de Turin un exemplaire, que lui offrait M. le prince Boncompagni, de la reproduction photolithographique, faite par ses soins, de onze lettres de Lagrange à Euler. Ces lettres sont tirées des Archives de la salle des conférences de l'Académie des Sciences de Pétersbourg. C'est à M. Somof que M. le prince Boncompagni devait d'en connaître l'existence.

Annonces de publications récentes. (89-128, 194-238, 315-362, 432-470, 544-588, 668-708).

GIORNALE DI MATEMATICHE AD USO DEGLI STUDENTI DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI (¹).

Tome XV; 1877.

Frattini (G.). — Un exemple de la théorie des coordonnées curvilignes appliquée au Calcul intégral. (1-27).

Recherches relatives à l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}+\frac{d^2 z}{dy^2}\right)\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]=\mu(z).$$

Gatti (S.). — Sur les équations à racines équidifférentes. (28-33).

Si $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$ est une telle équation, les deux racines extrêmes sont données par la formule

$$x=\frac{-a_1\pm\sqrt{\dfrac{3(n-1)[(n-1)a_1^2-2na_2]}{n+1}}}{n}$$

Valeriani (V.). — Quelques applications remarquables de l'induction mathématique. (28-33).

Ces applications concernent diverses propositions de Géométrie élémentaire et de Géométrie projective et quelques formules relatives aux déterminants.

Padelletti (D.). — Sur le concept de couple en Cinématique. (54-61; 101-110; 178-186; 248-256).

Développement et application des idées et des notations symboliques de M. Reuleaux.

Arzelà (C.). — Sur la théorie de l'élimination algébrique. (62-85; 154-178).

Recherches concernant le degré des équations finales obtenues en éliminant $n-1$ variables entre n équations; application à ce cas général du procédé indiqué par Minding pour deux équations.

Crocchi (L.). — Note de calcul graphique sur la résolution d'un système de deux équations du premier degré. (86-88).

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 178.

Garbieri (*G.*). — Déterminants formés d'éléments avec un nombre quelconque d'indices. (89-100).

L'extension du concept de déterminants à des fonctions de n^q quantités (que l'on peut représenter en affectant une lettre de q indices égaux à 1, 2, 3, ..., n), analogues aux fonctions de n^2 quantités qui constituent les déterminants ordinaires, est due à M. de Gasparis (1861). Elle a été depuis l'objet de divers travaux de MM. Armenante, Padova, Zehfuss, notamment dans le cas de trois indices (déterminants cubiques). M. Garbieri expose la théorie des propriétés les plus simples de ces déterminants d'une nouvelle sorte, dans le cas le plus général.

Garbieri (*G.*). — Trisection de l'angle. (111-112).

Bonolis (*A.*). — Développement de quelques déterminants. (113-134).

Ricci (*G.*). — Sur le système de deux équations différentielles linéaires à chacune desquelles satisfait le facteur intégrant de l'autre. (135-153).

Aux éléments d'un système fondamental de solutions de l'une des équations on peut, comme on sait, faire correspondre les éléments d'un système fondamental de solutions de l'autre équation. M. Ricci étudie cette correspondance, d'abord en général, puis relativement aux points critiques, qui sont les mêmes pour les deux équations, en supposant uniformes les coefficients de l'une d'elles. Chacune des deux équations fondamentales qui correspondent à un même point critique a ses racines réciproques de celles de l'autre. Profitant de la forme simple que M. Jürgens a donnée aux formules qui, d'après M. Fuchs, représentent les intégrales appartenant à une racine multiple de l'équation fondamentale, M. Ricci montre comment se correspondent, pour les deux équations linéaires, les groupes ainsi formés d'intégrales relatives au même point critique et à deux racines correspondantes des équations fondamentales; puis il applique les résultats précédemment obtenus à la démonstration d'un théorème de M. Frobenius sur la réductibilité d'une équation différentielle linéaire.

D'Ovidio (*E.*). — Sur un théorème fondamental de la théorie des invariants. (187-192).

Une forme de moins de cinq variables, égalée à zéro, représente une figure géométrique : tout invariant de cette forme égalé à zéro exprime une propriété de cette figure indépendante du choix des coordonnées, et tout covariant égalé à zéro représente une figure dont la relation avec la figure primitive ne dépend pas non plus du choix des coordonnées. M. d'Ovidio démontre que, réciproquement, toute propriété d'une figure indépendante du choix des coordonnées s'exprime par une équation dont le premier membre est un invariant de la forme qui, égalée à zéro, représente analytiquement cette figure géométrique. De même pour les covariants.

Nicodemi (*R.*). — Sur certaines fonctions plus générales que les fonctions hyperboliques. (193-234).

Il s'agit de la fonction

$$\varphi_1(z) = \frac{e^z + e^{\alpha z} + e^{\alpha^2 z} + \ldots + e^{\alpha^{n-1} z}}{n}$$

et de ses $n-1$ premières dérivées

$$\varphi_2(z), \quad \varphi_3(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z),$$

α étant une racine primitive de l'équation

$$x^n - 1 = 0,$$

dont Olivier (*Journal de Crelle*, t. XI) et Heilvig (*Grunert's Archiv der Math. und Ph.*, t. XXI) paraissent seuls s'être occupés. Ces fonctions jouissent, quant à l'addition et à la multiplication des arguments, quant aux relations algébriques qui les unissent, de propriétés analogues à celles des sinus et cosinus hyperboliques.

Minozzi. — Sur les centres de gravité. (235-247).

Extension de la notion de centre de gravité aux surfaces et aux courbes d'un espace à n dimensions.

Amanzio (D.). — Sur quelques formules. (257-267).

Généralisation de diverses formules déduites par Cauchy du calcul des résidus.

Formenti (C.). — Équations finies du mouvement permanent d'un système. (268-283).

Cassani (P.). — Sur les fondements de la Géométrie. (284-288).

Paci (P.). — Sur la fonction potentielle d'une masse distribuée sur une surface. (289-298).

Green a démontré que, si la fonction potentielle d'une masse distribuée sur une surface est constante en tous les points de cette surface, sa dérivée seconde, évaluée suivant la normale extérieure à la surface, est égale à $4\pi\rho\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux et ρ la densité; M. Paci en déduit que cette même quantité $4\pi\rho\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ représente, en général, la différence entre les valeurs de la dérivée seconde de la fonction potentielle évaluée suivant la normale extérieure et la normale intérieure.

Gohierre de Longchamps. — Des fractions étagées. (299-328).

Considérant n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ écrits sur une verticale et séparés par la barre signe de la division, on obtient une expression qui prend un sens déterminé si l'on attribue aux barres diverses longueurs, et si l'on convient de regarder toute *fraction étagée* comme une fraction ordinaire dont le numérateur serait la fraction étagée située au-dessus de la barre la plus longue et le dénominateur la fraction étagée située au-dessous. Tel est le symbole dont M. de Longchamps étudie les propriétés.

Bertini (*E.*) — Sur les courbes rationnelles dont on peut assigner arbitrairement les points multiples. (329-335).

Désignons par L toute courbe de cette espèce. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ les degrés de multiplicité, rangés par ordre de grandeur, des points simples et multiples $1, 2, \ldots, h$ qui déterminent (d'une façon unique) une courbe L de degré r; M. Bertini montre que l'on a

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > r,$$

et que, par conséquent, en prenant les points 1, 2, 3 pour points fondamentaux d'une transformation quadratique, on pourra ramener cette courbe L à une autre courbe L d'ordre moindre. Puis il cherche les courbes L pour lesquelles on aurait

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = r + 1.$$

Il en trouve sept espèces : une courbe du cinquième ordre avec 6 points doubles; une courbe du sixième ordre avec 1 point triple et 7 points doubles; une courbe du huitième ordre avec 7 points triples; une courbe du onzième ordre avec 7 points quadruples et 1 triple; une courbe du dix-septième ordre avec 8 points sextuples; une courbe du vingtième ordre avec 8 points sextuples et 1 triple; enfin, une courbe d'ordre r avec 1 point $r - 1^{\text{uple}}$.

Zolt (*A. de*). — Essai de Pangéométrie. (336-361).

Pittarelli (*G.*). — Exercices sur le calcul des formes binaires. (362-375).

Viaggi (*F.*). — Sur les équations à racines équidifférentes. (376-377).

Dainelli (*U.*). — Théorème sur la somme de trois carrés entiers. (378-380).

RENDICONTI del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano, 2e série, in-8° (1).

Tome VIII; 1875.

Ferrari (*G.*). — L'Arithmétique dans l'Histoire. (5-12, 227-234, 289-299, 624-637, 1006-1013).

Schiaparelli (*G.-V.*). — Résultats des observations sur l'amplitude de l'oscillation diurne de l'aiguille de déclinaison, faites

(1) Voir *Bulletin*, I_2, 83.

pendant l'année 1874 à l'Observatoire royal de Brera, à Milan. (14).

Codazza (*G.*). — Notice sur le professeur Francesco Cattaneo. (72-80).

Ferrini (*R.*). — Sur la correction de la température d'un liquide dans lequel on ne peut pas enfoncer suffisamment le thermomètre. (141-151).

Bardelli (*G.*). — Sur le centre de gravité de quelques systèmes homogènes (151-158).

Condition pour que la projection sur un plan d'un arc homogène ait pour centre de gravité la projection du centre de gravité de l'arc. Problème analogue pour les surfaces.

Schiaparelli (*G.-V.*). — Observations de la comète périodique de Winnecke. (174).

Cantoni (*G.*). — Action des vapeurs dans l'intérieur des liquides. (174-184).

Grassi (*G.*). — De certaines propriétés des mouvements moléculaires. (210-215).

Formenti (*C.*). — Sur quelques problèmes d'Abel. (276-282).

Sur la détermination de la fonction $\varphi(x)$ par l'équation

$$\varphi(x)+1=\varphi[f(x)].$$

Ferrini (*R.*). — Sur deux questions relatives aux cheminées. (438-452).

Grassi (*G.*). — De la pression hydrostatique dans ses rapports avec le mouvement moléculaire de gravitation. (452-458).

Sayno (*A.*). — Sur le calcul des poutres réticulaires à plaques parallèles. (512-514).

Cantoni (*G.*). — Sur une prétendue réforme de la théorie de l'induction électrostatique. (586-595, 678-688).

Grassi (*G.*). — La température absolue dans ses rapports avec l'énergie actuelle. (599-606).

Sayno (*A.*). — Cercle de réduction linéaire, et courbe de repré-

sentation des moments d'inertie des figures planes. (614-623; 1 pl.).

Jung (*G.*). — Sur les intersections d'une conique et d'une courbe plane du quatrième ordre. (698-701).

Démonstration géométrique de ce théorème : « Si une courbe du quatrième ordre a plus de huit points communs avec une conique, elle se décomposera dans cette conique et une autre conique. »

Sayno (*A.*). — Sur le noyau central et sur les courbes de résistance à la rupture par flexion des sections transversales des prismes. (702-710).

Hajech (*C.*). — Compte rendu des travaux de la classe des Sciences mathématiques et naturelles, lu dans la séance du 7 août 1875. (776-790).

Saint-Robert (*P. de*). — De la chaleur actuelle contenue dans les corps. (876-879).

Jung (*G.*). — Sur les moments d'inertie d'une section plane, et sur les diverses manières de les représenter graphiquement; en particulier, sur l'ellipse centrale, sa courbe podaire et le cercle d'inertie. (879-894).

Préliminaires. — Système antipolaire. — Ellipse centrale E. Sa courbe polaire Π. — Ellipse d'inertie (S). — Axes principaux. Moments maximum et minimum. Moments constants. Antifoyers et ellipses relatives d'inertie. Représentation des moments d'inertie au moyen du cercle C. — Réduction linéaire des moments d'inertie à une base constante. — Autre définition de l'ellipse centrale et sa construction par points.

Cantoni (*G.*). — Une expérience de Galilée reproduite et commentée. (916-920).

Expérience d'Hydrodynamique donnant la mesure de la force de percussion de l'eau.

Casorati (*F.*). — Sur la théorie des solutions singulières des équations différentielles. (962-966).

L'auteur traite ici le seul cas des équations différentielles algébriques.

Schiaparelli (*G.-V.*). — Nouvelles observations et orbite de l'étoile double γ de la Couronne australe. (969-973).

Cantoni (*G.*) — La décharge des cohibants armés. (974-978).

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON (1).

Tome XXXVIII; novembre 1877 à juin 1878.

Gill (*David*). — Correspondance et rapports sur son expédition à l'île de l'Ascension. (1-11).

L'expédition astronomique faite par M. Gill à l'île de l'Ascension avait, on se le rappelle, pour but principal la détermination de la parallaxe de Mars à l'aide d'observations de la planète faites au voisinage de son lever et de son coucher; il importait donc, à un haut degré, de faire choix d'une station dans laquelle l'atmosphère serait constamment pure. — Sur la foi d'observations météorologiques faites autrefois à Sainte-Hélène par le capitaine Sabine (la station de ce météorologiste se trouve le point le plus nuageux de l'île), on fit choix de l'Ascension.

Arrivé dans cette île le 13 juillet 1877, M. Gill s'établit d'abord dans la localité de Garrison; mais il dut la quitter quelques jours après pour s'établir, à l'extrémité sud de l'île, sur les bords d'une petite baie, aujourd'hui baie de Mars, qui ne se trouvait pas sous le vent de la montagne Verte, dont le sommet est souvent le point d'attache d'une longue bande de nuages.

L'observatoire étant complétement installé le 5 août, les observations commencèrent dès la nuit suivante et ont été poursuivies, toutes les fois que le ciel l'a permis, jusqu'au 5 octobre. Pendant ces deux mois, M. Gill a obtenu vingt-cinq séries d'observations du matin et trente-deux séries d'observations du soir; le plus grand nombre d'entre elles se rapportent à la période du 4 au 11 septembre. L'opposition avait lieu le 5 septembre.

Airy (*G.-B.*). — Recherches sur les valeurs de la parallaxe moyenne du Soleil d'après les observations faites par les expéditions anglaises durant le passage de Vénus du 8 décembre 1874. (11-16).

Cette Note a déjà été analysée dans le *Bulletin* (2e série, t. II, p. 147).

Gill. — Observations micrométriques de Mars, faites à l'île de l'Ascension, du 31 juillet au 3 octobre 1877. (17-21).

Dunkin (*E.*). — Sur le mouvement propre de 2275 et 2276 Groombridge. (22-24).

La position absolue de cette intéressante paire d'étoiles a été déterminée d'abord par Lalande (1790), puis, aux époques récentes, aux Observatoires de Radcliffe, de Redhill et de Greenwich. Les mouvements propres qui résultent de la com-

---

(1) Voir *Bulletin*, 2e série, t. II, p. 11.

paraison de ces quatre positions sont :

	Mouvement propre	
	en Æ.	en distance polaire.
	s	"
Groombridge 2275............	— 0,0669	— 0,126
» 2276............	— 0,0555	— 0,169

Les deux étoiles ont donc des mouvements propres presque égaux et parallèles, et, si le petit changement survenu dans leur angle de position depuis les observations d'Herschel, en 1782, n'est pas suffisant pour démontrer que ces deux astres forment un système, il paraît néanmoins probable qu'elles sont assez voisines l'une de l'autre pour obéir à la même cause de mouvement.

Dunkin (*E.*). — Note sur l'association physique supposée de 3477 et 3511 du Catalogue de Groombridge. (24-25).

L'auteur établit que le mouvement propre de 3511 Groombridge est seulement de $+0^s,050$ en ascension droite et de $+0'',043$ en distance polaire, et que ces deux étoiles ne forment pas, comme l'a cru M. Flammarion, un système à mouvement rapide comparable à ceux de 36 Ophiuchus et de 30 Scorpion.

Safford (*T.-H.*). — Note sur le mouvement propre de 3511 Groombridge. (25-28).

M. Safford montre que les observations de cette étoile, faites de 1790 à 1874 par différents astronomes, peuvent être représentées par les formules

$$\alpha = 21^h 28^m 57^s,09 + 0^s,016\,(t - 1855),$$
$$\delta = 79^\circ 53' \; 29'',2 \; - 0'',018\,(t - 1855).$$

Le mouvement propre serait encore plus petit que celui qu'a trouvé M. Dunkin.

Wilson (*J.-M.*) et *Seabroke* (*G.-M.*). — Note sur le second Catalogue d'étoiles doubles observées à l'Observatoire de Rugby. (29-30).

Ce second Catalogue, qui sera publié dans le tome XLIII des *Mémoires de la Société Astronomique*, comprend les observations micrométriques d'étoiles doubles faites de 1874 à 1877 à l'équatorial d'Alvan Clark, de $8\frac{1}{4}$ pouces d'ouverture.

Russell (*H.-C.*). — Sur les lignes atmosphériques comprises entre les lignes D du spectre solaire. (30-32).

Christie et *Maunder*. — Note sur l'observation du spectre d'une tache solaire à l'Observatoire de Greenwich. (32-33).

Outre le renforcement d'un certain nombre de lignes métalliques, on a constaté dans quelques-unes d'entre elles un déplacement latéral résultant d'un mouvement horizontal dans la matière de la tache.

Christie et *Maunder*. — Observations physiques de Mars, faites à Greenwich. (34-38).

Il n'y a qu'une différence d'éclat entre le spectre des terres et des mers. Le spectre

de Mars donne quelques bandes spéciales analogues aux bandes atmosphériques de la Terre ; des nuages accidentels paraissent se montrer dans l'atmosphère de la planète.

Green (*N.-E.*). — Observations de Mars, faites à Madère en août et septembre 1877. (38-42).

M. Green a observé, en diverses circonstances, des taches non permanentes qu'il attribue à des nuages ; il croit aussi avoir constaté l'existence, vers le pôle sud, de montagnes élevées reconnaissables à ce qu'elles conservent la neige plus longtemps que les parties voisines.

Adams (*J.-C.*). — Note sur le mouvement des nœuds de la Lune dans le cas où les orbites du Soleil et de la Lune seraient supposées dépourvues d'excentricité et où leur inclinaison mutuelle serait infiniment petite. (43-49).

Neison (*E.*). — Note sur un nouveau terme de longue période dans le moyen mouvement de la Lune. (49-53).

Cette Note a pour but le calcul de la valeur numérique du terme qui dépend de l'action de Mars.

Neison (*E.*). — Note sur trois petites inégalités dans le moyen mouvement de la Terre et sur une inégalité dans le moyen mouvement de Mars. (53-55).

Ward (*J.-W.*). — Observations du satellite de Neptune. (55-56).

Six positions de cet astre ont été obtenues du 16 octobre au 6 novembre avec une lunette de 4,3 pouces.

Plummer (*W.*). — Éléments et éphéméride de la comète de Coggia, comète 1877. (56).

Gill (*D.*). — Rapport sur son expédition à l'Ascension. (56-57).

Brett (*John*). — Note sur la condition physique de Mars. (58-61).

M. Brett croit devoir conclure des observations faites par lui pendant la dernière opposition que Mars est un corps solide, porté à la température du rouge sombre, et que les taches blanches polaires sont des nuages condensés dans l'atmosphère et non pas des amas de neige.

Pratt (*H.*). — Notes sur Mars. (61-63).

M. Pratt a remarqué, dans l'atmosphère de Mars, des défauts locaux de transparence, analogues à ceux que produiraient des brouillards ou des nuages. — L'instrument employé est un télescope de 8 $\frac{1}{2}$ pouces d'ouverture.

Zenger (*C.-V.*). — Nouvelle méthode astrophotométrique. (65-70).

La méthode consiste à noter l'heure à laquelle disparaît dans la lueur de l'aurore un astre ou les détails d'un astre. Le moment de la disparition étant celui où l'éclat du point considéré est égal à celui du fond du ciel, il n'y a plus qu'à calculer, par une formule connue, l'intensité lumineuse de ce dernier. Appliquée au système de Jupiter, la méthode d'observation a donné, pour l'éclat des diverses parties, les nombres suivants :

Pourtour du disque.......	1,555	Troisième satellite........	1,000
Bande équatoriale nord...	1,130	Deuxième »	0,970
Zone polaire nord........	1,124	Premier »	0,960
Bande équatoriale sud....	1,110	Quatrième »	0,820
Zone polaire sud..........	1,091		

Perry (*S.-J.*). — Phénomène des satellites de Jupiter, observés à Stonyhurst du 4 février au 15 juin 1877. (72-73).

Tebbutt (*J.*). — Note sur le troisième satellite de Jupiter. (73-74).

M. Tebbutt donne les détails des observations faites par lui lors des passages du troisième satellite devant la planète les 4 mars, 23 avril, 18 juillet 1874 et 22 mai 1875.

Boys (*C.-V.*). — Note sur une nouvelle horloge astronomique. (74-78).

Burnham (*S.-W.*). — Neuvième catalogue d'étoiles doubles découvertes avec son réfracteur de 6 pouces. (78-80).

Wilson (*J.-M.*). — Note sur un cas spécial du calcul du résultat le plus probable d'un grand nombre d'observations. (81-82).

En supposant le poids d'une observation inversement proportionnel à son écart du nombre vrai, le résultat le plus probable sera obtenu de la manière suivante : les observations étant rangées par ordre de grandeur croissante, si leur nombre est impair le résultat probable est l'observation du milieu, si leur nombre est pair le résultat probable est un nombre quelconque compris entre les deux observations du milieu.

Addison (major *Thomas*). — Note sur la détermination des longitudes de Kurrachee et de Madras. (83-84).

Les longitudes déterminées en 1874 par des signaux galvaniques sont :

	Longitude est de Greenwich.
	h m s
Kurrachee..........................	4.27.53,43
Madras.............................	5.20.59,65

Hall (*M.*). — Observations de l'opposition de Mars en 1877. (85-86).

Des observations faites par lui à la Jamaïque, du 4 août au 17 septembre, avec un équatorial de 4 pouces d'ouverture, il déduit, pour valeur de la parallaxe solaire, 8″,789, avec une erreur probable de ± 0″,060.

Lindsay (lord). — Note sur le volume II des publications de l'Observatoire de Dun-Echt. (86-88).

Ce volume renferme une partie des travaux effectués par M. Gill à l'île Maurice, et, en particulier, les observations de Junon. Ces observations, faites, au lever et au coucher de la planète, en vue de déterminer la parallaxe diurne, ont donné pour parallaxe du Soleil

$$\pi = 8'',77 \pm 0'',041.$$

Ventosa (*V.*). — Note sur les mouvements réels des étoiles dans l'espace. (90-94).

M. Ventosa donne les formules au moyen desquelles on peut déduire du mouvement propre apparent d'une étoile et de son mouvement dans le sens de la ligne de visée la direction et la vitesse de son mouvement absolu dans l'espace.

Waters (*Sidney*). — Sur la distribution des étoiles fixes dans l'espace. (94-95).

M. Sidney Waters, en étudiant, au moyen des sondages d'Herschel, la distribution des étoiles du ciel austral, montre qu'elle ne s'accorde pas avec les vues exposées par M. Stone dans les *Monthly Notices* de mars 1878.

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites d'Uranus de janvier à mai 1878. (96-97).

Common (*A.-A.*). — Note sur les satellites de Mars et de Saturne. (97-100).

Observations des satellites de Mars et de Saturne, faites avec un télescope de 18 pouces d'ouverture, de septembre 1877 à janvier 1878.

Copeland (*R.*). — Observation du passage de l'ombre de Titan sur Saturne le 25 décembre 1877. (100-101).

Huggins (*W.*). — Note sur l'arrangement cyclonique des granules du Soleil. (101-102).

L'auteur indique que, dès 1866, il a observé un arrangement cyclonique des granules solaires, analogue à celui que montrent les photographies faites, à Meudon, par M. Janssen.

Downing (*A.-W.*). — Sur l'erreur probable des passages du pre-

mier et du deuxième bord du Soleil dans les observations de passage faites au chronographe. (102-104).

En discutant ces observations, faites à Greenwich en 1874 et 1875, l'auteur montre que, surtout pour les jeunes observateurs, l'erreur probable des observations du premier bord est un peu plus grande que l'erreur probable des passages du deuxième bord; ceci doit être attribué à la différence des circonstances physiques des deux phénomènes.

Winnecke. — Note sur la variabilité de la nébuleuse H. II, 278. (104-106).

La variabilité de cette nébuleuse est déduite de la discussion des observations faites par W. Herschel, lord Rosse, d'Arrest, Schönfeld, Vogel et Winnecke, depuis 1785 jusqu'à ce jour; elle ne paraît pas douteuse.

Stone (E.-J.). — Sur une cause d'apparition de lignes brillantes dans le spectre des amas d'étoiles irrésolubles. (106-108).

Christie (W.-H.-M.). — Note sur la réflexion spéculaire de Vénus. (108-110).

Les observations faites à Greenwich, par M. Christie, montrent qu'il y a à la surface de Vénus une gradation de lumière identique à la distribution théorique qui doit résulter de la réflexion de la lumière solaire sur un corps poli enveloppé d'une épaisse atmosphère.

Denning (W.-F.). — Note sur la répétition probable ou seconde émission des points radiants et sur la longue durée des averses météoriques. (111-114).

M. Denning pense que le nombre des points radiants doit être beaucoup réduit en réunissant, comme appartenant au même courant météorique, plusieurs points voisins, et que la durée d'un point radiant est, en général, beaucoup plus longue qu'on ne l'a admis jusqu'ici; il pense aussi que des étoiles filantes apparaissent au même point du ciel après une période de trois mois environ.

Tupman (G.-L.). — Remarques sur la Note de M. Denning. (115-116).

M. Tupman croit que la durée des averses météoriques est encore trop mal déterminée pour qu'on puisse appuyer sur elle des considérations de l'ordre de celles qu'a développées M. Denning.

Neison (E.). — Sur un petit terme à longue période dans l'expression du moyen mouvement de la Lune et sur un terme séculaire du même mouvement (116-118).

Godward (W.). — Correction des éléments de Cérès. (119-122).

M. Godward corrige les éléments de Schubert, qui sont employés par le *Nau-*

tical Almanac au calcul des positions de la planète, à l'aide des observations de l'astre faites à Greenwich de 1857 à 1876.

Hall (*Asaph*). — Note sur le centre de gravité du disque apparent d'une planète. (122-123).

Erck (*Wentworth*). — Description d'une monture équatoriale portative pour les lunettes de faibles dimensions. (124).

RAPPORT ANNUEL DU CONSEIL DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE. (125-254).

Ce Rapport, toujours très-étendu, ne saurait être analysé ici d'une manière complète; nous en extrayons les renseignements suivants :

Au 31 décembre 1877, le nombre des membres ou associés de la Société était de 617 et les recettes de l'année se sont élevées à 54375 francs.

La Société a publié les volumes XLI et XLIII de ses Mémoires. Le premier renferme un précieux ensemble de documents sur les éclipses totales de Soleil antérieures à 1871. Dans le second on trouve : 1° un Mémoire de M. Knobel sur la chronologie des Catalogues d'étoiles; 2° une série de mesures micrométriques d'étoiles doubles par M. Knott; 3° le second Catalogue de mesures d'étoiles doubles observées à Rugby par MM. Wilson et Seabroke; 4° une théorie du photohéliographe horizontal, par M. Harkness; 5° un Mémoire sur le système sidéral, par M. Maxwell Hall; 6° un Mémoire sur la période commune à la fréquence des taches solaires et à la variation de la déclinaison magnétique, par le Dr Rudolf Wolf.

Parmi les notices nécrologiques, on remarque celles sur Talbot, Bremiker, Heis, par E. Denning, Le Verrier, par Hind, Littrow et Santini.

Le Rapport du Conseil renferme encore : 1° un important résumé des recherches de MM. Newcomb, Hill, Adams et Airy, sur le mouvement et les tables de la Lune; 2° une Note sur les travaux de M. Draper, relatifs à la recherche de l'oxygène dans le Soleil; 3° un résumé des progrès de l'Astronomie météorique en 1877.

La médaille d'or de la Société a été accordée au baron Dembowski pour ses travaux sur les étoiles doubles.

Taylor (*Sedley*). — Recherches sur le procès de Galilée devant l'Inquisition. (256-267).

La Note de M. Sedley Taylor est une analyse des publications récentes de Wohlwill, Gherardi et von Gebler.

Neison (*E.*). — Note sur un terme à longue période dans la théorie de la Lune par Hansen. (268-279).

Stone (*E.-T.*). — Note sur les observations télescopiques du passage de Vénus en 1874, recueillies par les expéditions anglaises. (279-295).

Cette Note a déjà été analysée dans le *Bulletin* (2e série, t. II, p. 147).

Safford (*T.-H.*). — Sur certains groupes d'étoiles qui ont un mouvement propre commun. (295-297).

Parmi les groupes d'étoiles de la même région du ciel qui ont des mouvements propres presque identiques, l'auteur signale les suivants :

Groupe I.

	Δα.	Δδ.
	s	″
36 Céphée........	+ 0,05	+ 0,02
39 Céphée........	+ 0,085	+ 0,01
Bradley 3187......	+ 0,03	0,00
Bradley 74........	+ 0,04	— 0,01
43 Céphée........	+ 0,068	0,00
Bradley 95	+ 0,07	— 0,01

Groupe II.

	Δα.	Δδ.
Bradley 65........	+ 0,11	— 0,02
Polaire..........	+ 0,11	0,00

Groupe III.

	Δα.	Δδ.
	s	″
Bradley 344.......	+ 0,02	— 0,08
Bradley 402.......	+ 0,04	— 0,09
Radcliffe 1311	+ 0,04	— 0,09

Groupe IV.

	Δα.	Δδ.
Groombridge 1850.	— 0,06	+ 0,06
6 de la Petite Ourse.	— 0,094	+ 0,07

Groupe V.

	Δα.	Δδ.
30 Léopard	— 0,052	+ 0,03
202 Léopard.......	— 0,06	+ 0,04

Marth (*A.*). — Éphéméride pour l'observation physique de Jupiter pendant l'année 1878. (298-300).

Airy (*G.-B.*). — Occultations d'étoiles et éclipses des satellites de Jupiter observées à Greenwich en 1877. (300-301).

Proctor (*R.-A.*). — Réponse à une Note de M. Stone insérée dans les *Monthly Notices* de janvier 1878. (302-303).

Denning (*W.-F.*). — Observations d'étoiles filantes en 1877. (303-314).

Denning (*W.-F.*). — Catalogue des points radiants déduits des observations d'étoiles filantes faites en 1872 par les membres de l'Association météorique italienne. (315-319).

Proctor (*R.-A.*). — Note sur la détermination de l'axe polaire de Mars par rapport à la Terre. (320-328).

M. Proctor indique une solution géométrique du problème.

Downing (*A.-W.*). — Sur le mouvement propre en ascension droite de η^2 du Dragon. (328-329).

En comparant entre elles les observations faites de 1800 à 1874, l'auteur trouve pour le mouvement propre en ascension droite $+ 0^s{,}00408$.

Tebbutt (*J.*). — Note sur une nouvelle étoile variable de la constellation de l'Ara. (330-331).

Erck (*Wentworth*). — Note sur une disposition adoptée par M. Grubb dans les spectroscopes destinés à l'étude du bord solaire. (331-332).

Knott (*G.*). — Maximum de l'étoile variable *u* des Gémeaux. (334).

Rodgers (*J.*). — Note sur l'observation de l'éclipse totale du 29 juillet 1878 dans l'Amérique du Nord. (335-337).

Jenkins (*B.-G.*). — Sur la tache lumineuse observée dans les passages de Mercure (337-340).

M. Jenkins rappelle que, dans les passages antérieurs de Mercure, les astronomes ont vu soit une tache lumineuse située dans les environs du centre du disque noir de la planète, soit un anneau brillant tout autour de l'astre; il pense qu'il y a intérêt à rechercher si quelque phénomène analogue sera visible pendant le prochain passage du 6 mai.

Johnson (*S.-J.*). — Sur les anciens passages de Mercure. (340-341).

Stone (*E.-J.*). — Comparaison des observations du passage de Vénus, faites au Cap de Bonne-Espérance le 8 décembre 1874, avec les observations correspondantes obtenues par les expéditions anglaises. (341-347).

Cette Note a déjà été analysée dans le *Bulletin* (2e série, t. II, p. 147).

Abney. — Photographie des parties les moins réfrangibles du spectre de la lumière solaire. (348-351).

En employant comme couche sensible du bromure d'argent dans un état particulier d'émulsion, le capitaine Abney a obtenu des photographies de la partie rouge du spectre qui s'étendent au delà de A jusqu'à la longueur d'onde de 10300, bien au delà, par conséquent, du rouge visible.

Greg (*R.-P.*). — Sur la durée des averses météoriques. (351-353).

L'auteur pense que la durée d'une averse météorique, produite par la rencontre de la Terre avec un même groupe d'astéroïdes, ne peut guère dépasser trois semaines; ses opinions se rapprochent donc de celles du capitaine Tupman.

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Note sur la résolution, par essais successifs, de l'équation de Lambert qui se présente dans le calcul des orbites paraboliques. (353-360).

Eastman (*J.-R.*). — Observations du Compagnon de Sirius faites au cercle méridien de Washington en mars 1878. (360).

Marth. — Discussion des observations des satellites de Mars, faites par MM. Mandauer à Greenwich, Pritchard à Oxford, Wentworth, Erck, Key, Brett et Common. (361-366).

Plummer (*J.-J.*). — Note sur l'influence probable d'une masse de briques sur les erreurs d'un instrument de passage situé dans son voisinage. (367-369).

Herschel (*A.-S.*). — Tableau des concordances connues entre les orbites des comètes et des étoiles filantes. (369-395).

D'après cette liste, le nombre des concordances serait de 71.

Denning (*W.-F.*). — Note sur les étoiles filantes de la Lyre. (396-397).

Ces étoiles filantes, qui se montrent du 19 au 23 avril, paraissent en relation avec la comète I de 1861.

Airy (*G.-B.*).— Observations du passage de Mercure le 6 mai 1878, faites à Greenwich. (395-401).

Les observations ont été contrariées par le mauvais temps; les contacts n'ont pas été notés. — Quelques observateurs ont distingué une couronne brillante autour de la planète et, vers le centre de son disque, une tache lumineuse.

Brett, Chambers (*G.-F.*), *Cole, Penrose, Prince, Pritchard* et *Proctor.* — Observations du passage de Mercure faites dans leurs observatoires particuliers. (401-408).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur β du Lion et 3992 B. A. C. (408 409).

Ellery (*R.-L.-J.*). — Observations du diamètre polaire et du diamètre équatorial de Mars avec un équatorial de 8 pouces d'ouverture. (409).

Rutherford (*L.-M.*). — Sur une photographie du Soleil. (410).

M. Rutherford adresse à la Société une photographie du Soleil faite par lui le 11 août 1871, et sur laquelle on distingue les granulations de la surface de l'astre.

Tebbutt (*J.*). — Note sur la grande comète de 1861. (412).

L'auteur, qui a le premier découvert la comète le 13 mai 1861, a été aussi le premier à en calculer l'orbite.

Noble (*W.*). — Position de l'observatoire de M. de Boë, aux environs d'Anvers. (413).

Longitude est de Greenwich.......	$17^m 38^s,6$.
Latitude »	$51^\circ 12' 28''$.

Plummer (*J.-J.*). — Passage de Mercure du 6 mai 1878. (413-414).

Quoique le ciel fût très-nuageux, les contacts de l'entrée ont pu être observés. La planète était visible sur la couronne solaire avant le premier contact.

Lindsay et *Copeland*. — Observation du passage de Mercure, le 6 mai 1878, faite à Dunecht. (414-422).

La première partie du passage a été observée, d'une manière très-complète, par lord Lindsay et MM. Carpenter (H.-J.), Lohse (J.-G.), Copeland et Ranyard; en outre, une série de photographies a été faite par M. Davis.

Young (*C.-A.*). — Observation du passage de Mercure, le 6 mai 1878, faite à Princeton, dans l'État de New-Jersey. (423-425).

Langley (*S.-P.*). — Observation du passage de Mercure à l'Observatoire d'Allegheny. (425-426).

Konkoly (*N. von*). — Observation du passage de Mercure, faite à l'Observatoire de Ò-Gyalla, en Hongrie. (426-428).

Tupman (*G.-L.*). — Note sur la valeur moyenne de la parallaxe solaire, d'après les observations du passage de 1874. (429-457).

Le Mémoire de M. Tupman débute par la publication, d'après les documents reçus à Greenwich, des observations non encore imprimées dans les *Monthly Notices*. L'astronome de Greenwich fait ainsi connaître les résultats obtenus au cap de Bonne-Espérance, à Port-Élisabeth, à Maurice, en Égypte, en Arabie et dans l'Inde, et, enfin, dans les divers observatoires fixes ou temporaires d'Australie.

L'ensemble de toutes les observations connues, d'entrée ou de sortie, est ensuite discuté de la manière suivante :

Pour les observations d'entrée, par exemple, M. Tupman forme les équations de conditions relatives à toutes les observations supposées avoir le même poids, et résout ces équations par la méthode des moindres carrés. Les résidus obtenus lui montrent alors que, pour certaines observations, la discordance est vraiment trop grande; ces observations sont alors écartées, et, parmi celles qui restent, des poids égaux à 2 sont accordés à celles qui ont été faites dans des circonstances tout à fait favorables par des astronomes expérimentés. Le groupe des équations conservées est alors de nouveau résolu par la méthode des moindres carrés.

Par cette méthode, M. Tupman obtient, pour la valeur moyenne de la parallaxe solaire :

Par les observations d'entrée....................	$8'',845$
Par les observations de sortie..................	$8,846$
Moyenne....................	$8,8455$

L'accord des deux résultats, obtenus indépendamment l'un de l'autre et par une méthode que l'on doit regarder comme correcte, est remarquable.

Neison (*E.*). — Note sur quelques termes à longue période dans le mouvement de Mars. (457-460).

Adams (*J.-C.*). — Note sur une propriété remarquable de l'expression analytique de l'inverse du rayon vecteur de la Lune. (460-472).

Christie (*W.-H.-M.*). — Sur l'existence de lignes brillantes dans le spectre de la lumière solaire. (472-474).

M. Christie pense que les lignes brillantes qui se montrent au voisinage de G, et que M. Draper assimile à des lignes brillantes de l'oxygène, ne sont autre chose que le fond brillant du spectre continu du Soleil.

Marth (*A.*). — Éphéméride du satellite de Neptune, d'août 1878 à février 1879. (475-476).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur la duplicité du Compagnon de Rigel. (476-478).

En février et mars 1878, le Compagnon de Rigel lui a plusieurs fois paru double dans l'équatorial de 18 $\frac{1}{2}$ pouces anglais de Dearborn.

Burnham (*S.-W.*). — Liste de quelques nouvelles étoiles doubles. (478).

Safford (*T.-H.*). — Sur la position de λ Petite Ourse. (479-484).

Marth (*A.*). — Note sur les observations du satellite de Mars, par M. Erck. (485-486).

Harkness (*W.*). — Sur la mesure de l'inégalité des tourillons d'un instrument méridien par le sphéromètre. (487-493).

Airy (*G.-B.*). — Résultats obtenus, au moyen du spectroscope de Greenwich, relativement au mouvement des étoiles dans la direction de la ligne de visée. (493-508).

Les observations faites par MM. Mandauer et Christie se rapportent à vingt-cinq étoiles et embrassent la période d'août 1877 à mai 1878.

Tupman (*G.-L.*). — Note sur les photographies du passage de Vénus. (508-513).

La mesure des plaques daguerriennes a présenté à MM. Burton et Tupman les plus grandes difficultés, à cause de l'incertitude des bords du Soleil ou de la pla-

nète dans des images d'environ 6 centimètres de diamètre. En fait, ces observations conduisent, pour la parallaxe, au nombre inadmissible de 8″,2 environ.

Downing (*A.-W.*). — Sur le mouvement propre de quelques étoiles du Seven-Year Catalogue de Greenwich. (513-524).

L'auteur a déterminé les mouvements propres de 176 des étoiles de ce Catalogue.

Watson. — Lettre relative à la découverte de la planète Vulcain. (525-526).

Safford (*T.-H.*). — Note sur le mouvement propre de 5 Serpent. (527-528).

PROCEEDINGS OF THE ROYAL IRISH ACADEMY. 2e Série (1).

Tome II; 1875-1876.

Young (*J.-R.*). — Sur quelques formules générales pour la résolution des équations algébriques du troisième degré, etc. (26-39).

Cas où l'équation complète du troisième degré se résout au moyen d'un seul radical cubique. Discussion des racines.

Casey (*J.*). — Sur l'équation aux carrés des différences d'une équation biquadratique. (40-41).

Burton (*Ch.-E.*). — Sur un spectroscope de la forme binoculaire pour l'observation des spectres de peu d'éclat. (42-44).

Burton (*Ch.-E.*). — Note sur le spectre, la polarisation et la forme de la lumière zodiacale, d'après les observations des années 1874 et 1875. (218-224).

Robinson (Rev. *T.-R.*). — Sur la théorie de l'anémomètre à coupe et sur la détermination de ses constantes. (427-442).

Kinahan (*G.-H.*). — Le pouvoir entraînant des courants de marée, comparé à celui des vagues formées par le vent. (443-456).

---

(1) Voir *Bulletin*, I, 309; VII, 181.

Ball (*R.-St.*). — Sur une démonstration élémentaire des équations du mouvement, de Lagrange, en coordonnées quelconques. (463-464).

Soient V l'énergie potentielle d'un système dynamique, T l'énergie cinétique, q une des n coordonnées généralisées qui déterminent la position du système. Si le système reçoit un déplacement δq, la particule $m(x,y,z)$ recevra un déplacement dont les composantes seront

$$\frac{\partial x}{\partial q}\delta q,\quad \frac{\partial y}{\partial q}\delta q,\quad \frac{\partial z}{\partial q}\delta q.$$

Les forces agissant sur m sont mx'', my'', mz''; donc, la quantité de travail produite pendant que le déplacement δq s'opère sera

$$\Sigma m\,\delta q\left(\frac{\partial x}{\partial q}x'' + \frac{\partial y}{\partial q}y'' + \frac{\partial z}{\partial q}z''\right).$$

L'énergie potentielle du système est donc diminuée de cette quantité, d'où

$$-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q} = \Sigma m\left(\frac{\partial x}{\partial q}x'' + \frac{\partial y}{\partial q}y'' + \frac{\partial z}{\partial q}z''\right).$$

On a aussi

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

d'où

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = \Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q} + y'\frac{\partial y'}{\partial q} + z'\frac{\partial z'}{\partial q}\right).$$

Supposons que les autres coordonnées généralisées soient $r, s, \ldots$; nous aurons

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q}q' + \frac{\partial x}{\partial r}r' + \frac{\partial x}{\partial s}s' + \ldots,$$

d'où

$$\frac{\partial x'}{\partial q'} = \frac{\partial x}{\partial q}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = \Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'} + \ldots\right) = \Sigma m\left(x'\frac{\partial x}{\partial q} + y'\frac{\partial y}{\partial q} + z'\frac{\partial z}{\partial q}\right),$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{d\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'}}{dt} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q}.$$

On démontrera de même les $n-1$ autres équations analogues.

Dreyer (*John-L.-E.*). — Sur les erreurs personnelles dans les observations astronomiques des passages. (484-528).

Parmi les erreurs *personnelles* dont sont affectées les observations astronomiques, celles qui se reproduisent le plus fréquemment sont les erreurs sur les observations

des passages. L'auteur examine, dans ce Mémoire, les faits qu'il a lui-même observés, et tous ceux qu'il a rencontrés dans les divers recueils astronomiques.

Young (*J.-R.*). — Sur une certaine relation entre l'expression quadratique $Q^2 - 3PP'$ et le produit des carrés des différences des racines d'une équation cubique. (744-753).

En posant $P = x^3 + px + q$, Q et P' désignent les quantités $\frac{dP}{dx}$ et $\frac{1}{2}\frac{d^2P}{dx^2}$, d'où $Q^2 - 3PP' = -3px^2 - 9qx + p^2$. Le produit des carrés des racines de l'équation cubique est égal à $-\frac{1}{3}(r_1 - r_2)^2$, r_1 et r_2 étant les racines de l'équation $Q^2 - 3PP' = 0$.

The TRANSACTIONS of the Royal Irish Academy. Dublin ([1]).

Tome XXV (suite); 1874-1875.

Malet (*John C.*). — Quelques théorèmes, sur la réduction des intégrales hyperelliptiques. (279-294).

Réduction de certaines de ces intégrales aux intégrales elliptiques.

Ball (*R.-St.*). — Coordonnées de vis et leurs applications à des problèmes de la Dynamique des corps rigides. (295-327).

Voir, pour la terminologie, *Bulletin*, VII, 174 et 176.

I. *Sur la nature des coordonnées de vis.* — 1. Introduction. — 2. Notation. — 3. Sur la méthode cinématique pour déterminer la position d'une vis quand on donne ses coordonnées. — 4. Lemme. — 5. Sur une équation identique, qui est vérifiée par les coordonnées d'une vis. — 6. Décomposition d'un dyname $H\alpha$ en ses constituants autour des six vis fondamentales. — 7. Calcul des coordonnées d'une vis, quand sa position est donnée. — 8. Expression du coefficient virtuel entre un couple de vis au moyen de leurs coordonnées. — 9. Vis réciproques. — 10. *Pitch.* — 11. Interprétation d'une équation linéaire en coordonnées de vis. — 12. Expression du *sextant* au moyen des coordonnées des six vis. — 13. Construction de la vis unique réciproque de cinq vis données. — 14. Coordonnées de la vis réciproque de cinq vis données. — 15. Condition pour que $m+1$ vis forment un complexe de vis. — 16. Sur la simplification de la fonction d'ordre m par un choix convenable des vis fondamentales. — 17. Sur certaines formules identiques, liées avec un système coréciproque. — 18. Cosinus de l'angle entre deux vis, exprimé en fonction de leurs coordonnées. — 19. Coordonnées d'une vis sur un cylindroïde. — 20. Sur les coefficients virtuels entre les vis sur un cylindroïde et une autre vis quelconque. — 21. Lieu d'une vis qui a un coefficient virtuel constant avec une

---

([1]) Voir *Bulletin*, I, 306; VII, 174.

vis donnée. — 22. Méthode pour exprimer les coordonnées d'une vis appartenant à un complexe de vis. — 23. Sur le coefficient virtuel entre une vis donnée et chacune des vis d'un complexe de vis.

II. *Application des coordonnées de vis à l'étude de l'effet d'une impulsion sur un corps rigide, libre ou non.* — 24. Introduction. — 25. Liaison entre la vis d'impulsion et la vis instantanée correspondante. — 26. Énergie cinétique, acquise par l'impulsion $\ddot{\mathrm{H}}\bar{\eta}$. — 27. Si $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont deux vis d'impulsion et α et β les deux vis instantanées correspondantes, alors, quand $\bar{\alpha}$ est réciproque de β, $\bar{\beta}$ est réciproque de α. — 28. Expression générale de l'énergie cinétique d'un corps. — 29. Les dérivées partielles du *pitch* d'une vis par rapport aux coordonnées sont proportionnelles aux coordonnées de la vis d'impulsion correspondante. — 30. Un degré de liberté. — 31. Condition pour que l'un quelconque de deux *wrenches* d'impulsion soit capable de produire le même effet sur un corps ayant *un* degré de liberté. — 32. Étant donné le *wrench* d'impulsion $\ddot{\mathrm{H}}\eta$, déterminer $\mathrm{H}\alpha$ quand le corps est astreint à pivoter (*twist*) autour de α. — 33. Expression de la différence entre l'énergie cinétique qu'aurait acquise un corps, s'il eût été libre, par suite du *wrench* d'impulsion $\ddot{\mathrm{H}}\eta$, et l'énergie qu'il acquiert lorsqu'il est obligé de pivoter autour de α. — 34. Lieu de α si l'énergie cinétique est constante. — 35. Si un *wrench* $\ddot{\mathrm{H}}\eta$ agit sur un corps libre seulement de pivoter autour de α, trouver la réaction initiale $\ddot{\mathrm{H}}\rho$ sur les liaisons. — 36. Sur l'ellipse d'égale énergie cinétique dans le plan principal du cylindroïde. — 37. Étant donnée la vis η, trouver le $\ddot{\mathrm{H}}\eta$ qui, agissant pendant un temps très-court t, communiquera une unité d'énergie cinétique à un corps assujetti à pivoter autour de la vis λ sur le cylindroïde $\overline{\alpha\beta}$. — 38. Calcul des coordonnées des trois vis principales d'inertie d'un corps ayant trois degrés de liberté. — 39. Calcul de l'ellipsoïde d'égale énergie cinétique. — 40. Le plan réciproque. — 41. Énergie cinétique acquise par une impulsion. — 42. Application de la théorie des vis d'énergie cinétique conjuguées. — 43. Sur la réaction des liaisons. — 44. Détermination de la vis d'impulsion, la vis instantanée étant connue. — 45. Un *wrench* d'impulsion agit autour d'une vis ρ sur un corps ayant cinq degrés de liberté : trouver la vis instantanée. — 46. Un corps rigide ayant cinq degrés de liberté, calculer les cinq vis principales d'inertie. — 48. Sur la théorie générale du complexe de vis du $m^{\text{ième}}$ ordre et du second degré. — 47. Détermination géométrique de la relation entre la vis d'impulsion et la vis instantanée pour tous les ordres de liberté.

Malet (*John-C.*). — Sur certaines fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique. (337-342).

Jellett (Rev. *J.-H.*).— Recherches d'Optique chimique. (371-560).

Doberck (*W.*). — Sur la première comète de 1845. (459-480).

Calcul de l'orbite définitive de cette comète.

Doberck (*W.*). — Sur μ^2 du Bouvier, considéré comme une étoile double à révolution. (481-490).

Détermination de l'orbite de cette étoile, découverte en 1781 par Herschel et composée de deux étoiles très-voisines l'une de l'autre. Le temps de sa révolution est de 290 ans environ.

Hart (*A.-S.*). — Sur le contact du huitième ordre des courbes cubiques. (559-565).

« Outre les points doubles ou nœuds, il y a, comme on sait, sur les courbes cubiques, d'autres points singuliers où la courbe a un contact de l'ordre le plus élevé avec d'autres lignes; parmi ces points, les plus connus sont les neuf points (réels ou imaginaires) d'inflexion, auxquels la courbe a un contact du second ordre avec des lignes droites. Outre cela, il y a les vingt-sept points de contact des tangentes menées des points d'inflexion, pour lesquels la courbe a un contact du cinquième ordre avec des coniques, et soixante-douze autres points en chacun desquels elle a un contact du huitième ordre avec une infinité d'autres cubiques.

» Ces derniers points ont été discutés par M. Salmon dans un Mémoire lu à la Société Royale le 17 juin 1858, et dans lequel ce géomètre a non-seulement déterminé le nombre de ces points, mais encore a donné sous une forme simple l'équation dont ils dépendent.

» M. Hart donne, dans ce Mémoire, la solution complète de cette équation, ainsi que sa forme générale exprimée au moyen des invariants et des covariants de la cubique ».

Doberck (*W.*). — Sur les étoiles binaire σ Couronne, Ophiuchus, γ Lion, ζ Verseau, 36 Andromède et ι Lion. (581-603).

Détermination des orbites de ces étoiles.

Tome XXVI; 1876-1878.

Doberck (*W.*). — Mémoire sur les étoiles doubles : 44 du Bouvier, η de Cassiopée et μ du Dragon. (1-30).

L'étoile double 44 du Bouvier a été mesurée pour la première fois, en 1781, par W. Herschel; depuis, elle a fait l'objet des observations de J. Herschel, Dawes, Struve, Dembowski, Dunér, etc. Maedler a, le premier, publié, en 1855, les éléments de son orbite. Les calculs de M. Doberck portent sur l'ensemble des observations de 1781 à 1876. L'ephéméride, déduite des éléments auxquels il arrive, s'accorde fort bien avec l'observation. La période est de 261 ans.

Pour η de Cassiopée, qui est aussi une découverte de W. Herschel, la période à laquelle arrive l'astronome de Markree, par la considération de l'ensemble des mesures, est de 222 ans.

Pour μ du Dragon, les distances et les angles de position se représentent correctement par des formules linéaires ou paraboliques du second degré, et il n'y a pas lieu de rechercher une orbite.

Doberck (*W.*). — Mémoire sur ω du Lion, considéré comme une étoile double. (165-186).

L'extrême voisinage des deux composantes de ω du Lion en fait une des étoiles du ciel les plus difficiles à observer; aussi des mesures de cet astre n'ont guère été faites que par W. Herschel, Dawes, W. et O. Struve, Maedler, Winnecke, Secchi, Dembowski et Dunér. Par la même raison aussi, c'est une des étoiles dont les ob-

servations sont le plus discordantes et dont l'orbite est le plus difficile à déterminer. De 1855 à 1871, M. Klinkerfues a fait du calcul de cette orbite l'objet de trois importants Mémoires. Dans le Mémoire actuel, M. Doberck a utilisé l'ensemble des observations obtenues de 1782 à 1876, et il est arrivé à des éléments qui, avec une période de $110^{ans},82$, représentent très-correctement l'ensemble des positions relatives du Compagnon.

Birmingham (*J.*). — Observations et Catalogues d'étoiles rouges. (249-354).

Le premier Catalogue d'étoiles rouges qui ait été mis à la disposition des astronomes est celui de Schjellerup, publié en 1866 dans les *Astronomische Nachrichten* et réimprimé, avec d'assez nombreuses additions, dans le Tome IX du *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.* J.-F.-J. Schmidt et puis d'Arrest ont ensuite ajouté quelques étoiles à la liste précédente, et, enfin, le R. P. Secchi a indiqué, dans son *Prodromo di un catalogo delle stelle rosse* (Mémoires des Spectroscopistes italiens, t. V), un grand nombre d'étoiles qui, par leur couleur et par leurs spectres, appartiennent au type des étoiles rouges.

L'intérêt qui s'attache à ces étoiles rouges, si remarquables par leur spectre et par la variabilité d'un grand nombre d'entre elles, a engagé M. Birmingham à examiner de nouveau le ciel au point de vue de la découverte des étoiles de cette coloration, et à réunir dans une liste unique les étoiles rouges reconnues par ses devanciers ou signalées par lui-même.

Le Catalogue d'étoiles rouges de M. Birmingham renferme 658 étoiles, dont la position est donnée pour 1880,0, et dont la synonymie avec les Catalogues de Schjellerup ou de Schmidt est soigneusement indiquée.

Le Catalogue proprement dit est suivi, et ce n'est pas la partie la moins précieuse du Mémoire du savant astronome, de Notes sur celles de ces étoiles dont le spectre a été décrit par les physiciens qui explorent le ciel au point de vue de la constitution physique des astres. Ces Notes, éparses dans des Recueils qu'il n'est pas toujours aisé de se procurer, sont réunies ici pour la première fois, et de leur rapprochement naissent des contradictions dont l'explication n'est point encore connue.

Dreyer (*J.-L.-E.*). — Supplément au Catalogue général de nébuleuses et d'amas d'étoiles de Herschel. (381-426).

Depuis que, en 1864, sir J. Herschel a publié dans les *Transactions philosophiques* son Catalogue général des nébuleuses, un grand nombre d'astres de cette espèce ont été découverts par d'Arrest, Schönfeld, Schultz, Marth, Vogel, Rümker, Stephan, et quelques erreurs ont été signalées dans le Mémoire du savant astronome anglais. Ce sont ces corrections et additions que M. Dreyer publie aujourd'hui d'une manière systématique.

Son Mémoire renferme donc deux Parties : 1° ce qu'on peut appeler un *errata;* 2° une liste de nouvelles nébuleuses.

Ces dernières sont au nombre de 1165, ce qui porte à 6245 le nombre de ces astres dont la position est aujourd'hui connue. Les positions des nébuleuses sont données pour 1860, et chacune d'elles se trouve décrite par quelques mots qui permettent de s'assurer de son identité.

Burton (*C.-E.*). — Notes sur l'aspect de Mars pendant les oppositions de 1871 et 1873. (427-430).

M. Burton donne 16 dessins fort soignés de la planète.

Malet (*John-C.*). — Démonstration directe des propriétés de la première podaire négative d'une conique à centre par rapport à un point quelconque du plan. (431-447).

Hart (*Andrew-Searle*). — Sur les intersections des courbes planes du troisième ordre. (449-452).

Construction du neuvième point d'intersection des courbes du troisième ordre passant par huit points donnés, par une méthode qui dispense de la construction effective d'une de ces courbes.

Malet (*J.-C.*). — Sur une démonstration du théorème que toute équation algébrique a une racine. (453-455).

L'auteur part de la proposition, facile à démontrer, que toute équation de degré impair, à coefficients réels, a une racine.

Malet (*J.-C.*). — Sur une certaine surface dérivée d'une quadrique. (456-464).

Lieu du centre d'une sphère variable, coupant orthogonalement une sphère fixe et tangente à une quadrique donnée.

Lloyd (*H.*). — Essai pour déduire la loi générale de la variation de la température à la surface de la Terre des variations des radiations solaires et terrestres. (465-474).

Le problème a été traité par Poisson dans sa *Théorie mathématique de la chaleur;* M. Lloyd le résout d'une manière plus complète en tenant compte de la chaleur émanée du Soleil, qui éprouve dans l'atmosphère une diminution proportionnelle à la longueur de son trajet dans l'air, et de la chaleur rayonnée par la Terre.

G. R.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT ([1]).

Tome LXXXIII; 1877.

Weingarten (*J.*). — Sur la condition nécessaire pour qu'une famille de surfaces appartienne à un système de surfaces orthogonales. (1-12).

([1]) Voir *Bulletin*, I, 24; III, 138, 238, 258, 367; IV, 87, 233; V, 283; VI, 188; VII, 223, 248; VIII, 17; IX, 176; XI, 27; II_2, 42.

« On sait que M. Bouquet a le premier remarqué (*Journal de Liouville*, t. XI) que, étant donné un faisceau quelconque de surfaces $\rho = f(x, y, z)$, on ne peut pas en général établir deux autres faisceaux qui composent, avec le faisceau donné, un système de surfaces se coupant à angles droits. Il a encore montré que la condition de l'existence de ces deux nouveaux faisceaux revient à une certaine équation différentielle pour le paramètre ρ, équation qu'il a aussi développée pour le cas $\rho = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(z)$; cependant il a renoncé à la déduire en toute généralité parce que le calcul lui semblait être trop compliqué. Après cette remarque, suivent les belles recherches de M. Serret, et, plus tard, celles de M. Bonnet, sur les systèmes de surfaces orthogonales; mais l'équation différentielle ne s'en trouva pas devenue plus accessible. Enfin, lorsque, dans un excellent Mémoire (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XVI, 1870), M. Lévy eut découvert une condition géométrique nécessaire et suffisante pour l'existence de ces systèmes de surfaces orthogonales, ce fut M. Cayley qui réussit à établir (*Comptes rendus*, t. LXXIV) l'équation différentielle demandée, qui est du troisième ordre, mais il la donna dans une forme très-compliquée, et M. Darboux, qui a beaucoup enrichi la théorie des surfaces en question, en simplifia encore le développement. Finalement, M. Schläfli a dressé la même équation différentielle dans une forme non développée (*Journal de Crelle*, t. 76).

» C'est pourquoi il semble que la question sur la condition nécessaire pour qu'une famille de surfaces appartienne à un système de surfaces orthogonales n'ait pas encore trouvé une réponse présentant le degré de simplicité dont elle est susceptible. Les développements qui suivent tendent à la donner. »

Fuchs (*L.*). — Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. (13-37).

Dans ce Mémoire, M. Fuchs considère le module k des fonctions elliptiques comme variable indépendante, et il définit les quantités K et K′ comme des fonctions de cette variable au moyen de l'équation différentielle à laquelle elles satisfont. Soient K et K′ des valeurs déterminées de ces fonctions pour une valeur donnée de k : leurs valeurs, qui correspondent aux chemins de la variable indépendante, menant au même point k, ont respectivement les formes $a_1 K + b_1 K'$, $a_2 K + b_2 K'$, où a_1, b_1, a_2, b_2 sont des nombres indépendants de k. Ces nombres sont déterminés, et, ensuite, M. Fuchs démontre que la partie réelle du quotient $H = \frac{a_2 K + b_2 K'}{a_1 K + b_1 K'}$ est ou nulle ou negative, théorème d'où résulte le théorème connu qui dit que la partie réelle du quotient des deux intégrales définies K′ et K est positive.

Si l'on considère ensuite, dans l'équation $q = e^{-\pi H}$, q comme variable indépendante, la fonction k^2 de q, qui en résulte par l'inversion, se trouve être, de même que K, une fonction holomorphe dans l'intérieur d'un cercle $\mathfrak{K}$, décrit autour du point $q = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. De plus, lorsque q décrit un chemin quelconque dans l'intérieur de $\mathfrak{K}$, partant du centre et aboutissant à un point quelconque de la périphérie, la fonction k^2 partant du point $k = 0$ doit aboutir à l'un des points $k = 1$, $k = \infty$. Il s'ensuit que chaque point de la circonférence de $\mathfrak{K}$ est un point de discontinuité de la fonction k^2 de q. Voilà la cause

de la propriété déjà signalée de cette fonction, de ne point permettre d'extension continuelle au delà de cette périphérie.

En second lieu, l'auteur considère les périodes de l'intégrale elliptique de seconde espèce J et J' comme fonctions de la variable indépendante k, en les définissant par une équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle elles satisfont. Les valeurs diverses de J et J', qui correspondent aux chemins divers de la variable indépendante, menant au même point k, ont respectivement les formes $\alpha_1 J + \beta_1 J'$, $\alpha_2 J + \beta_2 J'$, où $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sont des nombres indépendants de k. Après la détermination de ces nombres, vient l'étude du quotient $Z = \frac{\alpha_1 J + \beta_1 J'}{\alpha_2 J + \beta_2 J'}$.

Si l'on envisage encore, dans l'équation $s = e^{-\pi Z}$, s comme variable indépendante, la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s, qui en résulte par inversion, est aussi holomorphe dans l'intérieur d'un cercle L, décrit autour du point $s = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité. Mais on trouve une différence essentielle entre la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s et la fonction k^2 de q dont nous avons parlé plus haut : c'est que les valeurs de k, correspondant aux points de l'intérieur de L, n'épuisent pas tous les points du plan de k ; au contraire, la fonction $\frac{1-k^2}{k^2}$ de s permet une extension continuelle au delà de la périphérie de L, de telle manière que, dans l'extérieur de L, elle est aussi holomorphe pour toute valeur finie de q. Enfin, la recherche même éclaircit pourquoi c'est $\frac{J}{J'}$ et non $\frac{J'}{J}$ qui joue le rôle analogue à $\frac{K'}{K}$.

Holzmüller. — Sur la représentation $x + yi = \sqrt[n]{X + Yi}$ et sur les coordonnées lemniscatéennes. (38-42).

Netto. — Démonstrations et théorèmes sur les groupes transitifs. (43-56).

Grassmann (*Hermann*). — Contribution à l'Électrodynamique. (57-64).

L'auteur, décédé depuis, de cette Note a déjà établi en 1845 une loi sur l'action mutuelle de deux éléments de courants électriques, loi différente de celle d'Ampère; cette loi de Grassmann est identique à la loi développée par M. Clausius (t. LXXXII du même *Journal*). C'est ce que l'auteur de la Note démontre, et M. Clausius lui-même reconnaît franchement la priorité de la découverte de Grassmann dans une Note publiée p. 262 du même Tome; il y explique aussi comment un Rapport des *Fortschritte der Physik*, où la formule principale se trouve affectée d'une faute, l'avait déterminé à ne plus relire le Mémoire original de Grassmann dans les *Annales de Poggendorff*.

Franke. — Sur l'expression qui, au cas de racines égales, tient lieu de la fonction alternée de Vandermonde. (65-71).

Caspary (*F.*). — Remarque sur l'équation dont dépend la détermination des normales à une surface du second ordre. (72-75).

La Note se rapporte à une proposition erronée de Clebsch (t. LXII, p. 70) et de

M. Caspary lui-même (t. LXXXI, p. 150), et relative à la surface des centres de courbure pour une surface du second ordre. Dans un certain cas, l'égalité de deux racines de l'équation mentionnée avait été mal interprétée par ces géomètres. M. August attira l'attention de M. Caspary sur ce point, et celui-ci découvrit aussitôt la source de l'erreur. Voici le théorème corrigé : « Quand on excepte les plans principaux des surfaces du second ordre, les racines coïncidentes de l'équation qui détermine les normales fourniront aussi des normales coïncidentes. Un point quelconque d'un plan principal admet tout au contraire six normales distinctes ; quatre de ces normales sont situées dans ce plan même, tandis que les deux autres sortent du plan et ont la même longueur et une position symétrique par rapport à lui. »

Hunyady (*E.*). — Sur les formes différentes de l'équation de condition qui exprime que six points sont situés sur une section conique. (76-85).

L'auteur montre que : 1° le problème de Pappus, 2° le théorème de Desargues, 3° le théorème de Newton et le théorème de Chasles sur le rapport anharmonique des points d'une conique, 4° les théorèmes de Pascal, de Maclaurin et de Braikenridge, 5° le théorème de Carnot, s'expriment par des équations analytiques qui se prêtent à des transformations algébriques les unes dans les autres.

Netto (*E.*). — Nouvelle démonstration pour l'impossibilité de résoudre les équations des degrés supérieurs au quatrième. (86-88).

Thomé (*L.-W.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires (suite du t. LXXXI). (89-170).

Dans ce Mémoire, M. Thomé publie la suite de ses recherches sur les équations différentielles linéaires (voir *Bulletin*, t. XI, p. 36), et, en particulier, sur celles à coefficients rationnels.

Si une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels a, en chaque point, un indice caractéristique égal à zéro, elle possède la forme

$$(1)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + \frac{\psi_1}{\varphi}\frac{d^{m-1}\bar{y}}{dx^{m-1}} + \frac{\psi_2}{\varphi^2}\frac{d^{m-2}\bar{y}}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{\psi_m}{\varphi^m}\bar{y} = \bar{F}_m(\bar{y}, x) = 0,$$

où $\varphi = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$, et $\psi_a(x) =$ une fonction entière rationnelle de degré égal ou inférieur à $a(k-1)$. Une équation différentielle comme celle-ci n'a que des intégrales régulières (voir *Bulletin*, t. IV, p. 237); voilà pourquoi M. Thomé appelle l'expression $\bar{F}_m(\bar{y}, x)$ *expression différentielle régulière*. De plus, l'expression différentielle $e^w \bar{F}_m(ye^{-w}, x) = F_m(\bar{y}, x)$, où w est une fonction rationnelle, $F_m(\bar{y}, x)$ une expression différentielle régulière, a des coefficients rationnels, et est nommée par M. Thomé *expression différentielle normale;* enfin le facteur e^w reçoit le nom de *facteur déterminant* de l'expression différentielle normale.

Cela étant, qu'on construise l'expression différentielle

$$(2)\quad f_{a_0}(y,x)=y_1,\ f_{a_1}(y_1,x)=y_2,\ \ldots,\ f_{a_l}(y,x)=s,\ F_{m-a_0-\ldots-a_l}(s,x)=F_m(y,x),$$

où $f_{a_k}(k=0,1,\ldots,l)$ désigne une expression différentielle normale d'ordre a_k.

$F_{m-a_0-\ldots-a_l}(s, x)$ une expression différentielle linéaire et homogène d'ordre $m - a_0 - \ldots - a_l$, à coefficients rationnels; enfin $m - a_0 - \ldots - a_l$ est ou égal à zéro ou supérieur à zéro, et, dans ce dernier cas, $F_{m-a_0-\ldots-a_l}(s, x)$ ne peut pas être mise sous une des formes $\Phi_p(s, x) = s_1$, $\Psi_q(s_1, x)$, Φ_p, Ψ_q étant des expressions différentielles homogènes et linéaires à coefficients rationnels, et encore Φ_p une expression normale. Une expression de la forme (2) est appelée par M. Thomé *système d'expressions différentielles homogènes et linéaires*.

Après cela, l'auteur développe des méthodes générales pour rechercher si une expression différentielle linéaire $F_m(y, x)$ à coefficients rationnels peut être représentée sous une forme telle que la forme (2), et quelles sont ces représentations. Puis il compare les différentes formes de représentation de cette sorte les unes aux autres, et il fait l'étude des intégrales de l'équation différentielle $F_m(y, x) = 0$, F_m étant supposé posséder la forme (2) dans le voisinage des points singuliers. Parmi ces équations différentielles il faut signaler celles qui contiennent les intégrales réunies des équations différentielles où des expressions normales sont égalées à zéro. C'est à celles-ci qu'appartient, comme cas spécial, l'équation différentielle à coefficients constants.

Gundelfinger (*S.*). — Sur le problème des polygones inscrits et circonscrits à deux sections coniques. (171-174).

Frobenius et *Stickelberger*. — Contribution à la théorie des fonctions elliptiques. (175-183).

« La formule remarquable communiquée par M. Hermite dans une Note nouvellement publiée (t. LXXXII, p. 343) nous a déterminés à signaler la connexion qu'il y a entre quelques formules semblables. »

La Communication a pour objet le développement de quelques déterminants dont les éléments se composent de la transcendante $\sigma(u)$ ou de la fonction elliptique $\wp(u)$, et qui se prêtent à des transformations élégantes en produits de fonctions σ (d'après la notation de M. Weierstrass).

Mertens (*F.*). — Sur le tétraèdre maximum dont les faces ont des aires données. (80-83).

Aron (*H.*). — Sur un théorème relatif à l'équilibre élastique. (184).

« Dans tous les problèmes relatifs à l'équilibre élastique de corps homogènes isotropes libres, les forces de tension ne dépendent que d'une constante θ de l'élasticité. »

Hamburger. — Sur un principe qui sert à représenter la marche des fonctions multiformes d'une variable complexe, surtout des intégrales d'équations différentielles linéaires dans le voisinage de points singuliers. (185-209).

«.... M. Fuchs a établi, il y a peu de temps, une méthode générale pour effectuer la continuation d'une fonction à partir d'un point x_0 jusqu'à un autre x_1, sans qu'on eût besoin de calculer les valeurs de la fonction pour les points interme-

diaires, quand on connaît la marche de la fonction dans le voisinage des points singuliers. Nous nous sommes proposé de montrer qu'on peut encore toujours découvrir la marche de la fonction dans le voisinage de points singuliers, pourvu que l'on connaisse :

» 1° La position des points singuliers dans le plan de x;

» 2° Les valeurs de la fonction et de toutes ses dérivées dans un point du voisinage du point singulier en question.

» Ces deux suppositions se trouvent être satisfaites par les fonctions définies par des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque et dont les coefficients sont des fonctions de x uniformes ou multiformes ; de plus, les points singuliers des fonctions intégrales sont, outre le point à l'infini, les points de discontinuité et de ramification des coefficients de l'équation différentielle, si la plus haute dérivée a l'unité pour coefficient. Mais les fonctions qui satisfont à des équations différentielles de degré supérieur au premier, quoique vérifiant la seconde supposition, ne satisfont pas la première; car la position de leurs points singuliers résulte, d'après une loi inconnue, *a priori*, des constantes contenues dans les intégrales générales. »

Cayley (*A.*). — Sur les doubles fonctions θ, en connexion avec une surface du quatrième ordre à seize points singuliers. (210-219).

Cayley (*A.*). — Suite des recherches sur les doubles fonctions θ. (220-233).

M. Cayley appelle *doubles fonctions* θ celles des fonctions θ qui dépendent de deux arguments u et u'.

Borchardt (*C.-W.*). — Sur la représentation de la surface kummérienne du quatrième ordre au moyen de la relation biquadratique de Göpel entre quatre fonctions ϑ à deux variables. (234-244).

«... La relation de Göpel est identique avec celle qui a été obtenue par M. Cayley, dans le premier de ses deux Mémoires (p. 215 de ce Tome), à l'aide de considérations géométriques, lorsqu'il détermina la surface du quatrième ordre à seize points nodaux dont les singularités correspondent aux relations entre les carrés des seize fonctions ϑ. Mais sa recherche ne lui a pas montré que les variables de son équation sont des fonctions ϑ, et que les constantes en sont les zéros de ces fonctions ϑ; de plus, elle l'a laissé en doute si l'équation obtenue représente une surface du quatrième ordre jouissant de la même généralité que celle recherchée et définie par M. Kummer dans plusieurs équations. Pour lever ce doute j'indiquerai, dans ce qui suit, la transformation linéaire par laquelle l'une des formes des équations de M. Kummer se change en celle de Göpel.... »

Malmsten (*C.-J.*). — Sur un théorème de la théorie des rentes viagères. (245-250).

Prym (*F.-E.*). — Démonstration d'un théorème de Riemann. (251-263).

Voici le théorème dont il s'agit : « Que la surface T_z à n feuilles représente la ramification de la fonction algébrique s de z, définie comme racine de l'équation irréductible $F\binom{n\ \ m}{s,\ z} = 0$; alors toute fonction rationnelle $\rho(z, s)$ de z et s, qui, en vertu de sa définition même, peut toujours se mettre sous la forme

$$\Sigma a_{k\lambda} z^k s^\lambda : \Sigma b_{k\lambda} z^k s^\lambda$$

($k = 0, 1, 2, \ldots, k$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l$, a et b étant des constantes qui peuvent aussi s'évanouir en partie), sera une fonction uniforme dans la surface T_z de la variable complexe z ; elle ne possédera que pour un nombre fini de points de la surface des discontinuités de la première espèce, et, en outre, elle restera continue. Réciproquement, toute fonction σ de la variable complexe z, uniforme dans la surface T_z, et qui ne possède que pour un nombre fini de points de la surface des discontinuités de la première espèce, mais qui reste partout ailleurs continue, peut être représentée par une expression de la forme $\Sigma a_{k\lambda} z^k s^\lambda : \Sigma_{k\lambda} z^k s^\lambda$, ou, ce qui revient à la même chose, elle est une fonction rationnelle de z et s. »

Clausius (*R.*). — Sur la loi de Grassmann concernant la force pondéromotrice. (262-263).

Prix proposé par la Société Jablonowski pour l'année 1878. (264).

Dedekind (*R.*). — Lettre à M. Borchardt sur la théorie des fonctions modulaires elliptiques. (265-292).

§ 1. — Nombres équivalents. — § 2. — Système complet de nombres représentants. — § 3. — La valence. — § 4. — Points de ramification. — § 5. — Équations différentielles. — § 6. — Les fonctions modulaires ellipliques. — § 7. — Transformation.

Newcomb (*Simon*). — Théorèmes élémentaires relatifs à la géométrie d'un espace de trois dimensions et de courbure uniforme positive dans la quatrième dimension. (293-299).

« Les théorèmes suivants se fondent sur les idées de Riemann, énoncées dans sa dissertation célèbre *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie*, quoiqu'ils puissent ne pas être entièrement d'accord avec ses remarques sur le résultat de sa théorie. Considérer le sujet sous le point de vue de la Géométrie élémentaire, au lieu de suivre la méthode analytique employée en général par les auteurs qui ont écrit sur la Géométrie non euclidéenne, c'est ce qui m'a paru ne pas être dépourvu d'intérêt. »

Schottky (*F.*). — Sur la représentation conforme de surfaces planes qui ont une liaison multiple. (300-351).

E. L.

SITZUNGSBERICHTE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU WIEN; Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe (¹).

Tome LXXII; juin-décembre 1875.

Stark (*J.-E.*). — Sur la détermination de l'orbite de la planète (100) Hécate. (13-43).

Mach (*E.*) et *Wosyka* (*J.*). — Sur quelques effets mécaniques de l'étincelle électrique. (44-52; 1 pl.).

Puluj (*J.*). — Contribution à la détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. (53-60).

Stefan (*J.*). — Recherches sur la conductibilité de la chaleur dans les gaz. Deuxième Mémoire : Déterminations relatives des pouvoirs conducteurs de différents gaz. (69-101).

Handl (*Al.*). — Nouvelles contributions à la théorie moléculaire. V. (102-114).

Mach (*E.*) et *Rosický* (*W.*). — Sur une nouvelle forme des expériences d'interférence de Fresnel et Arago avec la lumière polarisée. (197-212).

Dvořák (*V.*). — Sur l'attraction et la répulsion acoustiques. (213-244).

Puschl (*C.*). — Sur l'influence de la pression et de la traction sur les coefficients thermiques de dilatation des corps, et sur la manière dont se comportent dans ces circonstances l'eau et le caoutchouc. (245-256).

Finger (*Jos.*). — Sur la réaction élastique d'un fil d'acier tordu. (257-265).

Plank (*J.*). — Expériences sur la conductibilité thermique des masses gazeuses. (269-282).

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 114.

Puschl (*C.*). — Abaissement de la température du maximum de densité de l'eau par la pression. (283-286).

Allé (*M.*). — Contribution à la théorie des fonctions de trois variables. (289-311).

L'objet de ce travail est de donner à la théorie des fonctions de trois variables une base géométrique, comme on le fait habituellement pour les fonctions d'une et de deux variables, par l'introduction des courbes et des surfaces.

Mach (*E.*) et *Merten* (*J.*). — Remarques sur le changement de la vitesse de la lumière dans le quartz, produit par la pression. (315-328).

Gegenbauer (*L.*). — Sur quelques intégrales définies. (343-354).

Lippich (*F.*). — Sur la prétendue dépendance entre la longueur d'onde de la lumière et son intensité. (355-365).

Odstrčil (*J.*). — Quelques expériences sur les actions magnétiques des conducteurs matériels tournants. (389-396).

Boltzmann (*L.*). — Sur l'équilibre thermique des gaz soumis à l'action de forces extérieures. (427-457).

§ 1. Considération des gaz mono-atomiques. — § 2. Considération des gaz poly-atomiques. — Appendice. Sur le travail intérieur négatif.

Boltzmann (*L.*). — Remarques sur la conductibilité thermique des gaz. (458-470).

Boltzmann (*L.*). — Sur l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre. (471-483).

L'auteur expose sous une forme un peu différente la dernière méthode de Jacobi, de manière à faire mieux apercevoir l'essence de cette méthode, et les relations qui existent entre l'intégrale complète trouvée par Jacobi et les autres intégrales de l'équation différentielle.

Durège (*H.*). — Sur les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre avec trois points doubles. (495-518).

Tollinger (*J.*). — Sur les phénomènes calorifiques qui se produisent dans la dissolution de l'azotate d'ammoniaque dans l'eau, et leur appréciation dans l'emploi de ce sel pour les mélanges réfrigérants. (535-577; 2 pl.).

Winckler (*A.*). — Sur les déterminations approchées. (623-666).

Quoique les fonctions dont il s'agit puissent se calculer avec une approximation aussi grande qu'on voudra au moyen des séries infinies, il y a cependant beaucoup de cas où l'on doit préférer aux expressions rigoureuses de simples expressions approximatives, se présentant sous forme finie et fournissant, dans certains intervalles, une détermination très-exacte des grandeurs qu'elles déterminent. On trouve souvent à faire usage de semblables expressions dans les calculs numériques et dans les intégrations approchées, ainsi que dans les cas où il s'agit de trouver des valeurs entre lesquelles est comprise une quantité de grandeur inconnue. Outre leur utilité pratique, ces expressions offrent encore un intérêt théorique.

L'auteur examine successivement les formules approchées

$x = \sin x \sqrt[3]{\sec x}$ (formule de Maskelyne),

$x = \sin x \,\text{séc}\, \frac{x}{\sqrt{3}}$ (sujette à une erreur six fois moindre que la précédente),

$x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$ (attribuée au cardinal de Cusa),

etc., etc.

Exner (*K.*). — Sur les bandes d'interférence produites par deux surfaces troubles. (675-679).

Weyr (*Em.*). — Sur la représentation d'une courbe gauche rationnelle du quatrième ordre sur une section conique. (686-706).

Güntner (*C.*). — Sur l'utilisation de la chaleur solaire pour le chauffage à l'aide d'un nouveau réflecteur plan. (713-725; 1 pl.).

Pfaundler (*L.*). — Sur le thermomètre différentiel à air. (729-748, 2 pl.).

Becherhinn (*K.*). — Contributions à la connaissance de la nitroglycérine et de ses préparations les plus importantes. (759-770).

Jelinek (*C.*). — Sur les constantes des anéroïdes, et sur les anéroïdes à échelles de hauteur. (771-825).

Tome LXXIII; janvier-mai 1876.

Niemtschik (*R.*). — Sur la construction des surfaces enveloppes de sphères variables. (7-18; 3 pl.).

Allé (*M.*). — Sur les équations du mouvement d'un système de points. (25-46).

Puschl (*C.*). — Nouveaux théorèmes de la Théorie mécanique de la chaleur. (51-80, 345-365).

I. De la chaleur développée ou absorbée dans les variations de volume des corps. — II. Sur les forces qui déterminent le volume des corps.

Loschmidt (*J.*). — Sur l'état d'équilibre thermique d'un système de corps, en ayant égard à la pesanteur. (128-142, 366-372).

Second théorème de la Théorie mécanique de la chaleur. — Équilibre thermique des gaz. — Loi générale de la dépendance entre les températures et la hauteur.

Moshammer (*C.*). — Sur la Géométrie du mouvement hélicoïdal, et sur une surface réglée du troisième ordre. (143-168; 3 pl.).

Durège (*H.*). — Sur les discontinuités non polaires. (173-176).

L'auteur explique, en prenant pour exemple la fonction

$$\frac{e^{z}}{e - e^{\frac{1}{z}}},$$

la manière dont se comporte une fonction dans le voisinage d'un point présentant une discontinuité de cette espèce.

Ditscheiner (*L.*). — Sur les couleurs des lames cristallines minces. (180-199).

Weyr (*Em.*). — Nouvelles remarques sur la représentation d'une courbe gauche rationnelle sur une section conique. (203-220).

Suite du Mémoire inséré dans le volume précédent. (*Voir* ci-dessus, p. 230).

Pfaundler (*L.*). — Sur la nature de l'état d'agrégation mou ou semi-fluide; sur la recongélation et la recristallisation. (249-268).

Weyprecht (*K.*). — Principaux résultats des observations magnétiques faites pendant l'expédition polaire austro-hongroise. (313-331).

Pelz (*C.*). — Sur la détermination des axes des sections coniques. (379-432; 2 pl.).

Obermayer (*A. v.*). — Sur la dépendance entre le coefficient de frottement intérieur des gaz et la température. (433-474).

Frombeck (*H.*). — Les figures fondamentales de la Géométrie de la ligne. (475-515).

Šubic (*S.*). — Hygromètre-manomètre. (531-552).

Sterneck (*R. v.*). — De l'influence de la Lune sur la direction et l'intensité de la pesanteur sur la Terre. (553-570).

Puluj (*J.*). — Sur la dépendance entre le frottement des gaz et la température. (589-628; 1 pl.).

Rosický (*W.*). — Sur les effets mécanico-acoustiques de l'étincelle électrique. (629-650; 1 pl.).

Weyr (*Em.*). — Sur la relation projective entre les éléments singuliers d'une involution cubique. (654-656).

Lang (*V. v.*). — Sur la théorie de la double réfraction. (666-672).

Tome LXXIV; juin-décembre 1876.

Allé (*M.*). — Sur la théorie de la mesure de courbure de Gauss. (9-38).

Les développements suivants se rattachent aux considérations dont l'auteur a fait usage dans un Mémoire publié dans les *Sitzungsberichte*, t. LXXII (*voir* ci-dessus, p. 229) et contiennent d'abord une extension de la notion de l'indicatrice introduite par Dupin. On acquiert par là, tout en restant à un point de vue principalement géométrique, un nouveau moyen d'étendre la théorie de la mesure de la courbure de Gauss à des variétés d'un nombre quelconque de dimensions.

« L'objet de ce Mémoire se rattache étroitement au contenu d'un travail de Kronecker, publié dans les *Monatsberichte* de Berlin (5 août 1869), mais que nous n'avons connu qu'après avoir déjà arrêté le plan et l'exécution de notre travail. »

Stark (*J.-E.*). — Sur la détermination de l'orbite de la planète (100) Hécate. (85-119).

Ce travail, qui fait suite à un travail précédent (*voir* ci-dessus, p. 228), repose sur une révision complète du calcul des perturbations de la planète, produites par Jupiter et Saturne.

Gegenbauer (*L.*). — Sur les fonctions de Bessel. (124-130).

Moshammer (*K.*). — Sur la Géométrie des systèmes semblables, et sur une surface du troisième ordre. (131-147; 1 pl.).

Hočevar (*F.*). — Sur le calcul des valeurs de quelques intégrales définies. (155-170).

Igel (*B.*). — Sur quelques séries infinies élémentaires. (189-204).

Hann (*J.*). — Sur la mesure barométrique des hauteurs. (279-291).

Igel (*B.*). — Sur le discriminant du covariant de Jacobi de trois formes quadratiques ternaires. (355-370).

Frombeck (*H.*). — Remarques sur la théorie des coordonnées. (399-415).

I. Sur un certain groupe de déterminants géométriques : (A), le plan ; (B), déterminants sphériques ayant pour noyau $\Sigma \pm \cos a'a' \cos b'b' \cos c'c' = \sin^2 a'b'c'$; (C), les expressions de l'espace. — II. Des coordonnées radiales goniométriques.

Stefan (*J.*). — Sur la conductibilité thermique de la gomme dure. (438-462).

Boltzmann (*L.*). — Sur la formation et l'intégration des équations qui déterminent le mouvement moléculaire dans les gaz. (503-552).

L'auteur reprend, avec plus de rigueur, les démonstrations données dans un précédent Mémoire (*voir* ci-dessus, p. 229), et il confirme ainsi l'exactitude de ses premiers résultats.

Boltzmann (*L.*). — Sur la nature des molécules des gaz. (553-560).

Tome LXXV ; janvier-mai 1877.

Kunerth (*Ad.*). — Nouvelles méthodes pour la résolution en nombres entiers des équations quadratiques indéterminées. (7-58).

§ 1. De l'équation $x = \frac{Ap^2 + Bp + C}{ap^2 + bp + c}$. — §§ 2 et 3. De l'équation $ax = A + \frac{dq + f}{q^2 - g}$. — § 4. De l'équation $x^2 = gz^2 + 2rz - l + \frac{r^2 - m}{g}$. — § 5. Résolution des congruences de module composé. — §§ 6 et 7. Le problème de Pell. — §§ 8-10. Calcul de nouvelles valeurs des inconnues. — § 11. Résolution de quelques équations de la forme $y^2 = ax^2 + b$ pour des valeurs positives de a. — § 12. Résolution au moyen des congruences. Résolution à l'aide de la méthode de Leslie. Résolution au moyen de l'expression du § 4. — § 13. Résolution d'une équation de la forme $y^2 = ax^2 + b$ pour des valeurs négatives de a. — § 14. Appendice.

Boltzmann (*L.*). — Remarques sur quelques problèmes de la Théorie mécanique de la chaleur. (62-100).

I. Sur la chaleur spécifique des liquides que l'on emploie dans la théorie de l'état de leurs vapeurs saturées. — II. Sur la relation entre un théorème général de Mécanique et le second théorème fondamental de la Thermodynamique. — III. Remarque sur l'importance mécanique du second théorème fondamental de la Thermodynamique.

Mach (*E.*) et *Sommer* (*J.*). — Sur la vitesse de propagation des ondes sonores d'une explosion. (101-130).

Wallentin (*I.-G.*). — Sur la théorie de l'action des bobines cylindriques d'un nombre variable de spires. (135-144).

Schell (*A.*). — Télémètre, avec la base attachée à l'instrument. (145-161; 1 pl.).

Weyr (*Em.*). — Sur les courbes du quatrième ordre avec un point double. (168-174).

Pelz (*C.*). — Sur une méthode générale de détermination des foyers des contours des surfaces du second degré. (175-217; 2 pl.).

Gegenbauer (*L.*). — Sur la théorie des fonctions de Bessel. (218-222).

Lippich (*F.*). — Sur la théorie de l'Électrodynamique. (223-244).

Waltenhofen (*A. v.*). — Sur l'expérience de Peltier. (245-259).

Exner (*Fr.*). — Sur la diffusion des vapeurs à travers des lamelles de fluide. (263-286).

Loschmidt (*J.*). — Sur l'état d'équilibre thermique d'un système de corps, en ayant égard à la pesanteur. III. (287-298).

Exner (*F.*). — Nouvelles expériences sur la dilatation galvanique. (373-400).

Zahradník (*K.*). — Sur une affinité géométrique par rapport aux courbes de troisième ordre et de troisième classe. (437-440).

Igel (*B.*). — Sur les singularités d'un réseau de coniques et d'un tissu de coniques. (445-457).

Weyr (*Em.*). — Des systèmes de points sur les courbes gauches rationnelles du quatrième ordre. (458-462).

Escherich (*G. v.*). — Les systèmes linéaires réciproques de surfaces. (523-563).

I. Deux systèmes linéaires réciproques de surfaces du $\mu^{\text{ième}}$ degré. — II. La génération des surfaces par deux faisceaux réciproques de surfaces. — III. Construction des surfaces du troisième ordre au moyen de dix-huit points donnés. — IV. Construction des surfaces du troisième ordre au moyen de dix-neuf points donnés.

Winckler (*A.*). — Sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. (577-619).

Wallentin (*I.-G.*). — Nouvelles remarques sur la théorie de l'action des bobines cylindriques à un nombre variable de spires. (627-638).

Obermayer (*A. v.*). — Contribution à la connaissance des fluides visqueux. (665-678; 1 pl.).

Baumgartner (*G.*). — De l'influence de la température sur la vitesse d'évaporation des liquides. (679-688).

Seydler (*A.*). — Sur l'orbite de Dioné (106). (689-697).

Lang (*V. v.*). — Théorie de la polarisation circulaire. (719-737).

Puschl (*C.*). — Sur la constitution intérieure et la chaleur latente des vapeurs. (745-782).

Niessl (*G. v.*). — Contributions à la théorie cosmique des météorites. (783-800).

Boltzmann (*L.*). — Sur une nouvelle détermination d'une quantité, dans la théorie de la capillarité, qui se rapporte à la mesure de la molécule. (801-813).

Igel (*B.*). — Addition au Mémoire : « Sur le discriminant de l'invariant de Jacobi ». (830-832).

Margules (*Max.*). — Sur le flux stationnaire de l'électricité dans une plaque, en employant des électrodes rectilignes. (833-847; 2 pl.).

Koutny (*Em.*). — Les surfaces normales aux surfaces du second ordre le long d'une section plane de celles-ci. (851-868; 2 pl.).

Gegenbauer (*L.*). — Sur la fonction $C_n^\nu(x)$. (891-905).

Peschka (*G.-Ad.-V.*). — La projection oblique libre. (917-940; 1 pl.).

BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. — 44[e] année, 2[e] série. Bruxelles, F. Hayez, 1876.

Tome XLI; janvier-juin 1876.

Folie (*F.*). — Note sur la transformation des coordonnées et sur les signes des angles et des distances en Géométrie analytique. (86-96).

L'auteur établit, par une méthode purement analytique, avec plus de rigueur qu'on ne le fait ordinairement, les formules de transformation des coordonnées ponctuelles cartésiennes dans le plan. Les conventions fondamentales sont les suivantes : tous les angles se comptent en tournant de droite à gauche; on regarde comme positive la partie d'une droite qui se dirige vers la moitié du plan située au-dessus de l'axe des X (c'est-à dire à gauche de cet axe, pour un observateur qui en regarde la partie positive), ou la partie de la droite qui a la même direction que l'axe des X positifs, dans le cas d'une droite parallèle à cet axe. La direction positive de la perpendiculaire à une droite D est celle qui fait un angle droit avec la partie positive de D.

Spée. — Lettre sur la structure des taches solaires. (345-350).

Saltel (*L.*). — Généralisation du théorème de Desargues. (594).

Saltel (*L.*). — Sur une loi générale régissant les lieux géométriques. (595-599).

Si un lieu géométrique est tel qu'en faisant passer une ou plusieurs des courbes génératrices par des points arbitraires les paramètres variables que renferment les équations de ces courbes prennent un certain nombre de valeurs fixes, ce lieu se décompose en plusieurs autres dont on peut trouver *a priori* les équations.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Application de la Thermodynamique à l'étude des variations d'énergie potentielle des surfaces liquides; conséquences diverses. (769-783).

Soient m une masse liquide dont la température absolue est T, S la surface libre, J l'énergie potentielle par unité de surface. Imaginons que l'état du liquide soit caractérisé par S et T. Le second principe de la Thermodynamique peut se mettre sous la forme

$$dQ = T\,d\mu = T(X\,dS + YS\,dT),$$

où X et Y sont indépendants de S. Si dS est produit par le travail extérieur $J\,dS$, l'énergie totale sera donnée par la relation

$$A\,dU = T(X\,dS + YS\,dT) - AJ\,dS,$$

A étant l'équivalent calorifique de l'unité de travail. En exprimant que $d\mu$ et dU

sont des différentielles exactes, il vient

$$(1) \qquad Y = \frac{dX}{dT}, \quad X = A\frac{dJ}{dT}, \quad dQ = AT d\left(S\frac{dJ}{dT}\right).$$

Comme on a aussi $dQ = mgk\,dT$, k étant le calorique spécifique à la température T, on tire de là

$$(1\ bis) \qquad dT = \frac{AT\dfrac{dJ}{dT}dS}{mgk - AT\dfrac{d^2J}{dT^2}S}.$$

La théorie des courants électriques de Clausius prouve que la différence x de niveau électrique qui s'établit au contact de deux corps hétérogènes est de la forme λT, λ étant une constante qui dépend de la nature des deux corps. La quantité de chaleur dQ qui traverse dans le temps $d\tau$ la surface de contact est $Axi\,d\tau$, i étant l'intensité du courant. Mettant cette valeur $A\lambda T i\,d\tau$ de dQ dans (1), il vient

$$(2) \qquad i\,d\tau = \lambda d\left(S\frac{dJ}{dT}\right),$$

relation donnant la quantité d'électricité qui traverse la surface de contact.

Ces deux formules expliquent divers phénomènes signalés antérieurement. Sir W. Thomson a étudié l'effet thermique produit lors de l'extension d'une lame liquide, au moyen d'une formule qui se confond avec (1), si l'on admet, comme il est probable, que $\frac{d^2J}{dT^2}$ est petit. La formule (1 *bis*) conduit à diverses conséquences qui sont d'accord avec des expériences de l'auteur, de Melsens, de Jungk et de Pouillet. La formule (2) a été trouvée, par M. Lippmann, pour la quantité d'électricité qui traverse la surface de l'eau acidulée et du mercure. L'auteur, qui l'obtient au moyen d'hypothèses plus générales que celles de M. Lippmann, en déduit les lois suivantes : 1° la constante capillaire à la surface libre d'un liquide quelconque, à la surface de séparation de deux liquides qui ne se mêlent pas ou à la surface de contact d'un liquide avec un solide est une fonction de la température absolue de cette surface; 2° lorsque, par des moyens mécaniques, on déforme une surface liquide, la température de cette surface varie dans un sens tel, que la tension superficielle développée s'oppose à la continuation du mouvement.

Les formules (1) et (2) permettent aussi d'expliquer comment l'évaporation des mers et la condensation des vapeurs produisent sans cesse des courants thermo-électriques.

Spring (*W.*). — Étude des phénomènes capillaires. (912-918).

Catalan (*E.*), *Folie* (*F.*), *Liagre*. — Rapports sur les « Tables de logarithmes à 12 décimales, jusqu'à 434 billions, par M. A. Namur, avec Introduction, par M. P. Mansion ». (921-933).

Exposé de la méthode de M. Namur; critique de l'Introduction.

Liagre. — Rapport sur les « Notes d'Algèbre et d'Analyse, par M. E. Catalan ». (932-934).

Catalan. — Rapport sur la « Note sur l'équation $xy'' + ky' - y = 0$, par M. C. Le Paige ». (935-939).

Montigny, Duprez, Folie (*F.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé « Sur le développement de l'électricité statique, par M. W. Spring ». (939-952).

Houzeau (*J.-C.*). — Fragments sur le calcul numérique. (961-1011).

Fragment IV. Des approximations et des séries. Ce quatrième fragment n'est guère plus susceptible d'analyse que les précédents. Voici les titres des paragraphes : I. Moyens d'approximation. — II. Derniers termes sensibles des séries. — III. Classification des séries numériques. — IV. Séries dont la convergence est augmentée. — V. Renversement des séries.

Le Paige (*C.*). — Note sur l'équation $xy'' + ky' - y = 0$. (1011-1016).

Cette équation n'est intégrable que si $k = \frac{1}{2} \pm n$, n étant entier.

Le Paige (*C.*). — Relation nouvelle entre les nombres de Bernoulli. (1017).

Catalan (*E.*). — Note sur la Communication précédente. (1018-1019).

Spring (*W.*). — Sur le développement de l'électricité statique. (1024-1071).

Ce Mémoire de M. Spring, comme le précédent (p. 912-918), est expérimental ; mais il est utile de le rapprocher du travail de M. van der Mensbrugghe, analysé plus haut.

Steichen. — Rapport sur une Thèse de M. Charles Saver : « La matière est-elle inerte? » (1153-1155).

Terby (*F.*). — Résultats d'observations de la planète Saturne, faites de 1868 à 1874, à Fontenay (Calvados), par M. Ch. Lehardelay. (1315-1319).

Tome XLII ; juillet-décembre 1876.

Liagre. — Rapport sur le Mémoire de M. Houzeau, intitulé « Uranométrie générale, avec une étude sur la distribution des étoiles visibles à l'œil nu. » (5-11).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Application de la Thermodynamique à l'étude des variations d'énergie potentielle des surfaces liquides. (21-34).

Suite du travail analysé plus haut. Soit K le calorique spécifique, tel que l'expérience le donne à la température T, k le calorique spécifique indiqué plus haut, qui suppose que la surface ait une énergie potentielle nulle. On a

$$k\,dT = K\,dT + dQ,$$

et, par suite,

$$K\,dT = k\,dT - AT\,d\left(S\frac{dJ}{dT}\right). \tag{3}$$

Si dS est négligeable en comparaison de dT,

$$K = k - ATS\frac{d^2J}{dT^2}. \tag{4}$$

Enfin, si T est constant, la formule fondamentale donne

$$Q = -AT\frac{dJ}{dT}(S_2 - S_1), \tag{5}$$

pour la quantité de chaleur nécessaire pour changer S_1 en S_2.

Voici quelques conséquences de ces formules. La formule (3) explique ce résultat, trouvé par Weber et W. Spring : les variations de la chaleur spécifique suivent les variations de volume des corps par la chaleur. Dans la formule (4), $\frac{d^2J}{dT^2}$ est négatif, d'après l'expérience. On en conclut qu'il faut moins de chaleur pour élever d'un degré la température d'une sphère liquide que celle de n petites sphères de ce liquide, ayant une même masse que la sphère unique, puis d'autres conséquences non moins curieuses que l'expérience confirme. La formule (5) donne la clef de divers phénomènes observés dans la vaporisation des liquides et la fusion des solides. L'auteur termine par l'explication de quelques faits relatifs aux liquides qui ont un maximum de densité. Il insiste sur l'importance du terme $J\,dS$ dans les équations fondamentales de la thermodynamique des liquides.

De Tilly. — Rapport sur le « Supplément au Mémoire de M. Boussinesq : Essai théorique sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents et sur la poussée des terres sans cohésion ». (242-243).

Folie (*F.*) et *Montigny*. — Rapport sur le travail intitulé « Sur l'écoulement du mercure par les tubes capillaires et les phénomènes électriques qui l'accompagnent, par M. W. Spring ». (243-251).

Folie (*F.*). — Rapport sur la Note intitulée « Nouvelle méthode pour déterminer l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques, par M. L. Saltel ». (253-254).

Saltel (*L.*). — Nouvelle méthode pour déterminer l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques. (300-333).

Exposition d'une méthode sur laquelle on peut consulter de nombreux articles publiés dans les *Comptes rendus* (t. LXXX, p. 1064-1067; t. LXXXI, p. 1047-1050; t. LXXXII, p. 63-66; t. LXXXIII, p. 529-532).

Spring (*W.*). — Sur l'écoulement du mercure par des tubes capillaires et les phénomènes électriques qui l'accompagnent. (333-370).

Travail expérimental qu'il faut rapprocher de celui de M. van der Mensbrugghe, analysé plus haut.

Le Paige (*C.*). — Note sur la transformation des coordonnées dans la Géométrie analytique de l'espace. (384-393).

Travail analogue à celui de M. Folie (*Bulletin*, t. XLI, p. 86-96).

Houzeau (*J.-C.*) et *Quetelet* (*E.*). — Rapports sur le travail intitulé « D'une histoire des Sciences et des Lettres en Belgique pendant la seconde moitié du XVIII[e] siècle. Du projet qu'on avait formé, en 1786, de créer une chaire à l'Université de Louvain pour l'astronome de Zach et d'y ériger un observatoire, par M. de Mailly. » (475-479).

Catalan (*E.*). — Rapport sur le travail intitulé « Applications de la loi de décomposition, par M. L. Saltel ». (484-486).

Catalan (*E.*) et *Folie* (*F.*). — Rapport sur le travail intitulé « Sur la formule indiquant le nombre des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant à une cinquième condition, par M. L. Saltel ». (486-487).

Houzeau (*J.-C.*) et *Folie* (*F.*). — Sur les étoiles filantes d'août 1876. (532-534).

Saltel (*L.*). — Applications de la loi de décomposition. (586-617).

Saltel (*L.*). — Sur la formule indiquant le nombre des coniques d'un système (μ, ν) satisfaisant à une cinquième condition. (617-624).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Quelques mots sur la relation

entre les perturbations météorologiques et les variations magnétiques. (755-758).

L'auteur signale quelques faits, observés par le P. Secchi, qui confirment les vues théoriques exposées par lui dans sa première Note préliminaire (voir *Bulletins de l'Académie*, t. XLI, p. 769 et suivantes).

Houzeau (*J.-C.*). — Sur les Compagnons de la Polaire. (758-759).

Catalan (*E.*) et *De Tilly*. — Rapport sur un Mémoire en réponse à la question : « Perfectionner en quelque point important, soit dans ses principes, soit dans ses applications, la théorie des fonctions imaginaires. » (923-939).

Notes critiques relatives à la théorie des fonctions imaginaires, de M. Maximilien Marie.

Mans. — Discours sur les travaux de la classe des Sciences de l'Académie. (993-1019).

Tome XLIII; janvier-juillet 1877.

Houzeau (*J.-C.*). — Rapport sur le travail intitulé « Observations physiques de Vénus en 1876, par M. O. van Ertborn ». (5-7).

Houzeau (*J.-C.*). — Apparence anormale sur le disque de Saturne. (8-9).

Van Ertborn (*O.*). — Observations de la planète Vénus en 1876. (20-24).

Saltel (*L.*). — 1° Détermination, par la méthode de correspondance analytique, de l'ordre de la surface enveloppe d'une surface de degré l, dont les coefficients de son équation sont des fonctions de n paramètres variables, liés entre eux seulement par $n-2$ conditions. 2° Théorèmes sur les courbes gauches. (24-32).

Catalan (*E.*), *Folie* (*F.*) et *De Tilly*. — Rapports sur le travail intitulé « Notes sur les équations homogènes, etc., par P. Mansion ». (65-72).

Plateau (*J.*). — Quelques exemples curieux de discontinuité en analyse. (84-91).

Voir plus bas le résumé de cet intéressant travail du savant physicien belge.

Terby (*F.*). — De l'inopportunité actuelle d'une nouvelle Carte de Mars et d'une nouvelle nomenclature des taches de cette planète, à propos d'un récent Ouvrage de M. Flammarion. Remarques préparatoires aux observations de 1877 (9e notice). (159-169).

Mansion (*P.*). — Note sur les équations différentielles homogènes et sur l'équation de Clairaut. (169-186).

Démonstration des théorèmes suivants, dont le premier est connu. — A. 1. Toute équation différentielle homogène du premier degré et du premier ordre

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz + \ldots = 0,$$

intégrable et telle que l'on n'ait pas identiquement

$$Mx + Ny + Pz + \ldots = 0,$$

a pour facteur d'intégrabilité $1 : (Mx + Ny + Pz + \ldots)$, et réciproquement. — 2. Si $Mx + Ny + Pz + \ldots = 0$, l'intégrale générale est une équation homogène, et réciproquement. — 3. Si une équation homogène $M\,dx + N\,dy + P\,dz + \ldots = 0$, pour laquelle on n'a pas

$$Mx + Ny + Pz + \ldots = \text{une constante},$$

est immédiatement intégrable, elle n'est pas de degré -1 et a pour intégrale

$$Mx + Ny + Pz + \ldots = C,$$

et réciproquement. — 4. Si, dans ce cas, on a

$$Mx + Ny + Pz + \ldots = \text{une constante},$$

l'équation est de degré -1, et réciproquement. — B. 1. L'équation de Clairaut

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

est la seule dont l'intégrale générale s'obtienne en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par C. — 2. Remarque analogue pour les systèmes simultanés, à une variable indépendante :

$$y = x\frac{dy}{dx} + f_1\left(\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots\right), \quad z = x\frac{dz}{dx} + f_2\left(\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots\right), \quad \ldots.$$

(La démonstration de ces théorèmes est beaucoup trop compliquée ; comme le remarquent les rapporteurs, ils sont une suite immédiate du théorème fondamental de l'analyse : si $\frac{du}{dx} = 0$, u est constant). — 3. L'équation aux dérivées partielles

$$z = x_1\frac{dz}{dx_1} + \ldots + x_n\frac{dz}{dx_n} + f\left(\frac{dz}{dx_1}, \ldots, \frac{dz}{dx_n}\right)$$

est la seule dont l'intégrale complète s'obtienne en remplaçant $\frac{dz}{dx_1}, \ldots, \frac{dz}{dx_n}$ par des constantes arbitraires. — 4. Toute équation différentielle du premier ordre peut se mettre sous forme de l'équation de Clairaut. Application à la recherche de l'inté-

grale de l'équation différentielle des lignes de courbure des surfaces du second ordre et de l'équation différentielle elliptique.

Houzeau, Quetelet (*E.*) et *Folie* (*F.*). — Rapports sur le travail intitulé « Étude comparative des observations faites sur l'aiguille aimantée et sur les taches solaires pendant l'année 1875, à l'observatoire du Collége romain, par M. l'abbé Spée. » (248-252).

Plateau (*J.*). — Addition à la Note intitulée « Quelques exemples curieux de discontinuité en Analyse ». (255-257).

Voici les principaux résultats contenus dans cette Note et dans celle du même auteur que nous avons signalée plus haut. — 1. La fonction

$$y = x \pm m(b-x)(a-x)^{\frac{3}{2}} \pm n(b-x)^{\frac{3}{2}}$$

représente une courbe ayant au point $x=a$, $y=b$, si $b<a$, deux points de rebroussement où les tangentes font un angle fini. — 2. La fonction

$$y = fx + \sqrt{\log \sin ax}$$

représente une suite de points isolés situés sur la courbe $y=f(x)$. — 3. Les courbes $y=\cos\sqrt{a^2-x^2}$, $y=(x+b)\cos\sqrt{a^2-x^2}$ ont deux *points d'arrêt* correspondant à $x=a$, $x=-a$. La courbe $y=\pm n(a-x)x\sqrt{x}$ a un point double en $x=a$; il en résulte que la courbe $y=m\cos\sqrt{a-x}\pm n(a-x)x\sqrt{x}$ a un point saillant en $x=a$. En général, si dans l'équation d'une courbe qui présente un point multiple correspondant à $x=a$ on remplace y par $y-\cos\sqrt{a-x}$, on transformera ce point multiple en un point saillant. — 4. L'équation

$$x = y^2(1 \pm \sqrt{1-y})$$

représente une courbe, tangente à l'axe des y, formant une espèce de *folium* dans l'angle des x et des y positifs; au-dessous de l'axe des x, elle se prolonge indéfiniment suivant deux branches situées l'une d'un côté, l'autre de l'autre de l'axe des y. Si l'on remplace y par $y-\cos\sqrt{x}$, la feuille et la branche de droite sont modifiées, la branche de gauche disparaît. La courbe dont l'équation est

$$x = m(y-\cos\sqrt{x})\left\{(1+y-\cos\sqrt{x})^3 + [1+(y-\cos\sqrt{x})^2]^{\frac{3}{2}}\right\}$$

présente une particularité semblable : elle a deux branches indéfinies au-dessus de l'axe des x, une seule en dessous.

Dans ces deux courbes, le point $x=0$, $y=1$ constitue un *point singulier d'une nouvelle espèce*, qu'on peut appeler *point de dédoublement*. Il n'a été signalé par personne, que nous sachions, avant l'illustre physicien belge.

Flammarion (*C.*). — Réponse aux critiques imaginées par M. Terby contre la Carte publiée dans les « Terres du Ciel ». (258-265).

Saltel (*L.*). — Théorème sur les arguésiennes. (265-266).

Saltel (*L.*). — 1° Applications de la méthode de correspondance analytique et de la loi de décomposition à certaines courbes gauches, notamment à la détermination des singularités du lieu des centres des sphères osculatrices d'une courbe gauche donnée. 2° Sur la détermination du nombre des points communs à deux courbes. (266-273).

Spée. — Étude comparative des observations faites sur l'aiguille aimantée et sur les taches solaires, pendant l'année 1875, à l'observatoire du Collége Romain. (274-295).

Les conclusions de l'auteur sont favorables à l'idée d'une concordance entre les périodes des deux phénomènes. Les commissaires, dans leurs Rapports, font des réserves.

Catalan (*E.*), *De Tilly* et *Folie* (*F.*). — Rapports sur le travail intitulé « Remarques sur la théorie des fractions continues périodiques, par M. C. Le Paige ». (325-330).

Quetelet (*E.*). — Rapport sur le travail intitulé « Études sur la planète Mars (10e Notice), par M. F. Terby ». (331).

De Tilly. — Rapport sur le travail intitulé « Suite des théorèmes sur les polygones réguliers, par M. Reinemund ». (332).

Catalan (*E.*). — Remarque sur un Rapport de M. Folie. (335-337).

Le Paige (*C.*). — Remarques sur la théorie des fractions continues périodiques. (337-348).

Les équations du sixième degré $U = 0$, $V = 0$, qui ont pour racines respectivement les sommes $u = x + y$ et les produits $v = xy$ des racines des équations quadratiques $x^2 - p_1 x + q_1 = 0$, $y^2 - p_2 y + q = 0$, se réduisent aisément à des équations du quatrième degré ayant pour résolvantes des équations du deuxième. Les équations $U = 0$, $V = 0$ donnent, pour u, v, des valeurs développables en fractions continues périodiques si le produit des discriminants des équations en x et en y est un carré. Cette condition est nécessaire et suffisante pour $U = 0$, suffisante seulement pour $V = 0$. Donc, pour que deux fractions continues périodiques aient pour produit (ou pour somme) une fraction continue périodique, il suffit (et il faut) que le produit des discriminants des équations génératrices soit un carré. M. Catalan remarque, dans son Rapport, que le théorème principal énoncé ici peut se démontrer directement, presque sans calcul, si l'on ne veut pas établir que la condition relative au produit des discriminants est nécessaire.

Terby (*F.*). — Études sur la planète Mars (10e Notice). Explica-

tion des dessins exécutés en 1666 par J.-D. Cassini, J. Campani, Salvator Serra et Hook. (5-12).

M. Terby est parvenu à montrer l'accord de toutes les anciennes observations de Mars.

Reinemund. — Suite des théorèmes sur les polygones réguliers. (356-358).

Catalan (*E.*) et *Folie* (*F.*). — Rapport sur le travail intitulé « Sur les sous-normales polaires et les rayons de courbure des lignes planes, par M. E. Ghysens ». (461-467).

Folie (*F.*). — Sur l'évolution, ou nouvelle propriété fondamentale dans la théorie des coniques et des surfaces du second ordre, et son extension aux courbes et aux surfaces supérieures. (500-505).

Voir plus bas, à propos de la suite de cette Note, un résumé détaillé de l'ensemble des recherches de M. Folie sur l'évolution en 1877.

Folie (*F.*). — Réponse à la Note de M. Catalan sur mon Rapport concernant le Mémoire de M. Mansion. (506-508).

Terby (*F.*). — Un dernier mot en réponse à M. Flammarion. (542-544).

M. Terby maintient que M. Flammarion a extrait de ses publications toute son histoire et sa description des taches de Mars.

Ghysens (*E.*). — Sur les sous-normales polaires et les rayons de courbure des lignes planes. (544-559).

Si $\varphi(r, r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0$ est une relation entre les rayons vecteurs de $n+1$ courbes ou branches de courbes, aux points où elles sont rencontrées par une droite émanant d'un point fixe, on a

$$\lambda \frac{d\varphi}{dr} + \lambda_1 \frac{d\varphi}{dr_1} + \ldots + \lambda_n \frac{d\varphi}{dr_n} = 0,$$

λ_i étant la sous-normale polaire de la courbe r_i. Si $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_n$ sont les rayons de courbures des $n+1$ courbes, $\rho', \rho'_1, \ldots, \rho'_n$ ceux de $n+1$ courbes tangentes aux points considérés, $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les angles des rayons vecteurs $r, r_1, \ldots, r_n$ avec $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_n$, on a

$$\frac{r^2}{\cos^3\alpha}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\frac{d\varphi}{dr} + \frac{r_1^2}{\cos^3\alpha_1}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho'_1}\right)\frac{d\varphi}{dr_1} + \ldots = 0.$$

Cette formule est surtout remarquable si l'on considère n courbes et leurs tangentes, r et r' étant déterminés par des relations suffisamment simples.

Folie (*F.*) et *Catalan* (*E.*). — Rapport sur un travail intitulé « Théorèmes relatifs aux foyers des coniques, par M. Boset ». (715-720).

Tome XLIV; juillet-décembre 1877.

Van der Mensbrugghe (*G.*), *Catalan* (*E.*) et *De Tilly*. — Rapports sur le travail intitulé « De l'influence de la forme des corps sur l'attraction qu'ils exercent, par M. C. Lagrange ». (348-355).

Lagrange (*C.*). — De l'influence de la forme des corps sur leur attraction. (23-55).

I. Si une masse M de forme quelconque, dont le centre de gravité G est à une distance δ d'un point matériel de masse m, agit sur celui-ci d'après la loi de Newton, on trouve, en négligeant δ^{-5}, que les composantes de l'attraction X, Y, Z sont

$$\frac{X}{m} = -\frac{3}{\delta^4}\int xz\,dM, \quad \frac{Y}{m} = -\frac{3}{\delta^4}\int yz\,dM, \quad \frac{Z}{m} = \frac{M}{\delta^2} + \frac{3}{2\delta^4}\left[(I_M - I) + (I_\mu - I) + (I_m - I)\right];$$

x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque de M, par rapport à des axes rectangulaires passant par G; I_M, I_μ, I_m les moments d'inertie maximum, moyen et minimum de la masse M; I le moment d'inertie autour de Gm. On conclut de ces valeurs de X, Y, Z que l'attraction n'est dirigée suivant Gm que si Gm est axe d'inertie, et que cette attraction est maximum suivant l'axe maximum de l'ellipsoïde. Le potentiel correspondant aux valeurs de X, Y, Z peut s'écrire

$$\frac{M}{\delta} + \frac{1}{2\delta^3}\left[(I_M - I) + (I_\mu - I) + (I_m - I)\right];$$

par suite, les surfaces d'égal potentiel ont une forme analogue à celle de l'ellipsoïde central d'inertie, et l'on peut exposer comme il suit la tendance de tout point m dans son mouvement vers une masse attirante : 1° le point m se rapproche du centre de gravité G; 2° son rayon vecteur Gm tend vers l'axe maximum GA de l'ellipsoïde central d'inertie; 3° le plan mGA tend à se rapprocher du plan AGB, contenant le grand axe et l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie.

II. Dans le cas de deux masses quelconques qui s'attirent d'après la loi de Newton et telles que la cinquième puissance de l'inverse de la distance de leurs centres de gravité soit négligeable, l'auteur démontre que l'attraction est maximum quand les grands axes des ellipsoïdes centraux d'inertie des deux corps coïncident et que les autres sont parallèles. Dans leurs mouvements, les deux masses tendent sans cesse à se placer dans la position où les axes sont situés comme nous venons de le dire.

III. L'auteur esquisse ensuite les applications de ses recherches à la Physique générale. Il espère expliquer diverses propriétés de l'éther lumineux, la formation des cristaux, la rotation du Soleil sous l'influence de l'attraction des planètes, la rotation des planètes sous l'influence de l'attraction du Soleil ou des satellites, et, enfin, la rétrogradation des satellites d'Uranus.

Catalan (*E.*), *Folie* (*F.*) et *De Tilly*. — Rapports sur le travail intitulé : « Note sur une équation de Jacobi, par M. Mansion ». (120-127).

Folie (*F.*). — Rapport sur le travail intitulé « Sur quelques points de Géométrie supérieure, par M. C. Le Paige ». (127-128).

Folie (*F.*). — Suite à la Note précédente sur l'évolution. (182-193).

(*Voir* plus haut le titre du premier travail de l'auteur sur ce sujet.) Un hexagone inscrit à une conique peut être regardé comme formé par deux triangles dont les côtés se coupent sur la conique. Les côtés opposés de ces triangles se coupant sur une droite, les droites joignant les sommets opposés se coupent en un point, d'après le théorème de Desargues. Donc, les intersections successives des côtés alternants d'un hexagone de Pascal forment les sommets successifs d'un hexagone de Brianchon. De même, les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon forment les côtés successifs d'un hexagone de Pascal. D'après les théories générales de l'auteur en Géométrie supérieure, les propriétés indiquées ici pour les coniques s'étendent à certaines courbes et surfaces d'ordre supérieur. Les deux hexagones peuvent se réduire à un couple unique de deux triangles, l'un inscrit à la conique, l'autre circonscrit et ayant pour points de contact avec la conique les sommets de l'inscrit. Une transversale coupant les côtés opposés de ces deux triangles en six points, que nous appelons $1, 1', 2, 2', 3, 3'$, on a la relation

$$12'.23'.31' = 1'2.2'3.3'1,$$

et les six points peuvent être dits en *évolution*. M. Le Paige (même volume, p. 236-237) observe que $1''$, conjugué harmonique de 1 par rapport à $2'$, $3'$, est en involution avec $1', 2, 2', 3, 3'$. Récemment M. Folie a fait remarquer que quelques-uns des théorèmes contenus dans sa Note appartiennent à M. Catalan, qui les avait perdus de vue (voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1852, t. XI, p. 173).

Mansion (*P.*). — Note sur une équation différentielle de Jacobi. (195-220).

L'équation différentielle de Jacobi, où l'on introduit la variable fictive $z = 1$, prend la forme

$$(a_1 x + a_2 y + a_3 z)(y\,dz - z\,dy) + (b_1 x + b_2 y + b_3 z)(z\,dx - x\,dz) + (c_1 x + c_2 y + c_3 z)(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Multipliant par le déterminant $\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3$, on est amené naturellement à la substitution de Jacobi $u_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$, $u_2 = \ldots$, et à son intégrale générale, chaque fois que les équations

$$k\alpha = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1, \quad k\beta = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2, \quad k\gamma = \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3,$$

qui déterminent $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$, $(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2)$, $(\alpha_3 \beta_3 \gamma_3)$, donnent pour k des racines inégales. Si deux valeurs de k sont égales, on trouve l'intégrale, devinée dans ce cas par M. Serret, en posant $\alpha_2 = \frac{d\alpha_1}{dk_1}$, $\beta_2 = \frac{d\beta_1}{dk_1}$, $\gamma = \frac{d\gamma_1}{dk_1}$, k_1 étant la racine double de l'équation cubique en k. Si celle-ci a trois racines égales, il suffit de faire $\alpha_2 = \frac{d\alpha_1}{dk}$,

$\alpha_3 = \frac{d^2\alpha_1}{dk^2}$, ..., k étant la racine triple, pour obtenir encore l'intégrale. Dans les trois cas, le déterminant R est différent de zéro, ce qui prouve la légitimité du procédé employé. La méthode de M. Allégret (*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 171) est ensuite exposée, et l'auteur montre qu'elle nécessite une discussion semblable à celle par laquelle il a cru devoir compléter le travail de Jacobi. La Note se termine par une Notice historique détaillée.

Ghysens (*E.*). — Sur les sous-normales polaires et la courbure des surfaces. (220-231).

Extension des résultats relatifs aux courbes planes trouvés dans un autre Mémoire, analysé plus haut, aux intersections de surfaces par des plans passant par un rayon vecteur donné.

Le Paige (*C.*). — Sur quelques points de Géométrie supérieure. (231-237).

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines de $f(x) = 0$, $\rho_1\ \rho_2, \ldots, \rho_n$ celles de $\varphi(x) = 0$. Si deux groupes de points ont pour coordonnées $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$, et si l'on a

$$r_1 r_2 \ldots r_n - \frac{1}{n} S r_1 S \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{n-1} + \frac{1.2}{n(n-1)} S r_1 r_2 S \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{n-2} - \ldots = 0,$$

ces points sont dits *conjugués harmoniques*. Cela posé, si deux formes binaires du $n^{\text{ième}}$ degré ont leur invariant quadratique commun nul, les racines de ces formes représentent $2n$ points conjugués harmoniques.

Folie (*F.*). — Rapport sur le travail intitulé « Sur quelques propriétés de l'invariant quadratique simultané de deux formes binaires, par M. C. Le Paige ». (319-322).

Houzeau (*J.-C.*). — Observations des étoiles filantes d'août 1877, faites à l'Observatoire Royal de Bruxelles et à Menin. (363-364).

Le Paige (*C.*). — Sur quelques propriétés de l'invariant quadratique simultané de deux formes binaires. (365-385).

Suite du travail analysé plus haut. Si $n(n+1)$ points sont en involution, les n points n^{uples} de cette involution forment avec chacun des groupes de n points $2n$ points conjugués harmoniques. L'auteur donne ensuite diverses propositions sur l'invariant linéo-linéaire de deux formes binaires dont voici la traduction géométrique : 1° Pour les courbes d'ordre n pair, les $2n-1$ points d'intersection d'une transversale avec la courbe et la première polaire d'un point, et ce point lui-même, forment un système de $2n$ points conjugués harmoniques d'ordre n. 2° Théorème analogue pour une courbe d'ordre impair, le point étant pris sur la courbe et ne faisant pas partie du système des points conjugués. 3° Théorème analogue quand la transversale est une tangente ou une droite passant par un point double de la courbe, supposée d'ordre pair, la polaire étant prise par rapport au point de contact ou

au point double. La fin du Mémoire est consacrée à la démonstration de quelques propriétés de l'invariant linéo-linéaire, les unes connues, les autres peut-être nouvelles.

Catalan (*E.*). — Rapport sur le travail intitulé « Sur la détermination des volumes et des aires, par M. E. Ghysens ». (456-457).

Folie (*F.*). — Rapport sur le travail intitulé « Note sur l'extension des théories de l'involution et de l'homographie, par M. C. Le Paige ». (460-462).

Catalan (*E.*). — Un nouveau principe de probabilité. (463-468).

« La probabilité subjective d'un événement futur ne change pas lorsque les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues. » Si l'on tire p boules d'une nature inconnue d'une urne A qui en contient n, dont b blanches, $n-b$ autres, la probabilité de tirer une blanche de l'urne modifiée B, ne contenant plus que $n-p$ boules, est toujours $b:n$. En effet, supposons que l'on n'ait rien changé à la composition primitive de A. La boule qui va sortir peut être considérée comme faisant partie d'un groupe de $n-p$ boules, isolées parmi les n boules de A. On peut faire sur la composition de ce groupe les mêmes hypothèses que l'on ferait sur celle de B. Donc, etc.

Bibliographie : Mondésir, *Journal de Liouville*, 1[re] série, t. II, p. 10; Catalan, *ibid.*, t. VI, p. 78; Poisson, *Probabilité des jugements*, n° 18 (et 90).

Folie (*F.*). — Extension de la notion du rapport anharmonique. (469-477).

L'auteur appelle *rapport anharmonique* de $2n$ points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \iota, \varkappa, \lambda$ le rapport $[(\alpha\beta)(\gamma\delta)\ldots(\varkappa\lambda)] : [(\lambda\alpha)(\beta\gamma)\ldots(\iota\varkappa)]$ et en fait ressortir l'utilité dans l'étude des courbes d'ordre supérieur à 2.

Ghysens (*E.*). — Sur la détermination des volumes et des aires. (532-545).

Soit $z=f(x,y)$ l'équation d'une surface en coordonnées rectangulaires. La section faite dans la surface par un plan ZOX_1 passant par l'axe ZO engendre, en se mouvant d'un angle $d\varphi$ autour de OZ, un élément de volume $\frac{1}{2}d\varphi\int x_1^2\,dz$, x_1 étant l'abscisse de la section correspondant à l'ordonnée z; par suite, le volume compris sous la surface est $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int x_1^2\,dz$. Applications diverses. Pour élément d'une aire courbe, on peut prendre aussi la petite surface comprise entre ZOX_1 et le plan infiniment voisin.

Le Paige (*C.*). — Note sur l'extension des théories de l'involution et de l'homographie. (546-561).

Cette Note est une suite des précédentes sur les points conjugués harmoniques.

Elle contient sous une forme nouvelle quelques-uns des résultats indiqués plus haut, puis d'autres théorèmes qui les complètent.

Chasles. — Lettre sur une Communication de M. L. Saltel, relative à la théorie des caractéristiques. Observations de MM. Folie, Catalan et Chasles. (655-663).

M. Chasles fait remarquer que toutes les critiques relatives à la théorie des caractéristiques n'ont aucune raison d'être, parce qu'elles se rapportent à des cas où M. Chasles lui-même a déclaré sa méthode inapplicable.

P. M.

MÉMOIRES couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. — Collection in-8°. Bruxelles, F. Hayez ([1]).

Tome XXVI; décembre 1875.

Ce Volume ne contient aucun Mémoire de Mathématiques, d'Astronomie ou de Physique mathématique.

Tome XXVII; mai 1877.

Mailly (E.). — D'une histoire des Sciences et des Lettres en Belgique pendant la seconde moitié du XVIIIe siècle. Du projet que l'on avait formé, en 1786, de créer une chaire à l'Université de Louvain pour l'astronome de Zach et d'y ériger un Observatoire. (16 pages).

Renseignements détaillés sur ce projet et Notice très-soignée sur de Zach, né à Presbourg le 4 juin 1754, mort à Paris le 2 septembre 1832.

Mailly (E.). — Notice sur Rombaut Bournons, membre de l'Académie impériale et royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles. (32 pages).

Né à Malines vers le 11 novembre 1731, mort fou le 22 mars 1788, Bournons fut l'un des rares mathématiciens belges du siècle dernier. Les Mémoires peu nombreux qu'il a écrits sur les Mathématiques supérieures ne témoignent pas d'un grand esprit d'invention; mais il avait d'excellentes idées pédagogiques, comme le prouve la première Partie (la seule publiée) des *Éléments de Mathématiques à l'usage des Colléges des Pays-Bas*, qu'il fit paraître en 1783.

([1]) Voir *Bulletin*, I_2, 65.

Saltel (*L.*). — Mélanges de Géométrie supérieure. (32 pages).

I. Sur l'extension des trois problèmes fondamentaux de la théorie des séries homographiques. — II. Construction par les courbes des racines des équations algébriques. — III. Nouvelle construction, par la règle et le compas, de la courbe du troisième ordre définie par neuf points. — IV. Théorèmes sur les surfaces du troisième ordre.

Saltel (*L.*). — Mémoire sur de nouvelles lois générales qui régissent les surfaces à points singuliers. (66 pages).

Introduction : Remarques diverses sur l'extension des théorèmes relatifs aux courbes planes, aux surfaces. On ne doit pas perdre de vue que les surfaces peuvent avoir non-seulement des points singuliers, comme les courbes planes, mais aussi des lignes singulières. — *Chapitre I :* Étude de la seconde transformation arguésienne, définie par les relations $xx' = yy' = zz' = uu'$, (x, y, z, u) et (x', y', z', u') étant les coordonnées tétraédriques de deux points ou de deux droites correspondantes. — *Chapitre II :* Des points communs à trois surfaces qui ont déjà en commun μ points multiples. (α) Deux points multiples d'ordre a, b, qui appartiennent à une surface d'ordre m, forment une combinaison d'ordre $r_{ab} = a + b - m$. (β) Lemme fondamental : « Si une surface d'ordre m a deux points multiples d'ordre a, b, formant une combinaison positive d'ordre r_{ab}, la droite qui les joint est nécessairement pour cette surface une ligne multiple d'ordre r_{ab}. » (γ) Théorème : « Si trois surfaces les plus générales de leur espèce, d'ordre m_1, m_2, m_3, ont trois points communs multiples d'ordre (a_1, a_2, a_3) (b_1, b_2, b_3) (c_1, c_2, c_3) formant respectivement trois combinaisons positives

$$\left(r_{a_1 b_1}, r_{a_2 b_2}, r_{a_3 b_3}\right), \left(r_{b_1 c_1}, r_{b_2 c_2}, r_{b_3 c_3}\right), \left(r_{a_1 c_1}, r_{a_2 c_2}, r_{a_3 c_3}\right),$$

le nombre des points simples communs aux trois surfaces est égal à

$$m_1 m_2 m_3 - a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3 - c_1 c_2 c_3$$
$$+ r_{a_1 b_1} r_{a_2 b_2} r_{a_3 b_3} + r_{b_1 c_1} r_{b_2 c_2} r_{b_3 c_3} + r_{c_1 a_1} r_{c_2 a_2} r_{c_3 a_3}.\text{»}$$

(δ) Théorèmes analogues dans le cas où le nombre des combinaisons positives est moindre, ou bien où le nombre des points multiples commun est égal à 4 ou supérieur à 4, mais réductible à 4 ou 3 par transformation arguésienne. — *Chapitre III :* Applications diverses, en particulier à la détermination de la classe d'une surface d'ordre m la plus générale de son espèce, ayant μ points multiples. — *Chapitre IV :* Problème : « Une surface d'ordre m la plus générale de son espèce a μ points multiples : trouver le nombre de points simples qu'il faut joindre à ces points multiples pour la déterminer. » Solution pour $\mu = 1, 2, 3, 4$; conjectures pour le cas où $\mu > 4$.

P. M.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO (¹).

Tome XII; novembre 1876-juillet 1877.

Zucchetti. — Étude relative à la statique d'un système de forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace. (44-54).

L'auteur considère sous le nom de *réseau triangulaire* ou *réseau funiculaire* la figure, en général non plane, formée de lignes qui joignent des points particuliers déterminés de proche en proche sur les lignes d'action des diverses forces consécutives, et de lignes qui relient les points précédents situés sur deux forces non consécutives. Le réseau funiculaire est une extension de la notion du polygone funiculaire au cas de forces non situées dans un même plan.

Le Mémoire que nous analysons a pour but d'indiquer la construction du réseau funiculaire et du diagramme correspondant des forces pour un système quelconque de forces; l'auteur examine ensuite le cas spécial où les forces sont en équilibre, et il montre que, dans ces conditions, le réseau funiculaire et le diagramme des forces sont des figures réciproques.

Dorna (A.). — Éphémérides du Soleil, de la Lune et des principales planètes pour l'année 1878 et pour Turin, calculées en temps moyen de Rome. (151-173).

Borchardt (C.-W.). — Note sur la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments. (283-284).

M. Borchardt résume rapidement les principaux résultats d'un Mémoire, publié par lui dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin,* sur l'extension à quatre éléments de l'algorithme des moyennes arithmético-géométriques, indiqué par Lagrange en 1784-1785.

Ovidio (E. d'). — Addition à la Note sur les déterminants des déterminants. (331-333).

La Note est un complément au travail sur le même sujet publié dans le Volume XI des *Actes de l'Académie de Turin.*

Ovidio (E. d'). — Recherches sur les systèmes indéterminés d'équations linéaires. (334-349).

Genocchi (A.). — Note sur la publication faite par le prince Boncompagni de onze lettres inédites de Lagrange à Euler. (350-366).

Ces onze lettres ont été trouvées dans les Archives de la Salle des Conférences de

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 19.

l'Académie de Pétersbourg; elles sont intéressantes pour l'histoire de la vie et des travaux de Lagrange.

La première (juillet 1754) est relative à la série qui exprime les différentielles ou les intégrales successives d'un produit.

La seconde (12 août 1755) renferme un exposé des principes de la méthode ou du calcul des variations.

Dans la troisième lettre (20 novembre 1755), Lagrange entretient Euler de ses recherches sur les *curvæ citissimi appulsus ad datam lineam.*

La quatrième lettre (20 mai 1756) est relative à la proposition qui lui avait été faite d'être agrégé à l'Académie de Berlin, à la méthode *de maximis et minimis*, et aussi au principe de la moindre action, qu'il voudrait appliquer à l'ensemble de la Mécanique.

La cinquième lettre (28 juillet 1759) accompagnait l'envoi du premier Volume des *Miscellanea Taurinensia;* Lagrange y analyse brièvement les différents Mémoires qu'il renferme, et surtout le Mémoire de Daviet de Foncenex sur les *quantités imaginaires.*

La sixième lettre (4 août 1759) est relative à la même publication, sur laquelle Lagrange voudrait bien avoir l'avis de l'Académie de Berlin.

Dans la septième lettre (24 novembre 1759), Lagrange entretient Euler d'une solution analytique du problème des cordes vibrantes et de l'équation

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

dont il dépend. Le fait le plus intéressant rapporté dans cette lettre est le suivant : « J'ai aussi », dit Lagrange, « composé moi-même des éléments de Mécanique et de Calcul différentiel et intégral à l'usage de mes écoliers, et je crois avoir développé la vraie métaphysique de leurs principes autant qu'il est possible. »

Un manuscrit des principes de Calcul différentiel et intégral existe dans la bibliothèque du duc de Gènes; on ne connaît pas de copie des éléments de Mécanique.

La lettre du 26 décembre 1759 est relative à la solution de l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dx^2} + c\,\frac{dz}{x\,dx} - c\,\frac{z}{x^2},$$

d'où dépend le problème de la propagation des ondes circulaires.

La neuvième lettre (1[er] mars 1760) traite de la recherche du corps qui présente le plus grand volume sous une surface donnée et de la propagation du son dans un tube conoïde de section proportionnelle à x^m. Lagrange dit qu'il a cherché à résoudre le problème par des approximations successives.

La dixième lettre est datée du 14 juin 1762 et accompagne l'envoi du second Volume des *Miscellanea Taurinensia.*

Les seules parties importantes de la onzième lettre (28 octobre 1762) sont les lignes suivantes : « Ayant appris, par une de vos lettres de 1759, que vous avez fait assez de cas de ma méthode *de maximis et minimis* pour l'étendre et la perfectionner dans un Traité particulier, j'ai cru devoir supprimer entièrement celui que j'avais presque déjà achevé sur ce sujet, et je me suis borné à en exposer simplement les principes dans un Mémoire que j'ai tâché de rendre le plus court qu'il m'a été possible; je ne me suis même déterminé à composer ce Mémoire que parce que vous m'avez fait l'honneur de me mander, dans la même lettre, que vous ne vouliez point publier votre travail avant le mien. » Le Mémoire

auquel Lagrange fait ici allusion est celui imprimé dans le Tome II des *Miscellanea Taurinensia* sous le titre : *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales indéfinies.*

Dorna et *Charrier*. — Observations de la comète 1877, découverte à Strasbourg le 5 avril 1877. (421-422).

Marco (*F.*). — Note sur la cause de la lumière zodiacale. (424-449).

Le Soleil électrisé donne naissance au courant terrestre qui, suivant Ampère, explique l'orientation de l'aiguille aimantée; la lumière zodiacale est la manifestation partielle de la portion de ce courant qui traverse l'atmosphère.

Genocchi (*A.*). — Résumé d'un Mémoire intitulé « Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes ». (489-494).

Le travail de M. Genocchi, qui sera inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Turin,* renferme un résumé du Mémoire de Foncenex publié dans le second Volume des *Miscellanea Taurinensia*, et une critique des travaux de MM. Beltrami et De Tilly sur l'interprétation des géométries non euclidiennes et sur l'impossibilité d'une démonstration du postulatum d'Euclide par la Géométrie plane.

Tome XIII; novembre 1877-juillet 1878.

Dorna (*A.*). — Méthode pour trouver les formules générales pour le calcul de la parallaxe d'un astre à l'aide de simples relations de Trigonométrie plane. (261-268).

Le savant directeur de l'Observatoire de Turin montre que les notions élémentaires de Géométrie dans l'espace, jointes à la connaissance de la Trigonométrie rectiligne, suffisent à trouver des formules propres au calcul numérique des changements que la parallaxe introduit dans les positions apparentes des astres. Les formules conviennent, quel que soit le système de coordonnées adopté.

Lucas (*É.*). — Théorèmes d'Arithmétique. (271-284).

1° Si p désigne un nombre premier, on a l'identité

$$16\,\frac{x^p-1}{x-1} = G^2 - \left(\frac{-1}{p}\right) p x H^2,$$

dans laquelle G et H désignent des polynômes en x à coefficients entiers.

2° Si le produit de deux nombres entiers a et b est de la forme $4h+1$, les diviseurs propres de

$$a^{2abn} + b^{2abn}$$

appartiennent à la forme linéaire $8abnq+1$.

3° Si les nombres $4q+3$ et $8q+7$ sont premiers, le nombre $2^{4q+3}-1$ est divisible par $8q+7$.

4° Pour que $p = 2^{4nq+2n+1} - 1$ soit premier, il faut et il suffit que l'on ait la congruence

$$\left(2^n + \sqrt{2^{2n}+1}\right)^{\frac{p+1}{2}} + \left(2^n - \sqrt{2^{2n}+1}\right)^{\frac{p+1}{2}} \equiv 0.$$

Ferraris (*G.*). — Démonstration du principe de Helmholtz sur le timbre des sons par des expériences faites à l'aide du téléphone. (287-299).

Basso (*G.*). — Note sur les courants électriques d'induction produits par le moyen de mouvements oscillatoires. (401-424).

Quand un disque de fer doux oscille devant un aimant, de manière que les oscillations se produisent dans la direction de son axe magnétique, et si ces oscillations sont isochrones et d'une faible amplitude par rapport à la distance du fer doux à l'aimant, le courant induit produit dans une spirale placée autour de l'aimant obéit aux deux lois suivantes :

1° L'intensité moyenne du courant est proportionnelle au nombre des oscillations produites dans l'unité de temps et à l'amplitude des oscillations.

2° L'intensité moyenne du courant est en raison inverse du cube de la distance entre le disque oscillant et le pôle magnétique de l'aimant.

La vérification expérimentale de ces deux lois est une nouvelle confirmation du principe général que la variation du moment magnétique produite dans un aimant quand on lui présente un disque de fer doux est inversement proportionnelle au carré de la distance entre le disque de fer doux et le pôle.

Basso (*G.*). — Application de la boussole rhéométrique à la mesure des courants électriques de courte durée. (615-625).

Siacci (*F.*). — Le pendule de L. Foucault et la résistance de l'air. (695-715).

M. Siacci suppose que les oscillations ont une faible amplitude et que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse ; prenant alors les équations complètes du mouvement du pendule, il démontre que :

« Quand un pendule se meut dans l'air en s'écartant peu de la verticale, un point quelconque de sa masse décrit, en projection horizontale, une spirale équiangle autour d'un centre qui, à son tour, décrit, en sens opposé et autour de la verticale, une spirale égale à la première. Les deux spirales sont parcourues avec une vitesse inversement proportionnelle aux rayons vecteurs ; ces derniers tournent d'un mouvement uniforme, et la bissectrice de leur angle tourne, avec une vitesse égale et contraire à celle de la Terre, autour de la verticale considérée. »

Genocchi (*A.*). — Note sur les fonctions interpolaires. (716-729).

Le Mémoire traite de l'expression des fonctions interpolaires d'Ampère et de Cauchy à l'aide d'intégrales multiples, ainsi que de la formule d'interpolation de Lagrange.

Richelmy (*P.*). — Observations sur la théorie donnée par Ponce-

let pour expliquer la résistance des fluides, et essai d'un calcul numérique de cette résistance. (730-749).

L'auteur démontre que les formules de Poncelet doivent être abandonnées et remplacées par celles de Bélanger.

Dorna (*A.*). — Éphémérides du Soleil, de la Lune et des principales planètes, calculées pour Turin. (879-905).

Ferraris (*G.*). — Recherches sur l'intensité des courants électriques et des extra-courants du téléphone. (980-1027).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (¹).

Tome VI; 1878.

Mannheim (*A.*). — Nouvelle démonstration d'un théorème relatif au déplacement infiniment petit d'un dièdre, et nouvelle application de ce théorème. (5-7).

Lorsqu'une face d'un dièdre mobile a pour caractéristique une droite perpendiculaire à l'arête de ce dièdre, l'autre face a aussi pour caractéristique une perpendiculaire à cette arête. On en conclut que :

« Lorsque les deux rayons de courbure d'une courbe gauche sont proportionnels, cette courbe est une hélice tracée sur une surface cylindrique. »

Mannheim (*A.*). — Démonstrations géométriques d'un théorème relatif aux surfaces réglées. (7-9).

Il s'agit de ce théorème, dû à M. O. Bonnet :

« Une ligne tracée sur une surface gauche, qui coupe sous un angle constant les génératrices rectilignes de la surface et qui est en même temps ligne géodésique, ne peut être que la ligne de striction. »

Lucas (*É.*). — Théorème sur la géométrie des quinconces. (9-10).

Les centres de trois cases quelconques d'un échiquier de grandeur quelconque ne sont jamais situés aux sommets d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier.

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 133.

Halphen. — **Sur les singularités des courbes gauches algébriques. (10-43).**

Une portion d'une courbe gauche passant par un point pris pour origine et rapportée à trois axes rectangulaires, dont l'axe des x est la tangente à la courbe et l'axe des z la perpendiculaire au plan osculateur, peut toujours être représentée par des équations telles que

$$x = t^n, \quad y = A t^{n+i} + \ldots, \quad z = B t^{n+i+\nu} + \ldots.$$

Les termes $A t^{n+i}$, $B t^{n+i+\nu}$ étant respectivement les premiers termes de deux séries procédant suivant les puissances positives, entières et croissantes de t, la portion de courbe qui correspond à des valeurs de t qui rendent ces séries convergentes est appelée *cycle* par M. Halphen ; n, i, ν sont dits l'*ordre*, le *rang*, la *classe* du cycle. Aux environs d'un point quelconque, une courbe gauche algébrique se décompose en un ou plusieurs cycles. Les courbes planes admettent une représentation analogue, mais il n'y a lieu de considérer pour chaque cycle que deux éléments, l'ordre et la classe. A un cycle (n, i, ν) correspond, dans une figure corrélative, un cycle (ν, i, n). La perspective d'un cycle (n, i, ν), faite d'un point quelconque, est un cycle (n, i); d'un point quelconque du plan osculateur, un cycle $(n, i+\nu)$; d'un point quelconque de la tangente, un cycle $(n+i, \nu)$.

Si l'on désigne par m le *degré* d'une courbe gauche (nombre des points où la courbe est rencontrée par un plan), par μ sa *classe* (nombre des plans osculateurs qu'on peut lui mener par un point), par r son rang (nombre des tangentes à la courbe qui rencontrent une droite donnée), on a, entre ces éléments et les ordres, les rangs et les classes des cycles de cette courbe, les relations

$$\Sigma(\nu - i) - m = 3(\mu - r),$$
$$\Sigma(n - i) - \mu = 3(m - r).$$

Ces notions établies, M. Halphen se pose la question suivante : Étant donnée une équation algébrique entre x, y, z et les dérivées successives de y, z par rapport à x, trouver le nombre des points d'une courbe gauche algébrique G, en chacun desquels cette équation est vérifiée. Après avoir indiqué comment on peut traiter chaque cas particulier, il donne le théorème suivant :

« Le nombre des points d'une courbe gauche G, de degré m et de rang r, en chacun desquels est vérifiée une équation différentielle algébrique du premier ordre, mise sous forme projective et dont les données sont indépendantes de G, est égal à $\omega r + \theta m$, ω et θ étant deux nombres qui ne dépendent que de l'équation différentielle donnée. »

Ce théorème donne lieu à de nombreuses et intéressantes applications.

Dans le cas où l'équation différentielle est du second ordre, les mêmes conditions d'indépendance étant toujours supposées remplies, le nombre cherché est la somme de quatre nombres, dont chacun est le produit d'un facteur dépendant de la courbe seule et d'un facteur dépendant de l'équation seule.

Pour les covariants différentiels d'ordre supérieur au second, il n'existe point de formules analogues composées d'un nombre fini de termes et applicables à tous les cas; mais on trouve de telles formules quand on se borne à une courbe ne contenant que des singularités appartenant à un nombre fini de familles données, par exemple à une courbe ne contenant pas d'autre cycle singulier, au point de vue ponctuel, que des rebroussements ordinaires (2, 1, 1).

Fouret (*G.*). — Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et à une surface. (43-49).

Normales communes à deux courbes planes algébriques, à deux surfaces algébriques, à deux courbes algébriques planes ou gauches, à une courbe algébrique et à une surface algébrique.

Lucas (*É.*). — Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier. (49-54).

En faisant

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots,$$

M. Sylvester a désigné sous le nom de *nombres d'Euler* les nombres

$$E_{2n} = (-1)^n 1.2.3\ldots(2n) a_{2n};$$

ces nombres sont entiers et impairs. M. Lucas montre que l'on a, p étant un nombre premier,

$$E_{p''1} + E_{p-2} + \ldots + E_1 + E_0 \equiv 0 \pmod{p},$$

$$E_{2n} \equiv E_{2n+k(p-1)} \pmod{p},$$

et que, en général, les résidus des coefficients différentiels d'une puissance entière et positive de $\frac{1}{\cos x}$, suivant un module premier, se reproduisent périodiquement.

Laguerre. — Sur les courbes unicursales de troisième classe. (54-57).

Si une courbe unicursale de troisième classe est tritangente à une conique, les trois tangentes que l'on peut mener à cette courbe par un point quelconque de la conique rencontrent de nouveau cette conique en trois points. Un des côtés du triangle formé par ces trois points passe par un point fixe.

Lucas (*É.*). — Sur les développements en séries. (57-68).

Application du calcul symbolique à la théorie des développements en série; généralisation des théorèmes de Stirling et de Boole.

Laguerre. — Sur la multiplication des fonctions algébriques. (68-71).

Si l'on suppose que U soit une forme binaire du quatrième degré dont H, J, S sont respectivement le hessien, le covariant cubique du sixième degré et l'invariant quadratique, on trouve, en transformant une formule due à M. Hermite, la relation

$$U^3(x,y)U(\xi,\eta) = \Delta^4 + 6H\Delta^2\omega^2 + 4J\Delta\omega^3 + (SU^2 - 3H^2)\omega^4,$$

où

$$\Delta = \frac{1}{m}\left(\xi\frac{\partial U}{\partial x} + \eta\frac{\partial U}{\partial y}\right), \quad x\eta - y\xi = \omega.$$

M. Laguerre en déduit les intégrales algébriques entières des équations

$$\frac{3\,dx}{\sqrt{U(x,y)}} + \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi,\eta)}} = 0,$$
$$\frac{5\,dx}{\sqrt{U(x,y)}} + \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi,\eta)}} = 0;$$

il traite ensuite le cas de la multiplication par un nombre impair quelconque.

Laguerre. — Sur la transformation des fonctions elliptiques. (72-78).

L'auteur rappelle, d'après Eisenstein, comment l'intégration de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x,y)}} = dv,$$

où

$$F(x,y) = Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4, \quad (y = 1),$$

peut être ramenée à l'intégration du système simultané

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = \varphi Y^2 + Y'^2 + YY'',$$
$$2BX^2 + 4CXY + 2DY^2 = -2\varphi XY + YX'' + 2X'Y' + XY'',$$
$$CX^2 + 2DXY + EY^2 = \varphi X^2 + X'^2 - XX'',$$

X et Y étant des fonctions de v dont les dérivées, par rapport à cette variable, sont désignées au moyen d'accents et dont le rapport fournit une intégrale de l'équation proposée, et φ représentant une fonction arbitraire de v. Il parvient, au moyen de ces formules, à retrouver simplement les formules de Jacobi pour la transformation.

Picquet. — Détermination de la classe de la courbe enveloppe des axes des coniques, perspectives sur un plan vertical de cercles de rayons égaux situés dans un plan vertical et dont les centres sont sur une horizontale. Construction des axes de ces courbes. (82-84).

Perrin. — Sur une relation remarquable entre quelques-unes des singularités réelles des courbes algébriques planes. (84-117).

Il s'agit de la relation, due à M. Klein (*Mathematische Annalen*, t. X),

$$m + i_1 + 2\tau'_1 = n + k_1 + 2\delta'_1,$$

entre le degré m, le nombre i_1 des inflexions réelles, la classe n, le nombre k_1 des rebroussements réels, le nombre δ'_1 des points isolés d'une courbe algébrique. M. Perrin déduit cette relation d'un certain nombre de théorèmes de géométrie de situation, relatifs à un mode de décomposition des contours fermés dont le principe est dû à M. Jordan.

Lucas (É.). — Sur les suites de Farey. (118-119).

Halphen. — Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers et les décompositions en deux carrés. (119-120).

Soient x un nombre entier positif et $S(x)$ la somme des diviseurs positifs de x, dont les quotients par x sont impairs; la fonction numérique $S(x)$ vérifie la relation récurrente

$$S(x) = 2[S(x-1) - S(x-4) + S(x-9) - \ldots];$$

on peut déduire de là le théorème sur la décomposition d'un nombre en deux carrés.

André (*D.*). — Note sur les développements des puissances de certaines fonctions. (120-121).

Laguerre. — Sur l'intégration de l'équation

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 6f(x),$$

f étant un polynôme du second degré. (123-124).

Si l'on pose

$$f = Ax^2 + Bx + C, \quad \Delta = B^2 - 4AC,$$

l'intégrale complète de cette équation est

$$\int\frac{dx}{f} + \int\frac{du}{u\sqrt{\Delta + 4\alpha u - u^3}} = \beta,$$

où α et β sont des constantes arbitraires et où $u = fy^{-\frac{2}{3}}$; dans le cas où α est nul, cette dernière équation peut s'intégrer algébriquement, et l'on trouve ainsi les polynômes qui, ainsi qu'on le sait, satisfont à l'équation proposée.

Laguerre. — Sur la recherche du facteur d'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre. (124-129).

Soient $f(x, y, \alpha)$ une fonction quelconque de x, y et d'une constante arbitraire α, Φ, Θ, F des fonctions quelconques; le facteur d'intégrabilité de l'équation

$$dy - y'\,dx = 0,$$

où y' est déterminé par la relation

$$(a) \qquad \Phi(\alpha)F'(f)\frac{df}{d\alpha} + \Phi'(\alpha)F(f) + \Theta(\alpha) = 0,$$

relation dans laquelle α doit être remplacé par sa valeur tirée de l'équation

$$\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0,$$

est

$$\Phi(\alpha)F'(f)\frac{df}{dy},$$

α étant, dans cette expression, remplacé par sa valeur tirée de l'équation (a).

Laguerre. — Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes. (129-136).

Soient A, B, C trois polynômes du $n^{\text{ième}}$ degré en x, y, et liés par la relation

$$Ax + By + Cz = 0 \quad (z = 1);$$

on voit qu'en faisant varier ξ et η l'équation

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0 \quad (\zeta = 1)$$

représente une infinité de courbes formant un réseau dont le point ξ, η est dit le *point principal*. Les courbes du réseau passent par $n^2 - n + 1$ points fixes; deux quelconques de ces courbes se coupent, en outre, en $n - 1$ autres points situés sur une même droite; le $n^{\text{ième}}$ point où cette droite rencontre l'une quelconque des courbes est le point principal. Si de chaque point M du plan on mène à la courbe du réseau ayant ce point pour point principal les tangentes dont le point de contact est distinct du point M, toutes ces droites enveloppent une même courbe k, de classe $n^2 - n + 2$, de degré $3(n-1)$; cette courbe est aussi le lieu des points principaux des courbes du réseau qui possèdent un point double. Le lieu des points de contact des mêmes tangentes est une courbe H qui est aussi le lieu des points doubles des courbes du réseau.

Rodet (L.). — Sur un Manuel du Calculateur, découvert dans un papyrus égyptien. (139-149).

Ce papyrus a été publié en fac-simile par M. Eisenlohr, professeur de langue et d'archéologie égyptiennes à l'Université de Heidelberg. Les calculs y sont effectués tout au long. Il contient les règles pour l'addition et la soustraction; quant à la multiplication, l'auteur ne sait que doubler un nombre. Il paraît ignorer absolument ce qu'est la division. Il traite, en outre, des fractions ayant pour numérateurs l'unité, et résout plus ou moins exactement quelques questions relatives à la mesure des volumes et des surfaces.

Lemonnier. — Sur les fonctions analogues à celles de Sturm. (149-156).

$F(x)$ et $f(x)$ étant deux fonctions entières, a et b deux nombres quelconques inégaux et n'annulant pas $f(x)$, si l'on pose

$$F(x) = f(x)(\lambda x + \mu) - (x-a)(x-b)f_1(x),$$

et que l'on détermine λ, μ de façon que $f_1(x)$ soit entier, en sorte que

$$(x-a)(x-b)f_1(x) = -F(x) - f(x)\left[\frac{F(a)}{f(a)}\,\frac{x-b}{a-b} + \frac{F(b)}{f(b)}\,\frac{x-a}{b-a}\right],$$

les diviseurs communs de $F(x)$ et de $f(x)$ seront les mêmes que ceux de $f(x)$ et de $f_1(x)$; lorsque $F(x)$ est du degré m et $f(x)$ d'un degré inférieur, le degré de $f_1(x)$ est $m-2$ au plus. Dans tous les cas, $f_1(x)$ est au plus du degré $m-1$, m étant le degré de celui des polynômes $F(x)$ et $f(x)$ qui a le degré le plus élevé.

En remplaçant $F(x)$ par $f_1(x)$, puis en continuant de la même manière jusqu'à un résultat constant ou nul, soit que l'on emploie à chaque calcul d'une nouvelle fonction les mêmes nombres a et b, soit qu'on les change, on arrivera à connaître le plus grand commun diviseur. Si au point de départ $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$, ces polynômes $F(x)$, $f(x)$ et les suivants $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... constitueront une suite de polynômes jouissant des mêmes propriétés que les fonctions de Sturm à l'égard de valeurs de x situées d'un même côté des nombres a, b, à l'égard de valeurs réelles de x quelconques, si a, b sont des nombres imaginaires conjugués. M. Lemonnier montre, en outre, comment dans ce dernier cas on est conduit, par son procédé, aux fonctions de Sturm elles-mêmes, en faisant augmenter indéfiniment le module de a; il donne de plus des formules analogues pour des nombres a, b égaux et d'autres formules contenant un plus grand nombre d'indéterminées.

Laisant (*A.*). — Note sur la géométrie des quinconces. (156-158).

Tout triangle ayant pour sommets les centres de trois cases quelconques d'un échiquier de grandeur quelconque présente trois angles dont les tangentes sont incommensurables.

Polignac (*C. de*). — Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$. (138-163).

André (*D.*). — Sur le développement de la fonction elliptique $\mu(x)$ suivant les puissances croissantes du module. (163-165).

Posant

$$\mu = v_0 + v_1 k^2 + v_2 k^4 + v_3 k^6 + \ldots,$$

M. D. André trouve

$$v_k = \Sigma p_{i,j} x^{2j} \cos(2j+1)x + \Sigma q_{i,j} x^{2j+1} \sin(2j+1)x,$$

$p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ étant des constantes, i et j des entiers non négatifs, et les Σ s'étendant le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers i et j qui satisfont à la condition

$$2i + j \leq k,$$

et le second à tous les systèmes tels que l'on ait

$$2i + 1 + j \leq k.$$

André (*D.*). — Problème sur les équations génératrices des séries récurrentes. (166-170).

Étant donnée une relation linéaire et homogène entre les termes V_n, V_{n-1}, V_{n-2}, ... d'une série récurrente, et les termes U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, ... d'une autre série récurrente, en laquelle relation les termes V sont multipliés par des constantes et les termes U par des polynômes entiers en n, déduire l'équation génératrice de la série V de l'équation génératrice de la série U.

Léauté (H.). — Note sur un théorème relatif au déplacement d'une figure plane.

Lorsqu'une figure plane se déplace dans son plan suivant une loi quelconque, si l'on considère à un instant donné tous les points situés sur une droite quelconque issue du centre instantané de rotation, les diamètres des trajectoires que décrivent ces points à l'instant considéré enveloppent une conique inscrite dans le triangle rectangle formé par le diamètre de la circonférence des inflexions issu du centre instantané de rotation, par la droite considérée et par la perpendiculaire à cette droite menée par son point d'intersection avec la circonférence des inflexions.

Halphen. — Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers. (173-188).

M. Halphen démontre les deux théorèmes qui suivent par des considérations purement arithmétiques.

Soient A, m, n des nombres quelconques, le dernier positif et supérieur à la valeur absolue du second. On fait la somme des expressions

$$(-1)^x + f\left(\frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} + x\right)$$

et

$$(-1)^{x+1} f\left(x - \frac{A - nx^2 - mx}{ny - m}\right),$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque, et les entiers x et y, ce dernier positif et impair, étant choisis de toutes les manières possibles pour rendre entier l'argument de la fonction. Cette somme est nulle, sauf dans le cas où il existe un entier α, tel que A soit égal à $n\alpha^2 + m\alpha$. S'il existe un pareil entier, la somme est égale à $(-1)^{\alpha+1}\alpha f(\alpha)$. S'il existe deux pareils entiers α, β, la somme est égale à

$$(-1)^{\alpha+1}\alpha f(\alpha) + (-1)^{\beta+1} f(\beta).$$

Dans les mêmes conditions, on fait la somme des expressions

$$(-1)^x (ny + m) f\left(\frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} + x\right),$$

$$(-1)^x (ny - m) f\left(x - \frac{A - nx^2 - mx}{ny - m}\right),$$

$$(-1)^x n P\left(\frac{A - nx^2 - mx}{n}\right) f(x),$$

où $P(z)$ désigne la somme des diviseurs pairs de z, si z est positif, et zéro dans les autres cas. Cette somme est nulle ou bien égale à l'une des deux quantités

$$(-1)^{\alpha+1} f(\alpha) A, \quad [(-1)^{\alpha+1} f(\alpha) + (-1)^{\beta+1} f(\beta)] A.$$

Ce dernier théorème, en faisant $f(x) = 1$, conduit à une formule récurrente qui contient, comme cas particulier, la loi due à Euler, qui relie chaque nombre à la somme de ses diviseurs.

Tchebychef. — Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point. (188-193).

M. Darboux et M. Tchebychef ont donné, en décembre 1875, l'un dans le *Bulletin* (t. IX, p. 281), l'autre dans le *Recueil mathématique de la Société Mathématique de Moscou*, deux démonstrations du *parallélogramme des forces* fondées sur une relation entre les angles compris entre les plans qui passent par un point. M. Tchebychef reprend à nouveau cette relation pour en tirer, sans rien admettre sur la direction de la résultante et la continuité, un point essentiel de la démonstration du théorème fondamental.

Laisant (A.). — Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité.

Lindemann. — Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires. (195-208).

L'auteur complète une Communication antérieure (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. V, p. 113) sur une courbe d'ordre n, particulièrement attachée à une forme binaire d'ordre $2n$, représentée par $2n$ points arbitraires d'une conique fixe.

Chasles. — Mémoire de Géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques. (208-251).

Ce Mémoire inédit a été présenté à la Société Philomathique le 11 août 1829. Il contient la théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan. Sa lecture ne laisse pas d'être fructueuse et intéressante, bien que les méthodes inaugurées par l'illustre géomètre soient maintenant passées dans l'enseignement, et l'on doit savoir gré à la Société Mathématique de l'avoir fait imprimer dans son *Bulletin*.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome LXXXVII; juillet-décembre 1878.

N° 1; 1er juillet.

Moncel (Th. du). — Sur un système de téléphone sans organes électromagnétiques, basé sur le principe du microphone. (7).

Peters. — Découverte d'une petite planète à Clinton (New-York). (21).

Lamey. — Sur les déformations du disque de Mercure pendant son passage sur le Soleil. (22).

Mercure paraissait *ovale*. Le sommet nord du grand axe, incliné à gauche, formait avec la verticale un angle d'environ 37°. Une avance de huit secondes sur l'instant théorique du contact a pu être produite par cette ellipticité.

Aymonnet. — Détermination de la température d'un milieu insolé. (23).

N° 2; 8 juillet.

Boileau (*P.*). — Théorie et formules concernant l'action retardatrice des parois des courants liquides. (48).

Leveau (*G.*). — Détermination de l'orbite de la planète (103) Héra. (57).

N° 3; 15 juillet.

Saint-Venant (*de*). — Sur la plus grande des composantes tangentielles de tension intérieure en chaque point d'un solide, et sur la direction des faces de ses ruptures. (89).

Faye. — Sur une brochure de M. Hirn relative aux tourbillons. (94).

Swift (*L.*). — Découverte d'une comète à Rochester (États-Unis). (104).

Perrotin. — Théorie de Vesta. (105).

Crova (*A.*). — Mesure de l'intensité calorifique des radiations solaires. (106).

N° 4; 22 juillet.

Moncel (*Th. du*). — Sur la variation de l'intensité des courants transmis à travers de médiocres contacts, suivant la pression exercée sur eux. (131).

Boileau (*P.*). — Théorie et formules concernant l'action retardatrice des parois des courants liquides. (134).

Lesseps (*de*). — Courants observés dans le canal de Suez et conséquences qui en résultent. (141).

Léauté (*H.*). — Sur les systèmes articulés. (151).

Solution du problème suivant : « Trouver dans un système articulé à trois tiges le point d'insertion de la dernière tige, de telle sorte que l'on fasse décrire à un point une courbe donnée avec le maximum d'approximation. »

Cette solution s'appuie sur la considération d'une courbe unicursale du troisième degré, lieu des points qui se trouvent à un instant quelconque donné à un sommet de leur trajectoire.

Tempel. — Découverte de la planète *Tempel,* à Florence. (156).

Lalanne (*L.*). — Sur la méthode géométrique pour la solution des équations numériques de tous les degrés. Extrait d'une Lettre à M. Hermite. (157).

Analogie et différence de la méthode de M. Lalanne et d'une méthode indiquée par M. Kronecker, relative à l'équation du quatrième degré.

Desboves. — Sur l'emploi des identités algébriques dans la résolution en nombres entiers des équations d'un degré supérieur au second. (159).

Application d'une méthode due à Lagrange aux équations

$$x^3 + y^3 = z^3,$$
$$x^4 + ay^4 = z^2.$$

L'auteur est conduit à deux identités, dont l'une a déjà été donnée par M. Lucas, et dont l'autre met en évidence le théorème suivant :

« La deuxième équation peut toujours être résolue en nombres entiers lorsque a est de l'une des deux formes $(2x+y)x^2y$ ou $2x^2+y^4$. »

Minich (*R.*). — Nouvelle méthode pour l'élimination des fonctions arbitraires. (161).

Lorsqu'on veut éliminer n fonctions arbitraires de p arguments entre un nombre $p+1$ d'équations à $p+2$ variables, dont l'une z est fonction des autres, on obtient la résultante cherchée en regardant les arguments des fonctions arbitraires comme des constantes et en introduisant dans les différentielles totales des $p+1$ équations données et de celles qui s'en déduisent, au lieu de z et de ses dérivées partielles successives, la somme de leurs différences partielles.

Sebert. — Sur un appareil destiné à faire connaître simultanément la loi de recul d'une bouche à feu et la loi du mouvement d'un projectile. (165).

N° 5; 29 juillet.

Moncel (*Th. du*). — Sur les variations de l'intensité des courants transmis à travers de médiocres contacts, suivant la pression exercée sur eux. (189).

Henry (*Pr.*). — Observation de la comète périodique de Tempel, faite à l'équatorial du jardin de l'Observatoire de Paris. (201).

Jordan (*C.*). — Sur les covariants des formes binaires. (202).

M. Jordan a montré que les covariants d'un système de formes binaires s'expriment en fonction entière d'un nombre limité d'entre eux. M. Jordan communique un théorème qui donne une limite de ce nombre.

Laisant. — Note sur un théorème sur les mouvements relatifs. (204).

Proposition analogue au théorème de Coriolis, relative aux accélérations d'ordre quelconque.

Blondelot. — De la non-existence de l'allongement d'un conducteur traversé par un courant électrique. (206).

N° 6; 5 août.

Mouchez (*A.*). — Nouvelle observation probable de la planète Vulcain, par M. le professeur Watson. (229).

Sylvester. — Sur les covariants fondamentaux d'un système cubo-quadratique binaire. (242).

Tableau des invariants et des covariants fondamentaux, obtenu par la méthode de tamisage, dans le cas de la combinaison d'une forme biquadratique avec une forme cubique binaire.

Decharme (*C.*). — Sur les formes vibratoires des corps solides et des liquides. (251).

Gaillot. — Note sur la planète intra-mercurielle. (253).

Tacchini. — Résultats des observations solaires pendant le deuxième trimestre de 1878. Lettre à M. le Secrétaire perpétuel. (257).

Lévy (*M.*). — Sur une Note de M. Laisant, intitulée « Sur un théorème sur les mouvements relatifs ». (259).

Réclamation de priorité. Le théorème de M. Laisant a été donné par M. Lévy dans les *Comptes rendus* du 29 avril 1878. M. Gilbert en a donné une démonstration le 3 juin de la même année.

Edison. — M. Edison présente à l'Académie un appareil auquel il a donné le nom de *microtasimètre* et qui est destiné à mesurer les différences infinitésimales de température ou d'humidité ; il présente également un appareil connu sous le nom d'*électromotographe.* (269).

N° 7; 12 août.

Sylvester. — Sur les covariants fondamentaux d'un système cubo-quadratique. (287).

Vérification, au moyen de la fraction génératrice, des résultats précédemment communiqués.

Vinot (*J.*). — M. Vinot transmet à l'Académie une Lettre qui lui a été adressée par Le Verrier en septembre 1876, et à laquelle la découverte récente d'une planète intra-mercurielle donne un intérêt particulier. (292).

N° 8; 19 août.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Paris pendant le deuxième semestre de 1878. (309).

Bossert. — Éléments de la planète (148) Gallia. (319).

Desboves. — Deuxième Note sur l'emploi des identités dans la résolution des équations numériques. (321).

Résolution en nombres entiers des équations

$$X^4 + aY^4 = Z^2,$$
$$X^4 + aY^4 = Z^4,$$

lorsque a affecte certaines formes.

Crova (*A.*). — Étude spectrométrique de quelques sources lumineuses. (322).

Planté (*G.*). — Étincelle électrique ambulante. (325).

Righi. — Sur un téléphone pouvant transmettre les sons à distance. (328).

N° 9; 26 août.

Faye. — Emploi de l'ascension droite de la Lune, corrigée des erreurs tabulaires, pour déterminer la longitude en mer. (346).

Decharme (*C.*). — Sur les formes vibratoires des corps solides et des liquides. (354).

Lalanne (*L.*). — De l'emploi de la Géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités. (355).

Dans le nombre infini de triangles possibles dont les côtés ne sont assujettis qu'à la condition d'être compris entre deux limites connues, quelles sont les valeurs moyennes des trois côtés préalablement rangés par ordre de grandeur ?

De Tilly. — Sur les surfaces orthogonales. (361).

N° 10; 2 septembre.

Tresca. — Emboutissage cylindrique d'un disque circulaire. (369).

Watson (*J.*). — Sur l'existence d'une planète intra-mercurielle observée pendant l'éclipse totale du Soleil du 29 juillet. (376).

Mouchez. — M. Mouchez annonce que, d'après une Lettre de M. Watson, la position primitivement assignée par lui à la nouvelle planète doit être modifiée. (377).

Laisant. — Note relative à une réclamation de M. Maurice Lévy. (377).

N° 11; 9 septembre.

Moncel (*Th. du*). — Sur de nouveaux effets produits dans le téléphone. (390).

Gruey. — Sur un nouvel appareil gyroscopique. (395).

Watson (*J.*). — Rectification de la position assignée précédemment au nouvel astre découvert pendant l'éclipse du 29 juillet, et annonce de l'observation d'un second astre aperçu dans les mêmes circonstances. (398).

Jonquières (*E. de*). — Méthode nouvelle pour la décomposition des nombres en sommes quadratiques binaires ; application à l'Analyse indéterminée. (399).

Cette Communication se rapporte principalement à une loi de réciprocité qui lie entre elles les représentations d'un nombre et celles de son carré par une forme quadratique binaire.

Boussinesq (*J.*). — Sur la dépression que produit à la surface d'un sol horizontal élastique et isotrope un poids qu'on y dépose, et sur la répartition de ce poids entre ses divers points d'appui. (402).

Trève. — Sur les variations d'intensité que subit un courant quand on modifie la pression des contacts établissant le circuit. (405).

Parville (*H. de*). — Sur une application du téléphone à la détermination du méridien magnétique. (405).

N° 12; 16 septembre.

Dumont (*P.*). — Sur un nouveau transmetteur téléphonique. (424).

Swift. — Planète intra-mercurielle vue aux États-Unis pendant l'éclipse totale de Soleil du 29 juillet. (427).

Cruls (*J.*). — Observations du passage de Mercure du 6 mai 1878, faites à l'observatoire impérial de Rio de Janeiro, à l'aide de la nouvelle méthode de M. Emm. Liais. (427).

Picard (*E.*). — Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points cri-

tiques. (432).

$$z\frac{du'}{dz} = f(u, u', z),$$

où, $u' = \frac{du}{dz}$ étant une équation différentielle du second ordre entre u et z, l'auteur examine la nature des intégrales dans le cas où $f(u, u', z)$ s'annule pour $z = 0$, $u = \alpha$, $u' = \beta$, et reste continue et uniforme dans le voisinage de ces valeurs.

Amagat. — Sur la compressibilité des gaz à des pressions élevées. (432).

N° 13; 25 septembre.

Sylvester. — Sur le vrai nombre des formes irréductibles du système cubo-biquadratique. (445).

Il n'y a que 61 formes irréductibles, contrairement à l'affirmation de M. Gundelfinger.

Lévy (M.). — Mémoire sur une loi universelle relative à la dilatation des corps. (449).

La pression que supporte un corps quelconque ne peut être, tant que ce corps ne change pas d'état, qu'une fonction linéaire de sa température.

Sterry-Hunt. — Sur les relations géologiques de l'atmosphère. (452).

Alluard. — Des variations nocturnes de la température à des altitudes différentes constatées à l'observatoire du Puy-de-Dôme. (454).

Peters (F.). — Découverte d'une petite planète à l'observatoire de Hamilton-College, Clinton. (459).

Picquet. — Sur une nouvelle espèce de courbes et de surfaces anallagmatiques. (460).

Toute courbe de degré n, ayant un point multiple d'ordre $n - 2$, passant une fois par les points cycliques, et dont les $n - 2$ autres points à l'infini sont respectivement sur les $n - 2$ tangentes au point multiple, est anallagmatique par rapport à un cercle ayant pour centre le point multiple et passant par les points de con-

tact des $2(n-1)$ tangentes menées par ce point à la courbe. La courbe déférente de cette anallagmatique est une courbe de classe $n-1$ tangente $n-2$ fois à la droite de l'infini, possédant en général $2(n-3)(n-4)$ points doubles et $3(n-3)$ points de rebroussement, et de degré $2(n-2)$. Théorèmes analogues pour les surfaces.

N° 14; 30 septembre.

Mouchez. — Création d'un musée astronomique à l'Observatoire de Paris. (469).

Sylvester. — Détermination du nombre exact des covariants irréductibles du système cubo-biquadratique binaire. (477).

Mouchot (A.). — Utilisation industrielle de la chaleur solaire. (481).

Canestrelli (J.). — Note relative à diverses expériences concernant le téléphone. (483).

Watson. — Découverte d'une petite planète à l'observatoire d'Ann-Arbor. (484).

Gaillot (A.). — Sur les planètes intra-mercurielles. (485).

Lévy (M.). — Sur l'attraction moléculaire, dans ses rapports avec la température des corps. (488).

Boussinesq (J.). — Des pertes de charge qui se produisent dans l'écoulement d'un liquide quand la section vive du fluide éprouve un accroissement brusque. (491).

Aymonnet et *Maquenne.* — Des minima produits, dans un spectre calorifique, par l'appareil réfringent et la lampe qui servent à la formation de ce spectre. (494).

Joubert (J.). — Sur le pouvoir rotatoire du quartz et sa variation avec la température. (497).

Lacour (P.). — Roue phonique, pour la régularisation du synchronisme des mouvements. (499).

N° 15; 7 octobre.

Sylvester. — Sur les covariants irréductibles du *quantic* du septième ordre. (505).

Hirn. — Observations à propos d'une Communication récente de M. Gruey, sur un appareil gyroscopique. (509).

Hirn. — Sur un cas singulier d'échauffement d'une barre de fer. (510).

Daubrée. — Observations relatives à la Communication précédente de M. Hirn. (512).

Peters. — Découverte de deux petites planètes à Clinton (New-York). (514).

Watson. — Seconde Lettre relative à la découverte des planètes intra-mercurielles. (514).

Mouchez. — Observations relatives à la Communication de M. Watson. (516).

Weber (F.). — Deux remarques au sujet de la relation générale entre la pression et la température déterminée par M. Lévy. (517).

M. Weber conteste l'exactitude de cette relation au point de vue de la théorie et de l'expérience.

Boussinesq (J.). — Sur la manière dont se distribue entre ses points d'appui le poids d'un corps dur, posé sur un sol poli, horizontal et élastique, etc. (519).

Desboves. — Sur la résolution en nombres entiers de l'équation $ax^4 + by^4 = cz^2$. (522).

L'auteur indique la solution suivante :

$$X = x(4a^2x^8 - 3c^2z^4),$$
$$Y = y(4b^2y^8 - 3c^2z^4),$$
$$Z = z[c^4z^8 + 24ab(c^2z^4 - 2abx^4y^4)].$$

Farkas. — Solution d'un système d'équations linéaires. (523).

Gruey. — Sur un nouveau pendule gyroscopique. (526).

N° 16; 14 octobre.

Struve (*O.*). — Présentation du Volume IX des *Observations de Poulkova.* (545).

Ce Volume contient les observations faites par l'éminent astronome, pendant quarante ans environ, sur les étoiles doubles et multiples. La continuité même de ces observations leur donne une grande valeur et a permis d'en tirer d'importants résultats; en outre, la nature des erreurs personnelles a été déterminée avec soin par l'observation d'étoiles artificielles.

Brettes (*M. de*). — Formules relatives au percement des plaques de blindage en fer. (549).

Decharme. — Complément à son Mémoire sur les formes vibratoires des corps solides ou liquides. (551).

Watson. — Troisième Lettre relative à la découverte des planètes intra-mercurielles. (552).

Mouchez. — Observations relatives à cette Lettre de M. Watson. (554).

Lévy (*M.*). — Réponse à une Communication de M. H.-F. Weber sur la Thermodynamique. (554).

Govi (*G.*). — Sur un nouveau micromètre destiné spécialement aux recherches métrologiques. (557).

N° 17; 22 octobre.

Chevreul. — Sur la vision des couleurs, et particulièrement de l'influence exercée sur la vision d'objets colorés qui se meuvent circulairement, quand on les observe comparativement avec des corps en repos identiques aux premiers. (576).

Brettes (*M. de*). — Observations complémentaires sur les for-

mules relatives au percement des plaques de blindage en fer. (589).

Hennedy (H.). — Observations, à propos d'une Communication de M. Amigues, sur l'aplatissement de la planète Mars. (590).

Boltzmann. — Remarques, au sujet d'une Communication de M. Maurice Lévy, sur une loi universelle relative à la dilatation des corps. (593).

Liguine. — Note relative au théorème sur la composition des accélérations d'ordre quelconque. (593).

Ce théorème, communiqué naguère à l'Académie par M. Laisant, que le calcul des quaternions y avait conduit, puis réclamé par M. Maurice Lévy, est revendiqué par M. Liguine au profit de M. Somoff.

Darboux. — Sur la rectification des ovales de Descartes. (595).

M. Genocchi, puis M. Samuel Roberts, ont donné la rectification des ovales de Descartes : « Les arcs de ces courbes peuvent toujours s'exprimer au moyen de trois arcs d'ellipse. » M. Darboux trouve en quelque sorte la raison géométrique de cette proposition, obtenue comme résultat de calcul, dans une propriété remarquable de ces ovales et de toutes les courbes anallagmatiques par rapport à quatre cercles orthogonaux deux à deux.

Si l'on prend les inverses d'un point de la courbe par rapport aux quatre cercles, puis les inverses de ces nouveaux points par rapport aux mêmes cercles, en répétant la même opération, on n'obtiendra pas un nombre illimité de points de la courbe, mais on formera simplement un groupe de huit points, tel que chacun d'eux ait pour inverse par rapport à l'un quelconque des cercles un autre point du même groupe. Dans le cas des ovales de Descartes, ces huit points sont inverses les uns des autres par rapport aux trois cercles orthogonaux décrits des trois foyers comme centres et sont symétriques par rapport à l'axe focal (qui formerait le quatrième cercle). Or on sait, d'après M. William Roberts, que la différence des arcs de l'ovale compris entre deux rayons vecteurs partant du même foyer, ou la somme, si les deux points où le rayon vecteur rencontre la courbe sont de côtés opposés par rapport au foyer, est égale à un arc d'ellipse. En appliquant ce théorème plusieurs fois, on détermine sans calcul les arcs décrits par les huit points, qui se montrent ainsi sous la forme d'une somme de trois arcs d'ellipse.

Desboves. — Deuxième Note sur la résolution en nombres entiers de l'équation

$$ax^4 + by^4 = cz^2.$$

(598).

N° 18; 28 octobre.

Gournerie (de la). — Note sur les travaux de M. Bienaymé. (617).

Faye. — Sur le « Pilote de Terre-Neuve » du vice-amiral Cloué. (625).

Flammarion. — Sur les étoiles doubles. (638).

Alexéieff. — Sur l'intégration de l'équation

$$Ay'^2 + Byy' + Cy^2 + Dy' + Ey + F = 0.$$

(641).

Serret (P.). — Sur l'involution dans les courbes de degré n. (643).

Escary. — Remarque relative à deux intégrales obtenues par Lamé dans la théorie analytique de la chaleur. (646).

Lévy (M.). — Réponse à une observation de M. Boltzmann. (649).

Gaugain (M.). — Sur l'aimantation des tubes d'acier. (649).

Perrodon. — Sur un téléphone avertisseur. (651).

N° 19; 4 novembre.

Mouchez. — Recherches sur la stabilité du sol et de la verticale de l'Observatoire de Paris. (665).

Lévy (M.). — Sur une loi universelle relative à la dilatation des corps. (676).

Gaillot (A.). — Sur la direction de la verticale à l'Observatoire de Paris. (684).

Boussinesq (J.). — Sur une propriété simple qui caractérise le mode de répartition du poids d'un solide posé sur un sol horizontal élastique, etc. (687).

Appell. — Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable. (689).

Si dans la série $S(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots$ le coefficient u_n reste positif pour les valeurs de n supérieures à un nombre déterminé, le produit $n^{1-p} u_n$, où p désigne un nombre positif quelconque, tend vers une limite A différente de zéro quand n croît indéfiniment; le produit $(1 - x)^p S(x)$ tend vers la limite $A\Gamma(p)$ quand x tend vers l'unité par des valeurs inférieures à 1.

Si dans la même série nu_n tend vers la limite A, différente de zéro, la limite pour $x = 1$ de $-\frac{S(x)}{\log(1-x)}$ est égale à A.

Darboux (G.). — Sur la rectification d'une classe de courbes du quatrième ordre. (692).

Considérons une courbe plane ou sphérique, anallagmatique par rapport à une sphère de centre O, dont nous désignerons le rayon par R. Soient M, M' deux points de la courbe, inverses ou réciproques par rapport à cette sphère, et soit P le point réciproque, par rapport à la même sphère, du point milieu du segment MM'. Quand le point M décrit un arc de la courbe, les points M' et P décrivent des arcs que nous appellerons *correspondants au premier arc*. Ces définitions admises, on a le théorème suivant :

« La somme (si R^2 est négatif) ou la différence (si R^2 est positif) de deux arcs correspondants de l'anallagmatique est égale à l'intégrale

$$A = \int \frac{R}{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x\,dy - y\,dx)^2 - (y\,dz - z\,dy)^2 - (z\,dx - x\,dz)^2}$$

étendue à l'arc correspondant de la courbe décrite par le point P, x, y, z désignant les coordonnées du point P par rapport à trois axes rectangulaires ayant leur origine en O. »

Dans le cas des quartiques bicirculaires ou des courbes d'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré, les courbes lieux des points P sont des coniques; en remplaçant x, y, z par leurs valeurs exprimées rationnellement au moyen d'un paramètre, on reconnaît que les intégrales A ne contiennent qu'un radical du quatrième degré. Il est donc démontré que l'arc des courbes considérées est une somme d'intégrales elliptiques.

M. Darboux arrive au même résultat en employant un système de coordonnées curvilignes étudié par lui dans son Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*.

N° 20; 11 novembre.

Lœwy. — Présentation du Mémoire qu'il a publié avec M. Stéphan sur la détermination des longitudes Paris-Marseille et Alger-Marseille. (705).

Chevreul (*E.*) — Sur la vision des couleurs, et particulièrement de l'influence exercée sur la vision d'objets colorés qui se meuvent circulairement, quand on les observe comparativement avec des corps en repos identiques aux premiers. (707).

Saint-Venant (*de*). — Sur la dilatation des corps échauffés et sur les pressions qu'ils exercent. (713).

Clausius (*R.*). — Sur l'énergie d'un corps et sa chaleur spécifique. (719).

Saint-Venant (*de*). — Rapport sur un Mémoire de M. Popoff, intitulé « Nouvelles recherches relatives à l'expression des conditions du mouvement des eaux dans les égouts. » (719).

Govi (*G.*). — De la mesure du grossissement dans les instruments d'Optique. (726).

Massieu. — Observations concernant le Mémoire de M. Lévy sur une loi universelle relative à la dilatation des corps. (731).

Oltramare (*G.*). — Sur la transformation des formes linéaires des nombres premiers en formes quadratiques. (734).

L'auteur s'occupe de rechercher directement les formes quadratiques qui répondent aux formes linéaires. Il indique un procédé général fondé en partie sur la considération de la fonction

$$\varphi(m) = 1 + \left(\frac{m}{1}\right)^2 + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^2 + \ldots$$

et donne une série de théorèmes relatifs aux formes

$$4m+1,\quad 8m+1,\quad 8m+3,\quad 6m+1,\quad 24m+1,\quad 24m+7,\quad 24m+5,$$
$$24m+11,\quad 20m+9,\quad 20m+3,\quad 20m+7,\quad 14m+1,\quad 30m+1;$$

le premier de ces théorèmes servira de type :

« Tout nombre premier μ de la forme $4m+1$ peut se mettre sous la forme x^2+y^2, et la valeur de x est donnée par la congruence

$$x \equiv \pm \tfrac{1}{2}\varphi(m) \pmod{\mu}. »$$

Darboux (*G.*). — Addition à la Note sur la rectification des ovales de Descartes. (741).

C'est M. Genocchi, et non M. Roberts, qui a le premier donné la rectification des ovales de Descartes.

C'est à M. Roberts lui-même qu'est dû ce renseignement.

Halphen. — Sur la réduction de certaines équations différentielles du premier ordre à la forme linéaire par rapport à la dérivée de la fonction inconnue. (741).

Dans le cas où l'équation

$$f(x, y, y') = 0$$

peut être remplacée par le système explicite

$$x = u(\xi, \eta), \quad y = v(\xi, \eta), \quad y' = w(\xi, \eta),$$

on pourra substituer à l'équation proposée l'équation différentielle, linéaire par rapport à la fonction inconnue η,

$$\left(w \frac{du}{d\eta} - \frac{dv}{d\eta}\right) \frac{d\eta}{d\xi} + w \frac{du}{d\xi} - \frac{dv}{d\xi} = 0.$$

En regardant x, y, y' comme les coordonnées d'un point de l'espace, si la surface représentée par l'équation (supposée entière)

$$f(x, y, y')$$

contient une série de courbes unicursales, la nouvelle équation différentielle continuera d'être rationnelle par rapport à la fonction inconnue, et, si la surface peut être représentée sur le plan, la nouvelle équation différentielle sera, en outre, rationnelle par rapport à la variable indépendante. L'équation différentielle traitée par M. Alexéief (n° 18) rentre dans le premier cas.

Picard (E.). — Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques. (743).

Suite de la Communication du 16 septembre 1878, relative à l'équation différentielle du second ordre

$$z \frac{dv'}{dz} = f(v, v', z) = av + bv' + cz + \ldots;$$

examen du cas où la partie réelle de b est négative et du cas où b est un entier positif.

Breguet (A.). — Sur la théorie des machines du genre de celles de Gramme. (746).

N° 21 ; 18 novembre.

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'astronome royal M. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le troisième trimestre de l'année 1878. (765).

Boltzmann (*L.*). — Nouvelles remarques au sujet des Communications de M. Maurice Lévy sur une loi universelle relative à la dilatation des corps. (773).

Gruey. — Sur un tourniquet gyroscopique alternatif. (775).

Werdermann (*R.*). — Sur un nouveau système de lampes électriques. (777).

Watson. — Planètes intra-mercurielles observées pendant l'éclipse totale de Soleil du 29 juillet 1878. (786).

Lévy (*M.*). — Sur le développement des surfaces dont l'élément linéaire est exprimable par une fonction homogène. (788).

Si l'élément linéaire ds d'une surface est donné par la formule

$$ds^2 = A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2,$$

A, B, C étant des fonctions homogènes de x, y, de degré μ, Bour a montré que, dans le cas où $\mu = -2$, la surface est applicable sur une surface de révolution. M. Lévy montre en général que : « Étant donnée une surface dont l'élément linéaire est exprimable par une fonction homogène d'un degré quelconque autre que -2, il existe une série de pseudo-moulures logarithmiques, avec deux constantes arbitraires, toutes applicables sur cette surface et, par suite, applicables les unes sur les autres ». Il entend d'ailleurs par pseudo-moulure logarithmique une surface engendrée par une courbe contenue dans un plan Oz qui tourne autour d'un axe et qui se déforme en restant constamment homothétique à elle-même relativement au point O, ses dimensions homologues croissant en progression géométrique, pendant que les angles dont tourne le plan croissent en progression arithmétique.

Farkas (*J.*). — Note sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. Extrait d'une Lettre communiquée par M. Yvon Villarceau. (791).

Sur les racines de l'équation en ρ, obtenue en éliminant θ entre les deux équations obtenues en substituant $\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ à la place de l'inconnue dans le premier membre d'une équation entière et en égalant à zéro la partie réelle et la partie imaginaire.

Laguerre (*F.*). — Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier. (820).

Soit

$$\frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)}$$

une réduite, $f_n(x)$ et $\varphi_n(x)$ étant deux polynômes du degré n; M. Laguerre démontre que $f_n(x)$ est une solution d'une équation différentielle linéaire de la forme

$$y'' - \left[\frac{2n}{x} + \frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} - F'(x)\right]y' - \frac{H'_n(x)}{x\Theta_n(x)}y = 0,$$

où Θ_n et H'_n désignent des polynômes dont les degrés respectifs sont $m-1$ et $2(m-1)$, m étant le degré de $F(x)$, et donne le moyen de déterminer ces polynômes par voie récurrente.

Badoureau (*A.*). — Sur les figures isoscèles. (823).

Lévy (*M.*). — Réponse à diverses Communications. (826).

Reynier (*E.*). — Réclamation de priorité au sujet de la Communication de M. Werdermann, sur une lampe électrique. (827).

Duter (*E.*). — Sur un phénomène nouveau d'électricité statique. (828).

Jamin. — Observations relatives à la Communication précédente. (829).

Flammarion (*C.*). — Étoiles doubles. Groupes de perspective certaine. (835).

André (*D.*). — Sur le nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données. (838).

N° 23; 2 décembre.

Saint-Venant (*de*). — Sur la torsion des prismes à base mixtiligne et sur une singularité que peuvent offrir certains emplois

de la coordonnée logarithmique du système cylindrique isotherme de Lamé. (849).

Govi (G.). — Sur un nouveau phénomène d'électricité statique. (857).

Quet. — De la force électromotrice d'induction qui provient de la rotation du Soleil, détermination de sa grandeur et de sa direction, quelle que soit la distance du corps induit. (860).

Perrier (F.). — Latitude d'Alger et azimut fondamental de la triangulation algérienne. (867).

Stephan (E.). — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (869).

Flammarion. — Étoiles doubles. Groupes de perspective certaine. (872).

Appell. — Évaluation d'une intégrale définie. (874).

Désignant par $F(x)$ la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, et par $F_n(x)$ la fonction analogue $F(\alpha+n, \beta-n, \gamma, x)$, on a

$$n(\beta-\alpha-n)\int_0^1 x^{1-\gamma}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}F(x)F_n(x)\,dx$$
$$=\frac{n\Gamma^2(\gamma)}{\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha-n)\Gamma(\gamma-\beta+n)}\right],$$

sous les conditions

$$\gamma>0,\quad 1>\gamma-\alpha-\beta>0.$$

N° 24; 9 décembre.

Lœwy. — Nouvelle méthode pour déterminer la flexion des lunettes. (889).

Saint-Venant (de). — Exemples du calcul de la torsion des prismes à base mixtiligne. (893).

Sylvester. — Sur la forme binaire du septième ordre. (899).

Table des 124 covariants irréductibles de la forme binaire du septième ordre; doutes relatifs à l'existence d'autres covariants irréductibles.

Ledieu (A.). — Étude sur les machines à vapeur ordinaires et Compound, les chemises de vapeur et la surchauffe, d'après la Thermodynamique expérimentale. (903).

Colladon (D.). — Sur les travaux du tunnel du Saint-Gothard. (905).

Lesseps (de). — Études de sondage entreprises par M. Roudaire, en vue de l'établissement de la mer intérieure africaine. (909).

Cosson. — Observations relatives à la Communication précédente. (911).

Werdermann (R.). — Réponse à M. E. Reynier, au sujet de son système de lampe électrique. (919).

Hospitalier. — Sur un régulateur automatique de courants. (920).

Boudet de Pâris. — Note contenue dans un pli cacheté et relative à un petit appareil téléphonique simplifié. (921).

Moncel (Th. du). — Observations relatives à la Note de M. Boudet de Pâris. (923).

Laguerre. — Sur la réduction en fractions continues d'une classe assez étendue de fonctions. (923).

L'auteur s'occupe des fonctions qui satisfont à une équation différentielle linéaire du premier ordre; le dénominateur des réduites qui en approchent satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre, qu'il apprend à former.

Desboves. — Sur un point de l'histoire des Mathématiques. (925).

Proth (E.). — Théorèmes sur les nombres premiers.

Tridon (L.). — Note sur l'ascension scientifique en ballon du 31 octobre.

N° 25; 16 décembre.

Ledieu (*A.*). — Étude sur les machines à vapeur ordinaires et Compound, les chemises de vapeur et la surchauffe, d'après la Thermodynamique expérimentale. (962).

Becquerel (*E.*). — Rapport sur une boussole marine avec aiguille de nickel, de M. Wharton. (955).

Gruey. — Réponse aux observations de M. Sire, sur un appareil gyroscopique. (958).

Duter (*E.*). — Sur un phénomène nouveau d'électricité statique. (960).

Carnot (*H.*). — Lettre accompagnant l'envoi d'une nouvelle édition des « Réflexions sur la puissance motrice du feu, par Sadi Carnot », et de divers manuscrits du même auteur. (970).

Mouchez. — Présentation de dessins astronomiques de M. Trouvelot. (970).

Ferrari (*P.*). — Sur les taches et protubérances solaires observées à l'équatorial du Collége Romain. (971).

André (*D.*). — Sur la sommation des séries. (973).

Sommation des séries dont le terme général est de la forme

$$U_n = \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} x^n,$$

où n est un entier positif et u_n le terme général d'une série récurrente quelconque.

Mansion. — Sur l'élimination. (975).

Boussinesq (*J.*). — Sur diverses propriétés dont jouit le mode de distribution d'une charge électrique à la surface d'un conducteur ellipsoïdal. (978).

Crova (*A.*). — Sur la mesure spectrométrique des hautes températures. (979).

Violle (*J.*). — Chaleur spécifique et chaleur de fusion du palladium. (981).

Joubert (*J.*). — Influence de la température sur le pouvoir rotatoire magnétique. (984).

N° 26; 25 décembre.

Dupuy de Lôme. — Explosion de matières fusantes. (1005).

Caligny (*A. de*). — Expériences sur les mouvements des molécules liquides des ondes courantes, considérées dans leur mode d'action sur la marche des navires. (1019).

Le Châtelier (*H.*). — Procédé pour mesurer avec précision les variations de niveau d'une surface liquide. (1024).

Farkas (*A.*). — Sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. (1027).

Mathieu (*É.*). — Sur la théorie des perturbations des comètes. (1029).

Tacchini (*P.*). — Résultats des observations solaires pendant le troisième trimestre de 1878. (1031).

Pictet et *Cellerier.* — Sur un nouveau thermographe et sur une méthode générale d'intégration d'une fonction numérique quelconque. (1033).

Becquerel (*H.*). — Rotation magnétique du plan de polarisation de la lumière sous l'influence de la Terre. (1035).

Duter. — Sur un phénomène nouveau d'électricité statique. (1036).

Ragona (*D.*). — Sur quatre époques singulières de la marche annuelle des éléments météorologiques.

N° 27; 30 décembre.

Lesseps (*de*). — Études de sondages entreprises par M. Roudaire, en vue de l'établissement de la mer intérieure africaine. (1059).

Callandreau (*O.*). — Détermination, par les méthodes de M. Gyldén, du mouvement de la planète (103) Héra. (1071).

Appell. — Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps en Mécanique. (1074).

Étant donné un système de points matériels assujettis à des liaisons indépendantes du temps et soumis à des forces qui ne dépendent que des positions des différents points, les intégrales des équations différentielles du mouvement de ce système restent réelles si l'on y remplace t par $t\sqrt{-1}$ et les projections des vitesses initiales αk, βk, γk par $-\alpha k\sqrt{-1}$, $-\beta k\sqrt{-1}$, $\gamma k\sqrt{-1}$. Les expressions ainsi obtenues sont les équations du nouveau mouvement que prendraient les mêmes points matériels si, placés dans les mêmes conditions initiales, ils étaient sollicités par des forces respectivement égales et opposées à celles qui produisaient le premier mouvement.

Boussinesq (*J.*). — Sur une loi intuitive d'après laquelle se répartit le poids d'un disque circulaire solide, supporté par un sol horizontal élastique. (1077).

Joubert (*J.*). — Rotation magnétique du plan de polarisation de la lumière sous l'influence de la Terre. (1078).

Goulier. — Sur un moyen de constater, avec une grande précision, le contact entre le mercure et la pointe d'ivoire de la cuvette d'un baromètre de Fortin. (1078).

Hughes. — Sur l'emploi du téléphone et du microphone pour les recherches scientifiques. (1079).

Ducretet. — Sur une nouvelle lampe électrique. (1081).

VIERTELJAHRSSCHRIFT DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN ZÜRICH (1).

21e année; 1876.

Fiedler (W.). — Remarques sur la symétrie et quelques autres questions de Géométrie. (50-66).

L'auteur montre que la théorie de la symétrie est d'un degré de généralité plus grand que celui qu'on lui attribue généralement dans les Traités de Géométrie; il montre les rapports de cette théorie avec celle de l'involution.

Henneberg (Lebrecht). — Note sur les surfaces minima qui ont pour ligne géodésique une parabole. (66-70).

Henneberg (Lebrecht). — Note sur la rotation des courbes algébriques planes. (71-72).

Wolf (R.). — Mélanges astronomiques; no XXXIX. (72-94).

Observations des taches solaires faites à Zürich en 1875, et nombres relatifs; remarques sur la courte période, les nombres relatifs et la variation de la déclinaison pendant cette année; nombre moyen des taches solaires observées chaque mois de 1819 à 1875; Note sur une nouvelle méthode pour déterminer l'équation personnelle. Observations des taches solaires, faites en 1875: à Zürich, par le professeur R. Wolf et par M. Billwiller; à Peckeloh, par le professeur Weber; à Palerme, par le professeur G. de Lisa; à Rome, par le P. Secchi; à Athènes, par le professeur Schmidt. Variations diurnes de la déclinaison observée en 1875 : à Prague, par le professeur Hornstein; à Milan, par M. Schiaparelli; à Munich, par M. Lamont.

Bernold (L.). — Observation d'un météore le 17 septembre 1871. (94-95).

Weilenmann. — Note sur les tempêtes tournantes et leur développement dans les hautes latitudes. (98-101).

Fritz. — Note sur les rapports entre les aurores polaires et les taches solaires. (109-111).

---

(1) Voir *Bulletin*, 2e série, t. I, p. 166.

Wolf (*R.*). — Publication de Lettres échangées en 1822 entre Littrow et Horner. (113-128).

Wolf (*R.*). — Mélanges astronomiques; n° XL. (129-172).

Notices nécrologiques sur H.-S. Schwabe et G. Schweizer. Catalogue des gravures, manuscrits et appareils historiques de l'Observatoire de Zürich.

Schwabe est né à Dessau le 25 octobre 1789 et mort dans cette même ville le 11 avril 1875; parmi les travaux astronomiques de cet astronome, le plus considérable est une série d'observations de taches solaires qui, entreprises en 1826, ont été poursuivies d'une manière continue jusqu'en 1868. A la suite de son intéressante Notice, M. R. Wolf a publié une série de Lettres adressées à lui par Schwabe et dans lesquelles l'astronome de Dessau fait connaître dans un style familier sa pensée intime sur toutes les questions de Physique solaire qui ont été agitées depuis 1851.

Schweizer est né à Wyla (canton de Zürich) le 10 février 1816 et mort à Moscou le 6 juillet 1873; il a successivement étudié l'Astronomie à Vienne avec Horner, à Dresde avec Lindenau, à Berlin avec Encke et enfin à Poulkova avec Struve. Depuis 1852, il était directeur de l'Observatoire de Moscou. Schweizer laisse de très-nombreuses observations méridiennes et nombre d'observations de comètes.

Fiedler (*W.*). — Géométrie et Géomécanique; Note sur le caractère de leur enchaînement d'après leur développement actuel. (186-228).

Wolf (*R.*). — Publication de la correspondance de Horner avec Littrow, Schiferli, Ebel, Eschmann, Lindenau, de 1823 à 1829. (240-256).

Wolf (*R.*). — Mélanges astronomiques; n° XLI. (257-284).

Nouvelles recherches sur l'influence de la position de l'oculaire et du miroir dans les observations de passage; mesure de l'équation personnelle. Anciennes séries d'observations pour la mesure de la hauteur du pôle à Zürich. Suite du Catalogue des instruments et appareils de l'Observatoire de Zürich.

Wolf (*R.*). — Notes sur l'histoire de l'invention des lunettes. (290-292).

Le savant professeur de Zürich mentionne que, dans une dissertation datée de 1816 et ayant pour titre « De tubi optici inventore », Scheiner attribue l'invention de la lunette à L.-B. Porta.

Wolf (*R.*). — Publication de la correspondance de Horner avec

Eschmann, Lindenau, Littrow, Finsler, Ertel, Schwickert depuis 1829 jusqu'en 1834. (314-336).

Wolf (*R.*). — Mélanges astronomiques; n° XLII. (337-368).

Observations des taches solaires faites à Zürich en 1876, calcul des nombres relatifs et des variations pour cette même période. Nombre relatif des taches solaires, de 1749 à 1876. Époques des minima et des maxima des taches solaires, depuis 1610 jusqu'en 1870. Courbe moyenne de la variation des taches solaires et comparaison de cette courbe avec la marche observée du phénomène. Présomption d'une longue période dans le phénomène des taches. Observations des taches solaires faites en 1876 : à Zürich, par le professeur Wolf et par le professeur Billwiller; à Peckeloh, par le professeur Weber; à Athènes, par M. J. Schmidt; à Moncalieri, par le P. Denza. Observations des variations diurnes de la déclinaison faites en 1876 : à Christiania, par M. Fearnley; à Prague, par le Dr Hornstein; à Milan, par M. Schiaparelli.

D'après l'ensemble des observations de taches solaires, M. Wolf a déterminé et résumé dans le Tableau suivant les époques des maxima et minima depuis 1610 :

Ancienne série.				Nouvelle série.			
Minima.		Maxima.		Minima.		Maxima.	
1610,8		1615,5		1745,0		1750,3	
	8,2		10,5		10,2		11,2
1619,0		1626,0		1755,2		1761,5	
	15,0		13,5		11,3		8,2
1634,0		1639,5		1766,5		1769,7	
	11,0		9,5		9,0		8,7
1645,0		1649,0		1775,5		1778,4	
	10,0		11,0		9,2		9,7
1655,0		1660,0		1784,7		1788,1	
	11,0		15,0		13,6		16,1
1666,0		1675,0		1798,3		1804,2	
	13,5		10,0		12,3		12,2
1679,5		1685,0		1810,6		1816,4	
	10,0		8,0		12,7		13,5
1689,5		1693,0		1823,3		1829,9	
	8,5		12,5		10,6		7,3
1698,0		1705,5		1833,9		1837,2	
	14,0		12,7		9,6		10,9
1712,0		1718,2		1843,5		1848,1	
	11,5		9,3		12,5		12,0
1723,5		1727,5		1856,0		1860,1	
	10,5		11,2		11,2		10,5
1734,0		1738,7		1867,2		1870,6	
Moyenne.	11,20		11,20		11,11		10,94

En moyenne, la période est donc de $11^{ans},11$.

Outre cette courte période de 11 ans, les taches solaires auraient encore, suivant M. R. Wolf, une période plus longue d'environ 177 ans et comprenant 6 périodes de 11 ans, ou 15 révolutions de Jupiter, ou 6 révolutions de Saturne, ou enfin 289 révolutions de Vénus. On a, en effet,

$$11,1111 \times 16 = 177,7777,$$
$$11,8616 \times 15 = 177,9240,$$
$$29,4566 \times 6 = 176,7396,$$
$$0,6152 \times 289 = 177,7928.$$

Fiedler (*W.*). — Les transformations birationnelles en Géométrie plane. (369-383).

Wolf (*R.*). — Note sur la correspondance de Jean Bernoulli. 384-386).

M. H. Gyldén a retrouvé dans les archives de l'Académie de Stockholm 549 Lettres de Bernoulli et 1027 Lettres à lui adressées par les principaux savants de l'époque. Parmi les Lettres de Bernoulli, 88 sont adressées à Varignon, 25 au marquis de l'Hospital, 8 à Euler, etc. Parmi les lettres adressées à Bernoulli, 163 sont de Varignon, 62 de L'Hospital, 17 d'Euler, etc. Il faut espérer qu'une partie de cette correspondance pourra être publiée par les soins de l'Académie de Stockholm.

Wolf (*R.*). — Publication de la correspondance de Horner avec Feer, Baader, Breitinger, H.-W. Brandes, Olbers, Cramer, Blumenbach, Krusenstern, Benzenberg, de 1796 à 1810. (388-416).

22e année; 1877.

Wolf (*R.*). — Mélanges astronomiques; n° XLIII. (1-36).

Nouveau calcul des formules de la variation magnétique diurne pour Milan, Munich, Prague, Berlin et Christiania; résumé de toutes les formules déjà obtenues. Études sur la marche annuelle de la variation diurne dans les stations de l'hémisphère nord et dans les stations de l'hémisphère sud, comme Trevandrum, Batavia et Hobarttown; influence de la fréquence des taches solaires. Observations des taches solaires faites à Palerme en 1876.

Gröbli (*W.*). — Recherches sur le mouvement de filets rectilignes parallèles. (37-81 et 129-165).

Fiedler (*W.*). — Notes sur la réforme de l'enseignement de la Géométrie. (82-97).

Wolf (*R.*). — Publication de la correspondance de Horner avec Krusenstern, Nic. Fuss, Benzenberg, Bohnenberger, de 1810 à 1811. (116-128).

Beck (*A.*). — Mémoire sur l'état physique et les mouvements de la Lune. (167-198).

Gyldén (*H.*). — Note sur la correspondance de Bernoulli découverte à Stockholm. (199).

Wolf (*R.*). — Publication de la correspondance de Horner avec Krusenstern et Brandes de 1811 à 1814. (209-224).

Wolf (*R.*). — Mélanges astronomiques; n° XLIV. (225-272).

Nouvelle détermination de la latitude de Zürich; différences de longitude de Pfänder-Zürich-Gäbris. Éléments de l'étoile double ζ Grande Ourse. Suite du Catalogue des instruments, appareils et collections de l'Observatoire de Zürich.

Les observations de la latitude de Zürich ont été faites en 1874 au cercle méridien de Kern; elles donnent

$$\varphi = 47°, 22' 39'', 991 \pm 0'' 004.$$

La différence de longitude déterminée en 1872 entre Zürich et Vienne donne, en tenant compte de la longitude de cette dernière ville par rapport à Paris, pour longitude de Zürich à l'est de Paris,

$$\alpha = 24^{m} 51^{s}, 75.$$

Weber (*H.-F.*). — Mesures électromagnétiques et calorimétriques absolues. (273-322).

Graberg (*F.*). — Note sur la réforme de la Géométrie. (323-355).

Wolf (*R.*). — Publication de la correspondance de Horner avec Gauss, Krusenstern et Schumacher, en 1814 et 1815. (345-352).

Wolf (*R.*). — Mélanges astronomiques; n° XLV. (353-392).

Les catalogues d'étoiles du landgrave de Hesse. Catalogue des instruments, appareils et collections de l'Observatoire de Zürich.

Les manuscrits de l'astronome Rothmann, qui observait dans l'Observatoire de Guillaume IV de Hesse, sont aujourd'hui conservés à Cassel; ils ont pour titres :

1° « Tabula insigniorum stellarum fixarum ab ipso principe observatarum anno 1566 et principio 1567 »;

2° « Tabula observationum stellarum fixarum per Distantias inter se et Altitudines earumdem meridianas, pro habendis earumdem Declinationibus et Ascensione recta, necnon Longitudinibus et Latitudinibus in Zodiaco, accuratissime observatarum et supputatarum a Christophoro Rothmano, Mathematico illustriss. Hessorum Principis Aulico, anno MDLXXXVI ».

3° « Catalogus stellarum fixarum ex observatis et dimensionibus Hassiacis, ad annum 1593 ».

4° « Christophori Rothmanni Bernburgensis, ill. principis Guilielmi, landgravii Hassiae, etc. Mathematici, observationum stellarum fixarum Liber primus ».

Ce dernier est en même temps une histoire de l'Observatoire du landgrave de Hesse et une description complète de ses instruments.

Wolf (*R.*). — Publication de la correspondance de Horner avec Krusenstern, Dan. Huber, Schlichtegroll, Brandes, Trechsel, de Veley, Schenk, W. Struve et Buzengeiger, de 1815 à 1819. (422-444). G. R.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME II; 1878. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Årsskrift. T. X-XIII; 1873-1877. — 181-184.

Annales des Mines. 7e Série, t. X-XII; 1876-1877. — 105-106.

Annales des Ponts et Chaussées. 5e série, t. VI-VIII; 1876-1877. — 106-111.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 2e série, t. V-VI; 1876-1877. — 149-151.

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona. 2e série, t. VIII; 1877. — 9-11.

Archiv der Mathematik und Physik, gegründet von J.-A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. T. LXI; 1877-1878. — 5-9.

Astronomische Nachrichten, begründet von H.-C. Schumacher, herausgegeben von C.-A.-F. Peters. T. XCI-XCIII, nos 2161-2232; 1877-1878. — 156-181.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. T. XXIX-XXX; 1875-1877. — 102-104.

Atti della R. Accademia dei Lincei. 2e série, t. III; 3e série, t. I; 1875-1877. — 77-84.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. T. XII-XIII; 1876-1878. — 252-256.

Bulletin de la Société Mathématique de France. T. V-VI; 1876-1878. — 133-137 et 256.

Bulletins de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XLI-XLIV; 1876-1877. — 236-250.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. T. X; 1877. — 191-196.

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, kterýž rediguje Dr F.-J. Studnička. T. VI-VII; 1877-1878. — 69-73.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXXV-LXXXVI; juillet 1877-juin 1878. — 22-36 et 54-68.

Giornale di Matematiche, pubblicato da G. Battaglini. T. XV; 1877. — 197-200.

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira. T. I; 1877-1878. — 185-188.

Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes. Publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. T. I-V; 1866-1876. — 188-191.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par J. Liouville et continué par H. Resal. 3e série, t. III; 1877. — 48-54.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt. T. LXXXII-LXXXIII; 1877. — 42-48 et 221-227.

Matematitcheskii Sbornik, izdavaïémyi Moskovskim matematitcheskim Obchtchestvom. T. VIII; 1876-1877. — 21-22.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8°. T. XXVI-XXVII; 1875-1877. — 250-251.

The Messenger of Mathematics, edited by W.-A. Witworth, C. Taylor, etc. T. VII, 1877-1878. — 73-77.

Monatsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1877. — 184-185.

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of London. T. XXXVII-XXXVIII; novembre 1876-juin 1878. — 11-20 et 203-215.

Nouvelle Correspondance mathématique, rédigée par E. Catalan. T. III; 1877. — 111-117.

Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Brisse. 2e série, t. XVI; 1877. — 117-127.

The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 4e série, t. XLV-L; 5e série, t. I-V; 1873-1878. — 84-101.

Proceedings of the London Mathematical Society. T. VIII; 1876-1877. — 145-148.

Proceedings of the Royal Irish Academy. 2e série, t. II; 1875-1876. — 215-217.

The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. T. XIV-XV; 1877-1878. — 137-145.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. T. VIII; 1875. — 200-202.

Revue d'Artillerie. T. VIII-X; avril 1876-mars 1878. — 127-133.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. T. LXXII-LXXV; juin 1875-mai 1877. — 228-235.

The Transactions of the Royal Irish Academy. T. XXV-XXVI; 1874-1878. — 217-221.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von O. Schlömilch, E. Kahl und M. Cantor. T. XXIII; 1878. — 151-155.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann. T. VII-VIII; 1876-1877. — 36-42.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Abbadie (d'). 57, 63, 65, 68.
Abbe. 14.
Abney. 17, 92, 211.
Adams (J.-C.). 75, 205, 214.
Adams (W.-G.). 92.
Addison. 206.
Aguiar Craveiro Lopes (d'). 186.
Airy. 14, 16, 18, 87, 93, 203, 210, 212, 214.
Aitken. 101.
Albrecht. 161, 178.
Alexander (St.). 161.
Alexéief. 276.
Allard. 107.
Allé. 229, 230, 232.
Allégret. 54.
Alluard. 271.
Amagat. 271.
Amanzio. 199.
Amigues. 54, 125, 126.
Amorim Vianna. 186, 187, 188.
Andræ (v.).
André (Ch.). 67, 150.
André (D.). 30, 34, 64, 66, 68, 125, 136, 149, 150, 260, 262, 281, 284.
Andréievsky. 119.
Angot. 19.
Anonyme.
Aoust. 24, 29.
Appell. 6, 8, 63, 150, 277, 282, 286.
Arcimis. 12, 16, 19.
Armellini. 102, 103.
Armenante (A.). 77.
Aron. 225.
Arzelà. 197.
Ascoli. 77.
Asten (v.). 169.
Astier. 129.
Åstrand. 169.
Attfield. 91.
Austin. 165.
Aymonnet. 265, 272.
Ayrton. 101.
Azzarelli. 102, 103, 104.
Backhouse. 17.
Bäcklund. 181, 183.
Badoureau. 281.
Baillaud. 150.
Baille. 60, 61, 63.
Baills. 33, 35.
Baily. 95, 99.
Ball (R.-St.). 16, 216, 217.
Bardelli. 201.
Bardey. 38, 41.
Barros Gomes. 190.
Basso. 255.
Battaglini. 80.
Baudys. 69.
Bauer (A.). 40, 41.
Baumgartner. 235.
Beauvais. 118.
Beck. 290.
Bečka. 69.
Becker (E.). 169, 171.
Becker (J.-K.). 155.
Beckerhinn. 230.
Becquerel (E.). 284.
Becquerel (H.). 285.
Belgrand. 62.
Bellavitis. 80, 187.
Belovič. 38.
Beltrami. 79.
Bender. 36.
Bergeron. 120.
Bérigny. 26.
Bernold. 287.
Bertelli. 102.
Berthelot. 151.

Bertin (L.-E.). 102.
Bertini. 9, 10, 82, 200.
Bertrand (A.). 123.
Bertrand (Ém.). 35.
Bertrand (J.). 28, 63.
Betti. 10, 11, 83.
Beuf. 61.
Bielmayr. 38.
Bierens de Haan. 86.
Bigourdan. 63.
Binder. 40, 41.
Birmingham. 220.
Birt. 87.
Blondelot. 267.
Bode (J.). 40.
Boileau. 26, 34, 35, 58. 265.
Boltzmann. 229, 233, 235, 275, 280.
Bomhard. 41.
Boncompagni. 104, 193, 194, 196.
Bonnet. 51.
Bonolis. 198.
Borchardt. 226, 252.
Borrelly. 24.
Bosanquet. 85, 91, 93, 94, 96, 98, 99, 211.
Bossert. 25, 176, 268.
Boudet de Pâris. 283.
Bougaïef. 21, 22.
Bourget. 149.
Bourguet. 121, 123.
Boussinesq. 23, 27, 35, 51, 55, 59, 62, 63, 66, 270, 272, 273, 276, 284, 286.
Boutigny. 28, 31.
Bouty. 91, 149.
Boys. 206.
Brault. 30.
Bredikhine. 21, 178.
Bréger. 130.
Breguet. 279.
Bresse. 110.
Breton (de Champ). 50, 52.
Breton (Ph.). 115.
Brett. 15, 205, 212.
Brettes (de). 274.
Brioschi (F.). 9, 30, 33, 35, 58, 77, 78, 82.
Brisse. 118, 126.
Brocard. 111, 112, 113, 114, 115, 120, 122, 126, 133, 134.
Brough. 88, 99, 100.
Broun. 24, 58, 59, 62, 65.
Browne (C.-O.). 95.
Bruhns. 156, 163, 164, 166, 167, 173, 174, 178.
Brune. 107, 109.
Brunot. 125, 127.
Burbury. 94, 99.
Burmester. 152.
Burnham. 17, 162, 167, 170, 174, 175, 206, 212, 214.
Burton. 215, 220.
Butcher. 146, 147.
Buys-Ballot. 29.
Caligny (A. de). 32, 33, 34, 36, 54, 285.
Callandreau. 29, 34, 61, 286.
Campbell. 17.
Candido. 186, 188.
Canestrelli. 272.
Cantoni (G.). 201, 202.
Cantor (M.). 155.
Caporali. 83.
Capron. 18.
Carnot (H.). 284.
Carpenter. 89, 94.
Casey. 215.
Casorati. 77, 83, 202.
Caspary. 223.
Cassani. 199.
Catalan. 111, 113, 114, 115, 126, 237, 238, 240, 241, 244, 245, 246, 247, 249.
Cayley. 14, 24. 25, 26. 73, 74. 75, 76. 89, 100, 137, 138, 139, 140, 142, 143, 144, 145, 147, 148, 226.
Cellerier. 285.
Cerruti. 77, 79, 83.
Challis. 87, 85, 90, 94, 95, 96, 97, 98, 101.
Chambers (G.-F.). 212.
Chapelas. 26.
Charrier. 254.
Chase. 93, 95, 96, 97, 100, 101.
Chasles. 25, 26, 250, 264.
Chevreul. 274, 278.
Childe. 139, 140.
Christie. 12, 13, 14, 20, 204. 208. 214.
Christoffel. 9, 10.
Chwolson. 151.
Clarke. 100.
Clausius. 44, 86, 87, 89, 92, 95, 100, 227, 278.
Clebsch. 9.
Clifford. 148.
Coates. 145.
Coatpont (de). 113, 114.
Cockle (sir J.). 91, 94, 138, 139, 141, 142.
Codazza. 201.
Coggia. 168.
Cole. 212.
Colladon. 283.
Collet. 49, 149.
Collignon (E.). 107, 109.
Comberousse (de). 121.
Common. 207.

Compagnon. 127.
Copeland. 12, 20, 207, 213.
Cornu. 58, 60, 61, 63, 65.
Cosson. 283.
Cottenot. 57, 58, 175.
Cotterill. 95, 148.
Cremona. 78, 80.
Crocchi. 197.
Crofton. 148.
Croker. 74, 75.
Croll. 88, 89, 93, 94, 96, 100.
Crookes. 58, 90.
Crova. 265, 269, 285.
Cruls. 34, 270.
Čubr. 8.
Cunningham. 140.
Dainelli. 200.
Da Motta Pegado. 187, 189, 190.
Da Ponte Horta. 185, 188. 189, 190.
Darboux. 60, 64, 135, 275, 277, 278.
Da Rocha Peixoto. 186.
Darwin (G.). 13, 94, 97, 98.
Da Silva. 185, 188, 189, 190.
Daubrée. 23, 24, 273.
Davis (A.-S.). 85.
Davis (W.-S.). 90.
Day. 139.
De Boë. 19.
Decharme. 267, 269, 274.
Decœur. 108.
Dedekind. 227.
Deichmüller. 157.
Dembowski. 168, 169.
Denning. 14, 18, 171, 208, 210, 212.
Denza. 103.
Desboves. 118, 122, 127, 256, 268, 273, 275, 283.
Desgardins. 121.
Desimoni. 104.
Dessoudeix. 123.
De Tilly. 113, 239, 241, 244, 246, 247, 269.
Deville (R.). 132.
Dieckmann. 37.
Dini. 10, 77, 82.
Discher. 153.
Ditscheiner. 231.
Ditte. 149.
Doberck. 159, 164, 166, 167, 169, 170, 171, 218, 219.
Dobiński. 8, 9.
Dombre. 131.
Doolittle. 161.
Dorna. 252, 254, 256.
Dostor. 6, 8.
Doubiago (de). 157.
Downing. 19, 207, 210, 215.
Drach. 75, 148.
Draenert. 40, 41.
Dreyer. 19, 216, 220.
Dubois. 57, 117.
Duclaux. 61.
Ducretet. 286.
Duguet. 131.
Dumas (J.-B.). 28.
Du Moncel. 23, 26, 27, 29, 30, 264, 265, 267, 269, 283.
Dumont. 270.
Dunér. 171, 173, 179, 183.
Dunkin. 203, 204.
Duprez. 238.
Dupuy. 110.
Dupuy de Lôme. 64, 285.
Durège. 229, 231.
Durham. 28.
Duter. 24, 150, 281, 284, 285.
Dvořák. 228.
Earnshaw. 96, 99.
Eastman. 211.
Edison. 268.
Ellery. 20, 212.
Elliot. 150.
Elliott. 76, 145, 147.
Emsmann. 37, 39.
Ennis. 98.
Erck (W.). 15, 209, 211.
Erdmann. 43, 155.
Erler. 39, 40, 41.
Escary. 55, 64, 67, 123, 276.
Escherich (v.). 234.
Everett. 85.
Exner. 230, 234.
Faà de Bruno. 65, 66, 144.
Fabritius. 174.
Farkas. 274, 280, 285.
Faure. 117.
Favaro. 193.
Favé. 55, 57, 59, 60, 61.
Faye. 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 64, 67, 265, 269, 276.
Fearnley. 168, 170.
Ferrari. 102, 103, 104, 177, 200, 284.
Ferraris (G.). 255, 256.
Ferrel. 95.
Ferrers. 137, 142.
Ferrini. 201.
Fiedler. 287, 288, 289, 290.
Filcik. 73.
Fischer. 6.
Finger. 228.
Finlay. 12.
Flammarion. 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 243, 276, 281, 282.

Flye Sainte-Marie. 51. 136.
Foglini. 103.
Folie. 236, 237, 238. 239, 240, 241, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249.
Forel. 97.
Formenti. 199, 201.
Förster. 164, 172.
Foster. 92, 94.
Fouret. 23, 31, 32, 35, 60, 61, 106, 133, 135, 258.
Francard. 130.
Francke (J.). 53, 223.
Frankland. 146.
Franz. 162, 168, 171.
Frattini. 197.
Fréson. 113, 121.
Friedlein.
Frischauf. 40.
Fritz. 287.
Frobenius. 23, 47, 225.
Frombeck. 231, 233.
Fromme. 95.
Frost (A.-H.). 139, 141, 142, 143.
Frost (P.). 139.
Fuchs. 32, 222.
Fürst. 70.
Gaillot. 267, 272, 276.
Galle (J.-G.). 172.
Galton. 91.
Garbieri. 198.
Gasparis (de). 16, 83.
Gatti. 197.
Gaugain. 276.
Gautero. 80.
Gauthier (R.). 157, 167, 179.
Gautier (A.). 128.
Gegenbauer. 229, 232, 234, 235.
Geiser. 10, 44.
Gelin. 113.
Genese. 74, 118, 137.
Genocchi. 8, 25, 59, 196, 252, 254, 255.
Gericke. 159, 169.
Gernez. 149.
Gerono. 124.
Ghysens. 112, 114, 245, 248, 249.
Giesen. 151, 155.
Gilbert. 36, 55, 67, 121.
Gill. 17, 19, 203, 205.
Ginzel. 158, 159.
Giraud-Teulon. 24.
Gladstone. 100.
Glaisher (J.-W.-L.). 18, 20, 74, 75, 76, 85, 86, 89, 90, 91, 92, 94, 96, 138, 140, 142, 143, 144, 145, 146, 147,
Glashan. 85, 92.
Gledhill. 13.
Godward. 208.
Gohierre de Longchamps. 32, 113, 115, 199.
Gomes Teixeira. 185, 187, 190.
Gorceix. 150.
Gould. 176, 179.
Goulier. 286.
Govi. 26,33, 34, 77, 274, 278, 282.
Graberg. 291.
Grassi. 201.
Grassmann (H.). 223.
Grassmann (R.). 40.
Gray (P.). 74.
Green (N.-E.). 205.
Greenhill. 139, 140, 142, 143,144.
Greg. 211.
Greiner. 7.
Gröbli. 290.
Gruber. 157.
Gruey. 29, 66, 270, 274, 280, 284.
Gruss. 70.
Gundelfinger. 225.
Gundlach. 160.
Günther (S.). 37, 38, 39, 40, 41, 42, 193.
Güntner. 230.
Guthrie. 93.
Guyon. 36, 66.
Gyldén. 179, 290.
Haag, 136.
Hain. 6, 7, 9.
Hajech. 202.
Hajniš. 71.
Hall (Asaph). 156, 160, 166, 175, 209.
Hall (M.). 207.
Halphen. 133, 135, 136, 257, 260, 263, 279.
Hamburger. 225.
Handl. 228.
Hann. 232.
Haretu. 27.
Harkema. 122.
Harkness. 14, 214.
Hart. 75, 148, 219, 221.
Hartwig. 156.
Haton de la Goupillière. 31, 135.
Hatt. 57.
Hauck. 39, 42.
Heat. 98.
Heaviside. 85, 88, 94, 96, 98.
Hébert. 64.
Heiberg. 155.
Hejzlar. 71.
Helm. 154.
Helmert. 161.
Helmholtz. 101, 184.
Henneberg. 287.
Hennedy. 275.
Henrici. 38.
Henry (J.). 26, 27.

Henry (Paul). 27, 28, 29, 30, 31, 63, 158, 168.
Henry (Pr.). 27, 28, 29, 30, 31, 62, 63, 158, 267.
Herdner. 105.
Hermite. 29, 30, 31, 33, 34, 35, 48, 57, 59, 61, 62, 68, 186.
Herschel (A.-S.). 91, 212.
Herschel (J.). 89.
Hesse (F.-G.). 89.
Hicks. 98, 99, 140, 144.
Hildebrandsson.
Hill (G.-W.). 162.
Hind. 14, 16.
Hioux. 124.
Hirn. 273.
Hirst. 11, 82, 148.
Hočevar. 232.
Hochheim. 154.
Hochmann. 22.
Holden. 15, 165, 175.
Holetschek. 156, 160, 161, 167, 175.
Holzmüller. 223.
Hopkinson. 85.
Hoppe. 6, 7, 8, 9.
Horner. 140.
Hornstein. 172.
Hospitalier. 283.
Houdek. 71.
Houzeau. 238, 240, 241, 243, 248.
Hove. 159.
Howlett. 18.
Hoza. 6, 7, 69, 70.
Hromádko. 69, 70, 71, 72.
Hudson. 74, 86.
Huggins. 207.
Hughes. 286.
Hunyady. 224.
Hurion. 150.
Igel. 232, 233, 234, 235.
Imchenetsky. 21.
Jacoli. 191.
Jamet. 122, 123, 125.
Jamin. 281.
Janssen. 25, 28, 30, 35.
Jarolímek. 69.
Jeffery. 138, 139, 142, 143, 144.
Jelinek. 230.
Jellett. 218.
Jenkins. 211.
Johnson (S.-J.). 19, 20, 175, 211.
Johnson (W.-W.). 74.
Joly (A.). 150.
Jonquières (de). 11, 270.
Jordan (C.). 136, 267.
Jouart. 128, 130. 132.
Joubert (J.). 272, 285, 286.
Joukovsky. 21, 22.
Jung. 202.
Junghans. 155.
Kantor (S.). 155.
Karlinski. 159, 160, 165, 166.
Keller (Fil.). 79, 83.
Kempe. 75, 76, 113.
Kerr. 93, 98, 101.
Kessler. 151.
Ketteler. 97.
Killing. 40.
Kinahan. 215.
Kirchhoff. 184.
Kleitz. 106, 108, 109, 111.
Klekler. 8, 38.
Klinkerfues. 158, 169.
Klug. 8.
Knorre (V.). 180.
Knott. 14, 17, 211.
Koláček. 70.
Kolářík. 72.
König (R.). 95.
Konkoly (v.). 172, 177, 213.
Koppe. 6.
Kořistka. 70.
Korneck. 41.
Kostka. 46.
Kötteritzsch. 153.
Koutny. 235.
Kronecker. 184.
Krueger. 175.
Krüss. 163.
Kuckuck. 36.
Külp. 9.
Kundt. 92.
Kunerth. 233.
Kurländer. 157.
Kurz. 38, 39.
Lacour. 272.
La Gournerie (de). 25, 60, 276.
Lagout. 123.
Lagrange (C.). 246.
Laguerre. 59, 63, 66, 133, 134, 135, 258, 259, 260, 261, 281, 283.
Laisant. 52, 115, 122, 125, 262, 264, 267, 269.
Lalanne (L.). 33, 120, 266, 269.
Lamb. 74, 137, 148.
Lamey. 27, 58, 265.
Lang (v.). 232, 235.
Langley. 12, 213.
Lapierre. 127.
Lassell. 14.
Laurent (H.). 118, 119.
Lavoinne. 108.
Léauté. 33, 67, 68, 263. 266.
Le Besgue. 120.

Le Châtelier. 285.
Ledieu. 283, 284.
Ledoux. 105.
Lefèvre. 131.
Lemoine. 57.
Lemonnier. 150, 261.
Le Paige. 112, 113, 238, 240, 244, 248, 249.
Leppig. 173, 178, 179.
Lesseps (de). 266, 283, 286.
Letnikof. 22.
Leudesdorf. 76, 147.
Leveau. 59, 167, 265.
Le Verrier. 25, 28.
Lévy (Maur.). 32, 33, 34, 35, 36, 51, 55, 57, 59, 62, 63, 64, 67, 268, 271, 272, 274, 276, 280, 281.
Lez. 123.
Liagre. 237, 238.
Lieber. 42.
Liguine. 275.
Lindemann. 135, 264.
Lindsay (lord). 11, 17, 20, 207, 213.
Lindstedt. 172, 184.
Lippich. 229, 234.
Lipschitz. 48, 55.
Listing. 179, 180.
Litborn. 170.
Liventsof. 21.
Lloyd. (H.). 221.
Lockyer. 58.
Lodge. 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 101.
Lœwy. 34, 35, 57, 277, 282.
Lorentz. 153.
Lorsch. 155.
Loschmidt. 231, 234.
Lovering. 91.
Lucas (Ed.). 10, 23, 74, 75, 76, 77, 111, 112, 114, 115, 117, 118, 121, 126, 135, 136, 191, 254, 256, 258, 259.
Lühmann (v.). 42.
Luther (E.). 172.
Luther (R.). 162, 164, 172, 175, 176, 179.
Mach. 228, 229, 234.
Machovec. 71, 72.
Mack. 8.
Magnac (A. de).
Mailly. 250.
Main. 18.
Makarewitsch. 62.
Malet (J.-C.). 217, 218, 221.
Mallard. 105.
Mallet. (R.). 90.
Malmsten. 226.
Mannheim. 23, 30, 31, 32, 66, 76, 136, 137, 256.
Mans. 241.
Mansion. 74, 75, 111, 112, 114, 115, 116, 194, 242, 247, 284.
Mantel. 40.
Maquenne. 272.
Marco. 254.
Margules. 235.
Marrecas Ferreira. 186, 187.
Marth. 13, 14, 16, 17, 172, 173, 207, 210, 212, 214.
Martin (A.). 151.
Martin (Art.). 74.
Mascart. 58, 150.
Massieu. 105, 278.
Matern. 39.
Mathieu (É.). 48, 51, 63, 285.
Matthiessen. 37, 153.
Maunder. 12, 13, 20, 204.
Mauritius. 42.
Maxwell. 88.
Mayer (A.-M.). 84, 90, 92, 97.
Mehmke. 154.
Meigs. 19.
Méray. 150.
Merriman. 93.
Merten (J.). 229.
Mertens. 46, 225.
Metzger. 180.
Meutzner. 6. 8.
Meyer (M.-W.). 179.
Michel Lévy. 106.
Milinowski. 152, 153, 154.
Minich. 78, 266.
Minozzi. 199.
Mister. 112.
Möller. 181, 183.
Montigny. 238, 239.
Moon. 84, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 96.
Moraes de Almeida. 191.
Moreau. 124, 125.
Moret-Blanc. 118, 122, 123, 124.
Moshammer. 231, 232.
Mouchez. 25, 33, 57, 65, 267, 268, 269, 272, 273, 274, 276, 280, 284.
Mouchot. 64, 272.
Mouton. 150.
Muffat. 124.
Muir. 86, 89, 97, 98, 147.
Müller (Hub.). 37.
Müller (J.-J.). 90.
Müller (in Neustr.). 36, 38.
Naegelsbach. 5.
Nanson. 75, 76.
Narducci. 83.
Neison. 14, 16, 18, 205, 208, 209, 214.
Nell. 7.
Netto. 223, 224.

Neuberg. 113.
Newcomb. 15, 19, 227.
Nichol. 174.
Nichols. 87, 95.
Nicodemi. 198.
Niemtschik. 230.
Niessl. 177, 178, 235.
Niewenglowski. 25.
Niven. 73, 74, 75, 98, 140, 144, 146.
Noble. 85, 213.
Obermayer (v.). 231, 235.
Odstrčil. 72, 229.
O'Kinealy. 90.
Oltramare. 278.
Oppenheim. 177.
Oppolzer (v.). 163, 164, 168, 170.
Osorio de Vasconcellos. 189.
Ovidio (d'). 78, 80, 198, 252.
Paci. 199.
Padelletti. 197.
Page. 132, 133.
Palisa. 31, 58, 61, 156, 158, 160, 166, 171, 173, 174, 177.
Pánek. 69, 70, 72.
Paolis (de). 79.
Parville (de). 31, 32, 270.
Paschkiewitch. 128.
Pastorček. 71.
Pellat. 65, 66.
Pellet. 64.
Pelletreau. 108, 110.
Pellissier. 118.
Pelnář. 69, 71.
Pelz. 231, 234.
Pendlebury. 76.
Penrose. 12, 16, 19, 212.
Pepin (le P.). 24, 57, 104.
Pereira Caldas. 187.
Perrier. 57, 282.
Perrin. 61, 134, 259.
Perrodil (de). 106, 108.
Perrodon. 276.
Perrotin. 57, 60, 65, 265.
Perry (S.-J). 13, 16, 18, 101, 206.
Peschka. 235.
Peters (C.-A.-F.). 161, 165. 169.
Peters (C.-F.-W.). 156, 159.
Peters (C.-H.-F.). 58, 60, 156, 157, 162, 166, 169, 172, 173, 177, 178, 264, 271, 273.
Peterson. 21.
Petruscheffsky. 160.
Pfaundler. 230, 231.
Phillips. 54, 66, 67, 68.
Picard (E.) 61, 150. 270, 279.
Pick (A.-J.). 38, 41.
Pick (G.-A.). 38, 40.
Pickering. 88. 167, 177.
Picquet. 58, 64. 259, 271.
Pictet. 96, 285.
Pietzker. 41.
Pina Vidal (de). 190.
Pinto. 188.
Pisani. 127.
Pittarelli. 200.
Plank. 228.
Plantamour. 68.
Planté. 269.
Plarr. 67.
Plašil. 72.
Plateau. 241, 243.
Plath. 174.
Plisa. 156.
Plummer (J.-J.). 14, 20, 212, 213.
Plummer (W.-E.). 158, 205.
Poey. 30.
Polignac (de). 134, 262.
Potier. 68.
Poujade. 121.
Pratt (H.). 205.
Pravaz. 118.
Preston. 98, 99, 101.
Preuss. 153.
Prince. 212.
Priou. 132.
Pritchard. 18, 212.
Pritchett. 160, 167, 173, 180.
Procházka. 72.
Proctor. 19, 20, 210, 212.
Proth. 117, 283.
Prym. 46, 226.
Puluj. 228, 232.
Purvis. 89.
Puschl. 228, 229, 231, 235.
Quet. 61, 62, 66, 282.
Quetelet (E.). 240, 243, 244.
Radau. 64.
Ragona. 286.
Rarchaert. 105.
Rawson. 74, 75.
Rayleigh (lord). 73. 74. 86. 87. 88, 89. 90, 91, 92, 95, 97. 98.
Realis. 114.
Reber. 65.
Rebout. 123.
Reidt. 36, 42.
Reinemund. 245.
Reis. 39.
Reiss. 114.
Renou. 58.
Resal. 22, 50. 51. 52. 107. 119.
Respighi. 78, 80. 82, 83.
Rey. 125.
Reye. 42, 44. 46.

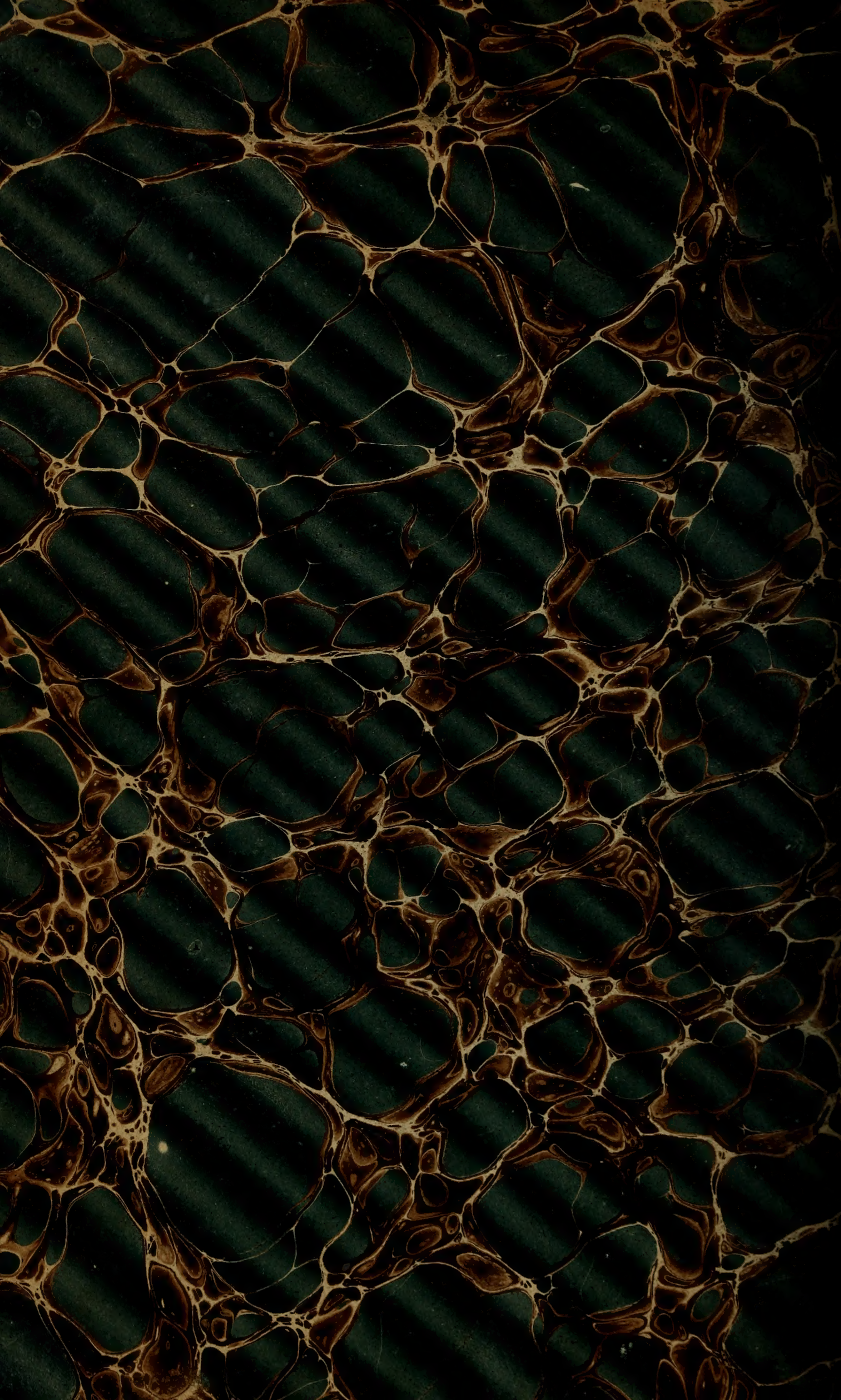
Reynier. 281.
Reynolds. 87, 91.
Riccardi. 194, 196.
Ricci. 198.
Riccò. 77.
Richelmy. 255.
Richi. 269.
Righi. 123.
Roberts (S.). 142, 144.
Robinson. 215.
Roche. 59, 112.
Rodet. 261.
Rodgers. 20, 158, 211.
Roiti. 78, 80, 83.
Rosický. 228, 232.
Rossi (de). 103.
Rossi-Re (de). 102.
Rouché. 120.
Rouquet. 120.
Rowland. 87, 90, 93.
Royston-Pigott. 17.
Rümker. 171.
Russell (H.-C.). 20, 204.
Russell (W.-H.-L.). 73.
Rutherford. 212.
Sabine. 95.
Sadebeck. 159.
Safford. 204, 210. 214, 215.
Saint-Germain (de). 53.
Saint-Robert (de). 202.
Sainte-Claire Deville. 149.
Saint-Venant (de). 62, 265, 278, 281, 282.
Salicis. 29.
Salisbury (marquis de). 85.
Saltel. 236, 240, 241, 243, 244, 251.
Šanda. 72.
Saviotti. 80.
Sawyer. 168.
Sayno. 201, 202.
Schadwill. 41.
Scheffler (H.). 41.
Schell. 234.
Schellhammer. 152.
Schendel. 46.
Schering. 67.
Schiaparelli. 160, 162. 200, 201, 202.
Schiappa Monteiro. 186, 187, 188.
Schilling. 90.
Schläfli.
Schlegel (V.). 38, 39, 40. 153, 154, 155.
Schlömilch. 152, 153, 154.
Schmidt (J.-F.-J.). 157, 160, 162, 163, 165, 166, 172, 175, 176, 179, 180.
Schönflies. 153, 154.
Schottky. 227.
Schrader (Fr.). 34.
Schröder. 41.
Schulhof. 65, 68, 164, 173, 175, 179.
Schulze. 177.
Schumacher (R.). 158.
Schur. 156, 163, 168.
Schuster. 91.
Schwab. 168, 177.
Schwarz (in Gumb.). 37.
Schwendler. 85, 90, 91, 94, 96.
Schwering. 154.
Seabroke. 204.
Sebert. 266.
Secchi. 55, 102, 103, 104.
Seeliger. 157, 160, 180.
Selling. 49.
Serres. 68.
Serret (J.-A.). 24.
Serret (P.). 55, 59, 276.
Seydler. 69, 70, 71, 235.
Shadwell. 19.
Sharpe. 91, 142.
Siacci. 255.
Siebel. 6.
Šimerka. 71.
Skinner. 174.
Sloudsky. 22.
Smith (H.-J.-S.). 78, 82, 98, 145, 146.
Smyth (P.). 91.
Sommer. 234.
Souillart. 159, 175.
Souza Pinto (de). 186.
Sparre (M. de). 127, 128.
Spée. 236, 244.
Spitzer. 8.
Spoerer. 158, 163. 175.
Spottiswoode. 145.
Spring. 237, 238. 240.
Stammer. 36.
Stark. 228, 232.
Steadman Aldis. 144.
Steen. 144.
Stefan. 228. 233.
Steichen. 238.
Steinschneider. 193.
Stephan. 18, 23, 24. 26, 27. 63, 282.
Sterneck (v.). 232.
Sterry-Hunt. 271
Stickelberger. 44, 225.
Stockwell. 157.
Stolétof. 84, 90, 94.
Stone (E.-J.). 13, 15, 208, 209, 211.
Stone (O.). 171, 179.
Stoney. 95. 99, 100.
Stoy. 41.
Strasser. 162, 174. 180.
Strnad. 7, 71.
Struve. 18, 274.
Stuart (J.). 87.

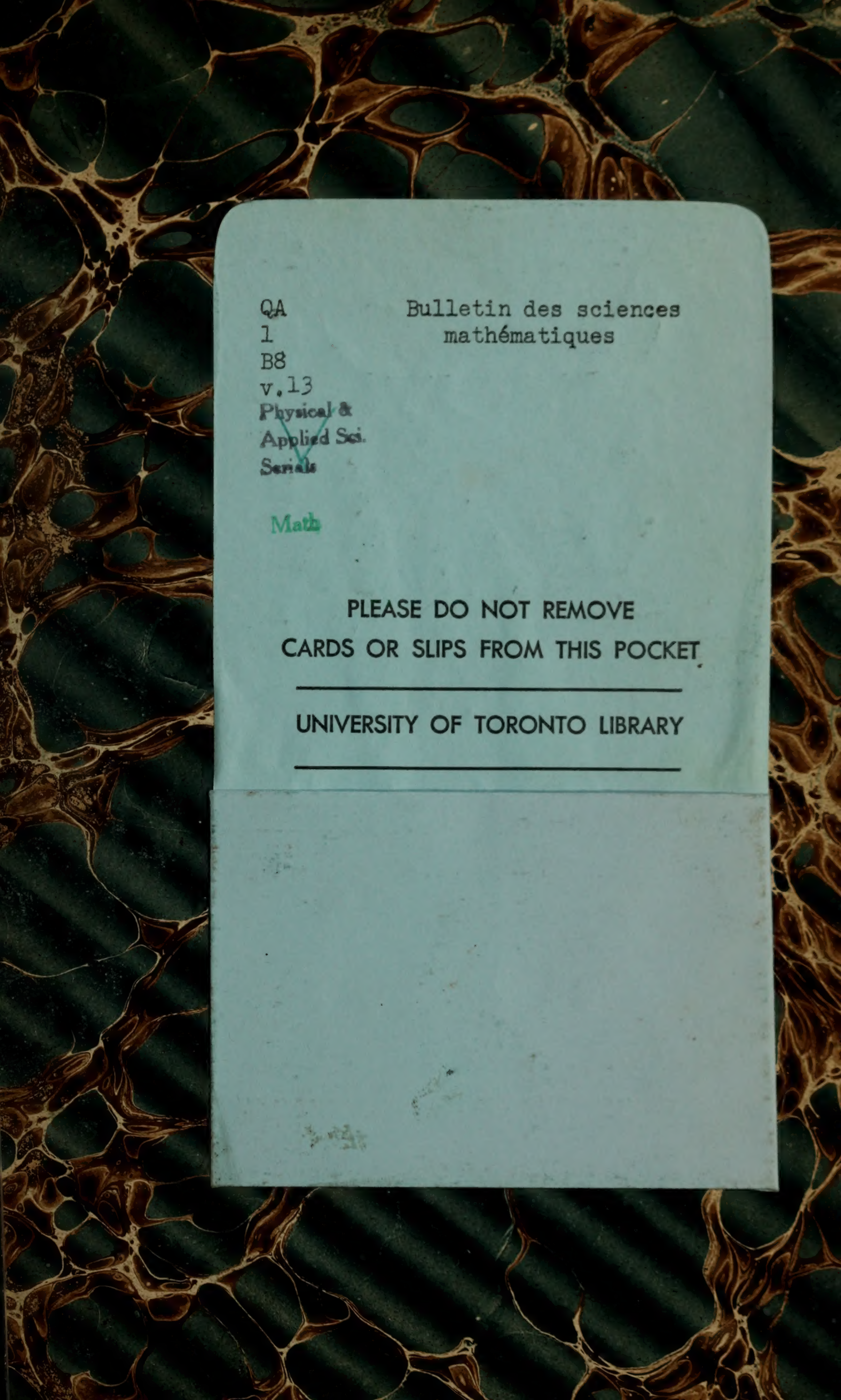
Studnička (Al.). 70.
Studnička (F.-J.). 41. 69, 70, 71, 72.
Šubic. 231.
Sundell. 85, 88.
Swift. 172, 176, 265. 270.
Sýkora. 9.
Sylvester. 33, 34, 59. 67. 68. 97. 99. 101, 267, 268, 271. 272, 273, 283.
Szily. 88, 94. 97.
Tacchini. 61, 63, 66, 267, 285.
Tanner. 74, 75, 76, 147, 148.
Tannery (J.). 62, 63.
Taylor (C.). 137.
Taylor (H.-M.). 73. 76, 95.
Taylor (S.). 209.
Taylor (W.-W.). 76.
Tchebychef. 264.
Tebbutt. 12, 17, 20, 163. 167, 174, 176, 177, 181, 206, 210, 212.
Temme. 41.
Tempel. 158, 168, 173, 174, 175. 176, 180, 266.
Tennant. 30.
Terby. 238, 242, 244, 245.
Terrier. 121.
Thomae (J.). 152, 155.
Thomé (L.-W.). 224.
Thompson (S.-P.). 99.
Thomson (J.-J.). 75, 76.
Thomson (sir W.). 86, 91, 93.
Thomson (W.). 100.
Thornthwaite. 12.
Thuillier. 126.
Tidblom. 182, 184.
Tisserand. 29, 34, 35, 58.
Tissot. 35.
Todd. 17. 166, 173.
Todhunter. 84.
Toeplitz. 152.
Tollinger. 229.
Toubin. 125.
Tournoüer. 150.
Townsend. 138, 139.
Tresca. 28, 30, 269.
Treutlein. 196.
Trève. 270.
Tridon. 283.
Trouvelot. 165.
Trowbridge. 98.
Tupman. 16, 18. 208. 213, 214.
Tylor. 90.
Uzielli. 79.
Valentiner. 158.
Valeriani. 197.
Vallier. 127, 129.
Van der Mensbrugghe. 97. 99. 236. 239. 240, 246.
Van Ertborn. 241.
Van Tricht. 114.
Ventosa. 207.
Verdon. 75.
Veronese. 80.
Viaggi. 200.
Vigan. 108.
Villarceau (Y.). 23, 27. 28. 29. 32. 59. 65. 66, 67.
Vinot. 268.
Violle. 62, 285.
Virieu (de). 124.
Vogel (H.-C.). 184.
Waldo. 173.
Walenn. 86, 92, 94, 96. 97. 100, 101.
Walker. 140, 142.
Wallentin. 234, 235.
Waltenhofen (v.). 234.
Walton. 144.
Wangerin. 46, 48.
Warburg. 92.
Ward. 205.
Waters. 207.
Watson. 30, 32, 33, 157, 158. 159, 174. 176, 177. 215, 269, 270, 272, 273, 274, 280.
Watts. 91, 92.
Webb. 139.
Weber (H.-F.). 45, 100, 273, 291.
Weber (L.). 7.
Weichold. 148.
Weilenmann. 287.
Weiler (Aug.). 156, 172.
Weingarten. 221.
Weinmeister. 37.
Weiss. 158, 173.
Weissenborn. 40.
Welsch. 133.
Werdermann. 280, 283.
Weyprecht. 231.
Weyer. 169.
Weyr (Em.). 230, 231, 232, 234.
Wiczorkewicz. 37.
Wijkander. 184.
Wilkinson. 75.
Williams. 13.
Wilson. 13, 204. 206.
Winckler. 230, 235.
Winnecke. 18, 162. 163. 164, 166, 168. 174. 180, 208.
Winterberg. 158, 159.
Wittwer. 154.
Witworth. 76.
Wolf (R.). 25, 157, 168. 176, 287. 288. 289, 290, 291, 292.
Wolstenholme. 146.
Woodhouse. 186.

Worpitzki. 155.
Wosyka. 228.
Wright. 89.
Young (G.-A.). 213.
Young (J.-R.). 215, 217.
Zahradník. 5, 7, 70, 72, 73, 234.
Zdráhal. 72.
Zenger. 20, 88, 206.
Zetzsche. 155.
Zincken (dit Sommer). 44.
Zöllner. 87.
Zolt (de). 200.
Zucchetti. 252.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME II.

Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.




QA
1
B8
v.13
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
Bulletin des sciences
mathématiques
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

